

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Idéaux de type fini d'algèbres de fonctions analytiques bornées

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 1 (1975-1976), exp. n° 15, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A9_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IDÉAUX DE TYPE FINI
D'ALGÈBRES DE FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

par Jean-Paul BEZIVIN.

On démontre, dans cet exposé, une proposition qui généralise un résultat dû à M. VAN DER PUT [3]. La preuve suit d'ailleurs pas à pas celle de cet auteur.

1. Notations et présentation du problème.

On note K un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, V est son anneau de valuation, D le disque unité ouvert de K , et k le corps résiduel $k = V/D$.

B est l'algèbre de Banach sur K des fonctions analytiques bornées sur D , munie de la norme de la convergence uniforme sur D ; on note $K\{X\}$ le sous-algèbre de Banach de B des séries restreintes (c'est-à-dire des $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ vérifiant $\lim |a_n| = 0$), et $V\{X\}$ la boule unité de $K\{X\}$ (les séries restreintes à coefficients dans V).

Soit $I = (g_1, \dots, g_s)$ un idéal de type fini de B . Dans [3], M. VAN DER PUT résout le "Corona problem", c'est-à-dire montre que si

$$\inf \sup_{x \in D, 1 \leq j \leq s} |g_j(x)| = \delta > 0,$$

alors l'idéal I est égal à B . On peut se poser le problème plus général suivant : Soit $g \in I$, on voit facilement qu'il existe alors $A > 0$ tel que l'on ait :

$$(*) \quad \forall x \in D, |g(x)| \leq A \sup_j |g_j(x)|.$$

On veut étudier la réciproque, cette inégalité implique-t-elle $g \in I$? On va montrer que (*) implique $g^2 \in I$, mais que l'on n'a pas $g \in I$ en général.

On va d'abord résoudre le même problème pour des idéaux de $V\{X\}$.

2. Résolution du problème pour $V\{X\}$.

On dispose donc d'un idéal de type fini de $V\{X\}$, I , engendré par s éléments (g_1, \dots, g_s) . Il est facile de voir qu'alors $t_I(x) = \sup_j |g_j(x)|$ ne dépend que de I et non pas du système générateur choisi.

On va démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit $g \in V\{X\}$ tel que $|g(x)| \leq t_I(x)$, $\forall x \in V$. Alors $g^2 \in I$, et ce résultat est le meilleur possible en général.

On va d'abord effectuer des réductions du problème.

LEMME 1. - On peut supposer que :

(i) $I \cap V \neq \{0\}$,

(ii) Si ϕ est l'homomorphisme canonique de $V\{X\}$ sur $k[X]$, $\phi(I) \neq \{0\}$, engendré par un polynôme de degré $d \geq 1$,

(iii) les g_j sont des polynômes unitaires de degré d , $\phi(g_j) = \phi(g_1)$, $\forall j$, et $g_1(0) = 0$.

Preuve (cf. [3]).

(i) Tout d'abord, dire que $I \cap V \neq \{0\}$, c'est dire que les g_j n'ont pas de zéros communs dans V .

Soit S le polynôme des zéros communs aux g_j , que l'on peut supposer être unitaire, et donc dans $V[X]$. On a alors :

$$\forall j , g_j = g_j^* S \quad \text{et} \quad \forall x \in V , |g_j(x)| \leq |S(x)| .$$

On en déduit :

$$|g(x)| \leq t_I(x) \leq |S(x)| .$$

Il est alors clair que $S | g$, donc $g = g^* S$, $g^* \in V[X]$. On a alors :

$$|g^*(x)| \leq \sup_j |g_j^*(x)| , \quad \forall x \in V ,$$

et donc $g^{*2} \in (g_j^*)$. Une multiplication par S^2 donne alors le résultat.

(ii) Dire que $\phi(I) = \{0\}$, c'est dire que $\sup_j \|g_j\| < 1$; soit $\rho \in K^*$ tel que $|\rho| = \sup_j \|g_j\|$, et notons $\tilde{g}_j = \rho^{-1} g_j$. Il est clair que $\tilde{g}_j \in V\{X\}$, $\forall j$, et si l'on note $\tilde{g} = \rho^{-1} g$, on a $|\tilde{g}(x)| \leq \sup_j |\tilde{g}_j(x)|$. On en déduit $\tilde{g}^2 \in (\tilde{g}_j)$ et une multiplication par ρ^2 donne alors le résultat. Comme $\phi(I)$ est un idéal de $k[X]$, il est engendré par un polynôme de degré $d \geq 0$; si $d = 0$, $1 \in \phi(I)$, donc il existe élément de I qui s'écrit $1 - h$ avec $\|h\| < 1$, or un élément de ce type est inversible dans $V\{X\}$, donc $d = 0$ implique $I = V\{X\}$, on peut donc supposer $d \geq 1$.

