Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Philippe Robba

Factorisation d'un opérateur différentiel. Applications

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 10, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A9_0>

Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 10, 6 p.

3 février 1975

FACTORISATION D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL. APPLICATIONS

par Philippe ROBBA

(d'après un travail en commun avec B. DWORK [1])

1. Introduction.

Nous gardons les notations de l'exposé n° 2 [5]. Toutefois nous modifions la définition de la superadmissibilité pour en faire une notion relative et non plus absolue. Soit A une union de classes résiduelles de Ω (on dira que A est *standard*) ; on dit que B est un *sous-ensemble superadmissible* de A si B est le complémentaire dans A d'une union finie de disques de rayons strictement inférieurs à 1 .

Dans [5], nous avons démontré le résultat suivant.

THÉORÈME (F). - *Soit* L *un opérateur différentiel linéaire à coefficients éléments analytiques (à coefficients dans* K *) sur* A*-standard. Soit* R *l'opérateur différentiel unitaire tel que le noyau de* R *au voisinage du point générique* t *coïncide avec le noyau de* L *dans le disque générique* $D(t, 1^-)$ $(\mathrm{Ker}_t R = \mathrm{Ker}_t L \cap \mathfrak{A}_t)$. *Alors il existe un sous-ensemble super-admissible* B *de* A *tel que les coefficients de* R *se prolongent analytiquement dans* B .

Nous allons montrer comment ce résultat permet d'améliorer des résultats antérieurs de DWORK sur la croissance des solutions d'une équation différentielle [2], et de l'auteur sur l'indice d'un opérateur différentiel [3]. Dans le premier cas, nous montrerons que le résultat obtenu pour les opérateurs différentiels à coefficients fractions rationnelles est encore valable pour les opérateurs à coefficients éléments analytiques. Dans le deuxième cas, nous montrerons dans quels disques les propriétés d'indice obtenues dans le disque générique sont encore valables.

Les améliorations découleront d'une estimation de la dimension du noyau de L dans une classe résiduelle à partir de la dimension du noyau de L dans le disque générique et de précisions sur le domaine de prolongement des coefficients de l'opérateur R du théorème (F). Ce qui jouera un rôle fondamental sera le fait que les coefficients de R se prolongent non seulement dans presque toutes les classes résiduelles de A , mais également dans des couronnes à l'intérieur des autres classes résiduelles.

Nous ne ferons qu'esquisser les démonstrations, renvoyant à [1] pour des démonstrations plus complètes.

2. Dimension du noyau de L dans une classe résiduelle.

Dans toute la suite, A désigne un ensemble standard fixe, et L un opérateur différentiel de $H(A)[D]$.

2.1. LEMME. - Soit une couronne $\Delta = D(a\ ,\ 1^-) - D(a\ ,\ r^+)$, $0 < r < 1$, et soit $Q \in H(\Delta)[D]$. Si l'équation $Qu = 0$ possède une solution non triviale, méromorphe dans Δ , elle possède une solution analytique bornée non triviale dans le disque générique.

Le lemme généralise la proposition 6.5 de [2] où l'on considérait un disque $D(a\ ,\ 1^-)$ au lieu d'une couronne. La démonstration est identique à celle de la proposition 5.10 de [2].

2.2. THÉORÈME de comparaison. - Soit $D(a\ ,\ 1^-) \subset A$. On a

$$(*) \qquad \dim(\mathrm{Ker}_a\ L \cap \mathfrak{a}_a) \leq \dim(\mathrm{Ker}_t \cap \mathfrak{a}_t)$$

l'égalité ayant lieu dans presque toutes les classes résiduelles $D(a\ ,\ 1^-)$ de A . De plus, R étant l'opérateur unitaire tel que $\mathrm{Ker}\ R = \mathrm{Ker}_t\ L \cap \mathfrak{a}_t$, si (*) est une égalité, les coefficients de R sont des éléments méromorphes dans $D(a\ ,\ 1^-)$; réciproquement, si les coefficients de R sont analytiques dans $D(a\ ,\ 1^-)$ ou bien sont méromorphes dans $D(a\ ,\ 1^-)$, et $D(a\ ,\ 1^-)$ n'est pas singulier pour L , alors (*) est une égalité.

(On dit que $D(a\ ,\ 1^-)$ n'est pas singulier pour L si, pour tout $b \in D(a\ ,\ 1^-)$, $\dim \mathrm{Ker}_b\ L =$ ordre de L , ceci a lieu en particulier si le coefficient du terme de plus haut degré de L ne s'annule pas dans $D(a\ ,\ 1^-)$.)