(iii) Soit P un générateur de $\phi(I)$, il existe alors un élément f_0 de I tel que $\phi(f_0) = P$; f_0 , à un facteur inversible de $V\{X\}$ près, est alors un polynôme unitaire de degré d , on peut supposer $f_0 = X^d + \dots \in V[X]$. Quitte à diviser les g_j par f_0 , on peut supposer degré $g_j < d$ et (f_0, g_1, \dots, g_s) est alors un système générateur de I . Comme degré $g_j < d$, $\phi(g_j) = 0$, donc $(f_0, f_0 + g_1, \dots, f_0 + g_s)$ est un système de générateurs satisfaisant aux premières conditions de (iii); pour réaliser la troisième, il suffit de faire une translation sur la variable x .

On se place donc dans les conditions du lemme 1, et on poursuit la démonstration de la proposition.

Si $g \in V\{X\}$, et vérifie $|g(x)| \leq t_I(x)$, on peut toujours, en vue du résultat à démontrer, supposer que $g \in V[X]$ (il suffit de faire une division par g_1) et

même de degré $\leq d - 1$. On va faire la démonstration par récurrence sur d , en fait, on va démontrer que : Si Q est un polynôme vérifiant $|Q(x)| \leq t_I(x)$, alors $Q^2 \in (g_1, \dots, g_s) V[X]$. Le cas $d = 1$ est trivial, on se ramène à $(x + \lambda, x) = I$, et par division par X , à $Q = \text{Cte} = \theta$. On a donc

$$|\theta| \leq \sup(|x + \lambda|, |x|), \quad \forall x,$$

d'où $|\theta| \leq |\lambda|$, $\theta = \mu\lambda$ avec $\mu \in V$, soit $\theta = \mu(x + \lambda) - \mu x \in I$.

On suppose donc la proposition vraie si $d \leq n - 1$.

Cas $\phi(g_1) = \phi(g_j) = X^d$. - On peut supposer $d^0 Q \leq d - 1$. Soit $\rho \in K$, $|\rho| = \sup\{|a|; \exists j, g_j(a) = 0\}$, on a $|\rho| < 1$. Les polynômes

$$\rho^{-d} g_j(\rho x) = \tilde{g}_j(x)$$

sont alors dans $V[X]$, et unitaires de degré d . Si l'on pose

$$\rho^{-d} Q(x) = \tilde{Q}(x),$$

$\tilde{Q} \in V[X]$ et vérifie $|\tilde{Q}(x)| \leq t_{\tilde{I}}(x)$, $\tilde{I} = (\tilde{g}_j)$.

Soit $\tilde{d} = \text{degré d'un générateur de } \phi(\tilde{I})$. Si $\tilde{d} < d$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et il existe de $T_j \in V[X]$ tels que

$$\tilde{Q}^2(x) = \sum_{j=1}^s T_j(x) \tilde{g}_j(x).$$

Quitte à diviser les T_j par \tilde{g}_1 , on peut supposer que $\deg(T_j) \leq d - 1$ pour $j \geq 2$; l'hypothèse $\deg(Q) \leq d - 1$ implique alors $\deg(T_1) \leq d - 1$. On a :

$$Q^2(x) = \sum_{j=1}^s \rho^d T_j(x/\rho) g_j(x),$$

et le fait que $\deg T_j \leq d$ implique $\rho^d T_j(x/\rho) \in V[X]$, ce qui donne le résultat.

Si par contre, $\tilde{d} = d$, on voit alors que $\phi(\tilde{g}_j) = \phi(\tilde{g}_1)$, $\forall j$, et $\phi(\tilde{g}_1) \neq X^d$. On s'est donc ramené au cas où

$$\phi(g_1) = \phi(g_j), \quad \forall j, \quad \phi(g_1) \neq X^d, \quad g_1(0) = 0.$$

On peut alors écrire $g_j = g_j^+ g_j^-$, où g_j^+ et g_j^- sont des polynômes unitaires, g_j^+ n'ayant que des zéros de module < 1 , et g_j^- des zéros de module égal à 1 .

On note I^+ l'idéal engendré par les g_j^+ , et I^- l'idéal engendré par les g_j^- .

Il est clair que l'on a

$$|Q(x)| \leq t_{I^+}(x), \quad \forall x, \quad \text{et} \quad |Q(x)| \leq t_{I^-}(x), \quad \forall x,$$

on en déduit $Q^2 \in I^+ \cap I^-$.

On a donc

$$Q^2 = \sum_{j=1}^s a_j^+ g_j^+ = \sum_{j=1}^s a_j^- g_j^-, \quad \text{avec} \quad a_j^+, a_j^- \in V[X].$$

Soit $\alpha^+ = g_1^+ \dots g_s^+$, $\alpha^- = g_1^- \dots g_s^-$. Il vient alors $Q^2 \alpha^+$ et $Q^2 \alpha^- \in I$.

Mais $\Phi(\alpha^+)$ et $\Phi(\alpha^-)$ sont des polynômes premiers entre eux dans $h[X]$, donc il existe deux polynômes $U_1, U_2 \in V[X]$, et $h \in V[X]$, $\|h\| < 1$ tels que

$$U_1 \alpha^+ + U_2 \alpha^- = 1 - h.$$

On en déduit

$$Q^2(1 - h) = Q^2 \alpha^+ U_1 + Q^2 \alpha^- U_2 \in (g_1, \dots, g_s) V[X].$$

D'autre part $I \cap V \neq \{0\}$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $h^m \in I$. Par suite, $(1 + h + \dots + h^{m-1})(1 - h) Q^2 = (1 - h^m) Q^2 = Q^2 - h^m Q^2 \in (g_1, \dots, g_s) V[X]$, d'où $Q^2 \in (g_1, \dots, g_s) V[X]$, ce qui termine la démonstration de la proposition 1. Donnons un exemple prouvant que l'on a obtenu le meilleur résultat possible :

$$I = (\mu^2, x(x + \mu)) \text{ avec } 0 < |\mu| < 1, \text{ et } g(x) = x\mu.$$

On vérifie $|g(x)| \leq t_I(x)$ et $g \notin I$.

3. Résolution du problème dans B.

On se donne un idéal $I = (g_1, \dots, g_s)$ de B , et $g \in B$ vérifiant

$$|g(x)| \leq A \sup_j |g_j(x)|, \quad \forall x \in D.$$

PROPOSITION 2. - Dans ces conditions, on a $g^2 \in I$, et ce résultat est le meilleur possible en général.

Preuve. - On peut clairement supposer $\|g_j\| \leq 1, \forall j$, et $A = 1$. Soit alors $\varepsilon > 0$, fixé, et $\rho_n \in D$, $|\rho_{n+1}| > |\rho_n|$, telle que $|\rho_n|^m \geq 1 - \varepsilon$, et

$$\lim |\rho_n| = 1.$$

On pose $g_{j,n}(x) = g_j(\rho_n x)$, on a

$$g_{j,n} \in V\{X\}, \quad \forall j, \quad \forall n, \quad g(\rho_n x) = g_n(x) \in V\{X\}.$$

Si I_n est l'idéal de $V\{X\}$ engendré par les $g_{j,n}$, on a

$$|g_n(x)| \leq t_{I_n}(x), \quad \forall x \in V,$$

donc, d'après la proposition 1, $g_n^2 \in I_n$. Il existe donc des $\gamma_{j,n} \in V\{X\}$ tels que

$$g^2(\rho_n x) = \sum_1^s \gamma_{j,n}(x) g_{j,n}(x).$$

On écrit

$$\gamma_{j,n}(x) = \sum_0^n a_{j,k}^{(n)} x^k + x^n \eta_{j,n}(x) = \theta_{j,n}(x) + x^n \eta_{j,n}(x)$$

d'où

$$g^2(\rho_n x) = \sum_1^s \theta_{j,n}(x) g_j(\rho_n x) + x^n \eta_n(x)$$

et donc

$$g^2(x) = \sum_1^s \theta_{j,n}(x/\rho_n) g_j(x) + x^n \mu_s(x) .$$

L'hypothèse $|\rho_n|^{n_i} \geq 1 - \varepsilon$, $\forall n$, implique alors que

$$\|\theta_{j,n}(x/\rho_n)\| \leq 1/(1 - \varepsilon), \quad \forall j, \quad \forall n .$$

On peut alors appliquer une méthode due à M. VAN DER PUT [3], de limite généralisée. On pose $\psi(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$, si $c = (c_n)$ est une suite convergente; on prolonge ψ à l'espace de Banach des suites bornées en $\tilde{\psi}$, avec $\|\tilde{\psi}\| \leq 1 + \varepsilon$.

Si l'on note $\theta_{j,n}(x) = \sum_0^\infty a_{j,k}^{(n)} x^k$, il résulte de ce qu'on vient de dire que $\Lambda_{j,k} = (a_{j,k}^{(n)})$ est une suite bornée. Si l'on pose

$$a_{j,k} = \tilde{\psi}(\Lambda_{j,k}) \quad \text{et} \quad \theta_j(x) = \sum_0^\infty a_{j,k} x^k ,$$

on vérifie facilement que l'on a :

$$g^2(x) = \sum_1^s \theta_j(x) g_j(x)$$

et que $\theta_j \in B$, $\forall j$, ce qui termine la démonstration.