Démonstration. - D'après le théorème (F), il existe une couronne

$$\Delta = D(a\ ,\ 1^-) - D(a\ ,\ r^+)\ , \quad 0 < r < 1\ ,$$

telle que $L = QR$ avec Q et R appartenant à $H(\Delta)[D]$, $\mathrm{Ker}_t\ R = \mathrm{Ker}_t\ L \cap \mathfrak{a}_t$ et $\mathrm{Ker}_t\ Q \cap \mathfrak{a}_t = \{0\}$.

Si $u \in \mathfrak{a}_a$ et $Lu = 0$, alors Ru est analytique dans Δ , et appartient au noyau de Q . Si Ru n'était pas nul, d'après le lemme 2.1, Q n'aurait pas un noyau trivial dans le disque générique, ce qui contredirait notre hypothèse. Ceci démontre que le membre de gauche de (*) est majoré par l'ordre de R ce qui démontre (*).

Si (*) est une égalité, alors les coefficients de R sont de façon évidente des fonctions méromorphes dans $D(a\ ,\ 1^-)$, mais comme ce sont également des éléments analytiques dans Δ , on en déduit que ce sont des éléments méromorphes dans $D(a\ ,\ 1^-)$. Réciproquement, si les coefficients de R sont analytiques dans $D(a\ ,\ 1^-)$ (rappelons que R est unitaire), ou s'ils sont méromorphes, et $D(a,1^-)$ n'est pas singulier pour L , cela implique que $D(a\ ,\ 1^-)$ n'est pas singulier pour R . On démontre alors que le fait que R a k solutions linéairement indépendantes dans le disque générique avec $k =$ ordre de R , implique que R a également k solutions linéairement indépendantes dans $D(a\ ,\ 1^-)$ (s'inspirer de la démonstration de la proposition 4.1 de [2]), ce qui montre que (*) est une égalité.

Comme par ailleurs on sait que les coefficients de R se prolongent dans presque toutes les classes résiduelles de A, il en résulte que (*) est une égalité dans presque toutes les classes résiduelles de A.

2.3. Remarques.

(a) Si $\dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{a}_t) = 0$, c'est-à-dire si L n'a pas de solutions dans le disque générique, alors (*) est une égalité dans toutes les classes.

(b) Si $\dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{a}_t) = \text{ordre } L$, c'est-à-dire si toutes les solutions de L au voisinage de t convergent dans $D(t, 1^-)$, alors (*) est une égalité dans toutes les classes non singulières pour L (puisqu'alors $R = (1/c(x))L$ où $c(x)$ est le coefficient du terme de plus haut degré de L).

(c) On peut généraliser en considérant le noyau méromorphe de L dans $D(a, 1^-)$. (Généralisation laissée au lecteur.)

3. Croissance des solutions.

THÉORÈME. - Supposons que L a ses coefficients éléments analytiques dans $D(a, 1^-)$ et est d'ordre n. Si L a n solutions linéairement indépendantes dans $D(a, 1^-)$, les solutions de L dans $D(a, 1^-)$ ont une croissance logarithmique d'ordre $n-1$.

Ce théorème généralise le theorème 2.2 de [2] où l'on supposait que les coefficients de L étaient des polynômes. Ainsi que nous l'avions remarqué à l'époque (§3.3 de [2]), le seul moment où nous utilisions l'hypothèse que les coefficients de L étaient des polynômes était pour démontrer que

$$\dim(\mathrm{Ker}_a\, L \cap \mathfrak{a}_a) = \text{ordre } L \Longrightarrow \dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{a}_t) = \text{ordre } L ,$$

or ceci résulte de l'inégalité (*), ce qui démontre le théorème.

4. Indice.

4.1. Nous allons montrer que dans les bonnes classes résiduelles $D(a, 1^-)$ de A (celles où (*) est une égalité), L a un indice dans $\mathfrak{a}_a$.

THÉORÈME. - Si pour la classe résiduelle $D(a, 1^-)$ de A, (*) est une égalité, L a un indice dans $\mathfrak{a}_a$.

Démonstration. - D'après le théorème 2.2, on a $L = QR$, les coefficients de Q et R étant des éléments méromorphes dans $D(a, 1^-)$, avec $\mathrm{Ker}_a\, R = \mathrm{Ker}_a\, L \cap \mathfrak{a}_a$ (et donc $\mathrm{Ker}_a\, R \subset \mathfrak{a}_a$) et $\mathrm{Ker}_t\, Q \cap \mathfrak{a}_t = \{0\}$.

On peut trouver des polynômes π, et ω de $K[x]$, tels que $R' = \pi R$ et $Q' = \omega Q \circ 1/\pi$ aient leurs coefficients éléments analytiques dans $D(a, 1^-)$. On a $\omega L = Q' R'$. Mais alors d'après le théorème 3.1 de [3], R' a un indice dans $\mathfrak{a}_a$

et, d'après le théorème 2.3 de [3], Q' a un indice dans $\mathcal{A}_a$. Donc ωL a un indice dans $\mathcal{A}_a$, et L aussi.

4.2. COROLLAIRE. - <u>L'opérateur L a un indice dans $\mathcal{A}_a$ pour presque toutes les classes résiduelles de A.</u>

4.3. Lorsque (*) n'est pas une égalité on ne peut rien dire a priori au sujet de l'indice de L.

Nous avons déjà donné un exemple d'opérateur L qui n'avait pas d'indice dans $\mathcal{A}_0$ (§5.3 de [3]), mais la classe $D(0, 1^-)$ était singulière pour L.

On avait $L = xD + c$ et l'on montrait que L a un indice dans $\mathcal{A}_0$ si, et seulement si, $\lambda = \liminf_{m\to+\infty} |m + c|^{1/m} \geqslant 1$.

Nous allons donner un nouvel exemple mais cette fois le mauvais disque sera un disque non singulier pour L.

C'est l'opérateur indiqué par MONSKY qui va intervenir.

$$L = pxD^2 + (1 - x)D - c , \quad c \in \underset{\sim}{Z}_p , \quad c \notin \underset{\sim}{N} .$$

Cet opérateur a été étudié au §5.13 de [2]. On y a indiqué que $\dim(\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{A}_t) = 1$. On a donc une factorisation de L : $L = QR$ avec $\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{A}_t$. On a signalé qu'alors

$$R = D + \frac{c}{x-1} - \frac{V'}{V} ,$$

où V est un élément analytique dans $D(1, r^+)$ avec $r < 1$.

4.4. Avant de poursuivre l'étude de cet exemple nous allons faire quelques remarques générales sur le calcul d'indice d'opérateurs à coefficients polynomiaux.

Soit $L \in K[x][D]$, $L = \sum c_j D^j$. On a défini [4]

$$m(L) = \max_j (\deg c_j - j) .$$

Soit Δ la couronne $\Delta = D(a, 1^-) - D(a, r^+)$, $0 < r < 1$. Nous noterons $\mathcal{A}_\Delta$ l'espace des fonctions analytiques sur Δ, et $\mathfrak{A}_r$ l'espace des fonctions analytiques sur $\complement D(a, r^+)$ nulles à l'infini. Le théorème de Mittag-Leffler nous dit alors que

$$\mathcal{A}_\Delta = \mathcal{A}_a \oplus \mathfrak{A}_r .$$

D'autre part, ainsi qu'on l'a remarqué dans [4], si $L \in K[x][D]$ et si $m(L) \leqslant 0$ alors L envoie $\mathfrak{A}_r$ dans lui-même (dans tous les cas $\mathcal{A}_a$ et $\mathcal{A}_\Delta$ sont stables par action de L). Il en résulte que L a un indice dans $\mathcal{A}_\Delta$ si, et seulement si, L a un indice dans $\mathcal{A}_a$ et un indice dans $\mathfrak{A}_r$ (et alors l'indice dans $\mathcal{A}_\Delta$ est la somme des indices dans $\mathcal{A}_a$ et $\mathfrak{A}_r$). Ceci ne s'applique bien sur que si $m(L) \leqslant 0$.

Si $m = m(L) > 0$, alors $m(D^m L) = 0$. On peut appliquer alors le raisonnement précédent à $D^m L$. Mais L a un indice dans $\mathcal{A}_\Delta$ si, et seulement si, $D^m L$ en a un.

4.5. Revenons à notre exemple. L'opérateur L considéré vérifie bien $m(L) \leq 0$. On considère le cas $a = 1$. Il résulte de 4.4 que

(i) Si L a un indice dans $\mathcal{A}_\Delta$, L a un indice dans $\mathcal{A}_1$.

(ii) Si L a un indice dans $\mathfrak{A}_r$ et n'a pas d'indice dans $\mathcal{A}_\Delta$, L n'a pas d'indice dans $\mathcal{A}_1$.