Il reste à donner un exemple d'idéal I et de fonction $g \in B$ tels que

$$|g(x)| \leq A \sup |g_j(x)| \quad \text{et} \quad g \notin I .$$

On suppose K maximale complet, et on construit alors facilement deux fonctions g_1 et $g_2 \in B$ telles que

(i) g_1 et g_2 n'ont pas de zéros communs,

(ii) $J = (g_1, g_2) \neq B$.

On considère alors $I = (g_1^2, g_2(g_1 + g_2))$, on a $I \subset J$, donc $I \neq B$, et soit $g = g_1 g_2$. On vérifie facilement que $g \notin I$ et que

$$|g(x)| \leq \sup (|g_1^2(x)|, |g(x)| |g_1(x) + g_2(x)|) .$$

4. Quelques résultats sur B .

On a la proposition suivante

PROPOSITION 3. — Si K est maximale complet, l'algèbre B n'est pas noethérienne.

On suit une méthode de [2].

On construit d'abord (g_1, g_2) comme dans le contre-exemple de la fin de la proposition 2. On va montrer qu'il existe une chaîne strictement croissante d'idéaux de type fini, $J_s = (g_1, g_2, \dots, g_s)$. Supposons J_s construit. D'après la construction de g_1 et g_2 , les g_j , $j \leq s$, n'ont pas de zéros communs. D'autre part, $J_s \neq B$. Il existe alors une suite $x_k \in D$, vérifiant

$$\sup_j |g_j(x_k)| = u_k \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad k \rightarrow \infty .$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que x_k est une suite d'interpolation ([3], [1]). Il existe alors une fonction $g_{s+1} \in B$ vérifiant

$$g_{s+1}(x_{2k}) = 1, \quad g_{s+1}(x_{2k+1}) = 0,$$

l'idéal $J_{s+1} = (g_1, \dots, g_{s+1})$ est différent de B , car

$$\sup_{j \leq s+1} |g_j(x_{2k+1})| = u_{2k+1},$$

et $u_{2k+1} \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$, et $g_{s+1} \notin J_s$ car, sinon, il existerait $A > 0$ tel que $|g_{s+1}(x)| \leq A \sup_j |g_j(x)|$, $\forall x \in D$; en prenant $x = x_{2k}$, on obtient $1 \leq Au_{2k} \rightarrow 0$, d'où contradiction.

On a comme conséquence facile le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Les seuls idéaux maximaux de type fini de B sont les noyaux de morphismes $f \rightarrow f(\alpha)$ où $\alpha \in D$.

Enfin, on peut démontrer une généralisation de la proposition 2.

PROPOSITION 4. - Soit $g_k \in B$, telle que $\lim \|g_k\| = 0$ si $k \rightarrow \infty$. Soit $g \in B$ telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in D, \quad |g(x)| \leq C \sup_k |g_k(x)|.$$

Alors il existe $\theta_k \in B$, $\sup \|\theta_k\| < +\infty$, tels que

$$g^2(x) = \sum_1^\infty \theta_k(x) g_k(x).$$

On utilise les mêmes méthodes, au moyen du lemme suivant :

LEMME 2. - Soit I un idéal de $V\{X\}$, engendré par une suite $g_k \in V\{X\}$ telle que $\|g_k\| \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$. Alors I est de type fini.

Preuve. - L'idéal J de $K\{X\}$ engendré par les g_k est principal, engendré par $P \in V[X]$, $\|P\|_{n_0} = 1$. On a donc, $\forall k$, $g_k = \theta_k P$, et $\exists n_0$ et des $b_j \in K\{X\}$ tels que $P = \sum_1^{n_0} b_j g_j$.

On en déduit

$$g_k = \sum_1^{n_0} \theta_k b_j g_j, \quad \forall k.$$

D'autre part, $\|g_k\| = \|\theta_k\| \|P\| = \|\theta_k\|$ donc $\|\theta_k\| \rightarrow 0$. Pour $k \geq k_0$, on aura donc, $\forall j$, $\|\theta_k\| \|b_j\| \leq 1$, d'où $g_k \in (g_1, \dots, g_m)$ avec $m = \sup(k_0, n_0)$, et la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEZIVIN (Jean-Paul). - Interpolation de fonctions analytiques bornées, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 3.
- [2] KELLEHER (J. J.) and TAYLOR (B. A.). - Finitely generated ideals in rings of analytic functions, Math. Annalen, t. 193, 1971, p. 225-237.
- [3] VAN DER PUT (Marius). - The non-archimedean Corona problem, "Table ronde d'a-

nalyse non archimédienne [1972, Paris], Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 287-317.

(Texte reçu le 5 avril 1976)

Jean-Paul BEZIVIN
163 rue de Charonne
75011 PARIS