Nous allons alors étudier l'indice de L dans $\mathcal{A}_\Delta$ et $\mathfrak{A}_r$ en utilisant la factorisation de L, $L = QR$, avec

$$R = D + \frac{c}{x-1} - \frac{V'}{V} = V \circ \left(D + \frac{c}{x-1}\right) \circ \frac{1}{V}$$

et

$$Q = pxD + 1 - x - px\left(\frac{c}{x-1} - \frac{V'}{V}\right) .$$

Soit π le polynôme dont les zéros sont ceux de V dans $\complement D(1, r^+)$ (avec leur multiplicité). Soit k = degré π + ordre du zéro de V à l'infini. Alors $V(x-1)^k/\pi$ et $\pi/V(x-1)^k$ sont des éléments analytiques sur $\complement D(1, r^+)$.

Posons

$$R' = \frac{(x-1)^k}{\pi} \circ R \circ \frac{\pi}{(x-1)^k} = \frac{V(x-1)^k}{\pi} \circ \left(D + \frac{\pi}{(x-1)}\right) \circ \frac{\pi}{V(x-1)^k}$$

et

$$Q' = Q \circ \frac{\pi}{(x-1)^k} .$$

Alors $\mathcal{A}_\Delta$ et $\mathfrak{A}_r$ sont stables par action de R' et Q', et l'on a

$$L \circ \frac{\pi}{(x-1)^k} = Q'\,R' .$$

Donc L a un indice dans $\mathcal{A}_\Delta$ (resp. $\mathfrak{A}_r$) si, et seulement si, $Q'R'$ a un indice dans $\mathcal{A}_\Delta$ (resp. $\mathfrak{A}_r$).

On sait par ailleurs que $\mathrm{Ker}_t\, Q \cap \mathcal{A}_t = \{0\}$, il en est donc de même pour Q'. Il en résulte (la démonstration s'inspire de celle des théorèmes 2.3 et 7.3 de [3]) que si r est suffisamment proche de 1 (ce que nous pouvons supposer) Q' a un indice dans $\mathcal{A}_\Delta$ et dans $\mathfrak{A}_r$.

Il ne nous reste donc plus qu'à étudier l'indice de R'. Comme la multiplication par $\pi/V(x-1)^k$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}_\Delta$ (resp. $\mathfrak{A}_r$), R' aura un indice si, et seulement si, $D + (c/(x-1))$ a un indice et donc si, et seulement si, $(x-1)D+c$ a un indice. Comme $m((x-1)D + c) = 0$, pour étudier l'indice de $(x-1)D + c$ dans $\mathcal{A}_\Delta$, il suffit de l'étudier dans $\mathcal{A}_1$ et $\mathfrak{A}_r$, ce que l'on sait faire.

Posons

$$\lambda_+ = \liminf_{m \to +\infty} |c + m|^{1/m} ,$$
$$\lambda_- = \liminf_{m \to +\infty} |c - m|^{1/m} .$$

Alors

$(x-1)D + c$ a un indice dans $\mathfrak{A}_1$ si, et seulement si, $\lambda_+ = 1$,

$(x-1)D + c$ a un indice dans $\mathfrak{U}_r$ si, et seulement si, $\lambda_- = 1$.

Il en résulte que

(i) Si $\lambda_+ = \lambda_- = 1$, $(x-1)D + c$ a un indice dans $\mathfrak{A}_\Delta$ et $\mathfrak{U}_r$, donc R' aussi, donc L aussi, donc L a un indice dans $\mathfrak{A}_1$.

(ii) Si $\lambda_+ < 1$ et $\lambda_- = 1$, $(x-1)D + c$ n'a pas d'indice dans $\mathfrak{A}_\Delta$, donc R' non plus et L non plus ; mais $(x-1)D + c$ a un indice dans $\mathfrak{U}_r$, donc R' aussi et L aussi.

Alors L n'a pas d'indice dans $\mathfrak{A}_1$.

Cette argumentation ne nous permet pas de conclure dans les autres cas. (L'opinion intime du conférencier est que L a un indice dans $\mathfrak{A}_1$ si, et seulement si, $\lambda_+ = 1$.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.) et ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equations (à paraître).

[2] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 1, 15 p.

[3] ROBBA (P.). - Indice d'un opérateur différentiel, Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 2, 14 p.

[4] ROBBA (P.). - Prolongement des solutions d'une équation différentielle p-adique, Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 11, 3 p. ; et C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 153-154

[5] ROBBA (P.). - Factorisation d'un opérateur différentiel, Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 2, 16 p.

(Texte reçu le 3 février 1975)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS