

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BERNARD RANDÉ

Principalité des idéaux de type fini de $H(D)$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. n° 6, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A5_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PRINCIPALITÉ DES IDÉAUX DE TYPE FINI DE $H(D)$.

par Bernard RANDÉ

1. Introduction.

Soit K un corps ultramétrique, complet, algébriquement clos, de caractéristique nulle. Si D est un sous-ensemble fermé borné de K , l'ensemble $H(D)$ des limites uniformes de fractions rationnelles sans pôle dans D est une algèbre de Banach ultramétrique par la norme uniforme sur D . A. ESCASSUT s'est posé, et a résolu, le problème de la noethérianité de $H(D)$ [2]. Il montre notamment l'équivalence entre les propositions suivantes :

1° $H(D)$ est noethérien.

2° Tout idéal de $H(D)$ est principal.

3° D n'a qu'un nombre fini de composantes infraconnexes, ouvertes, et sans T -filtre, ou bien réduites à un point.

Un anneau est dit anneau de Bezout si tout idéal de type fini est principal (exemple d'anneau de Bezout non principal : un anneau de Boole, $\mathcal{P}(E)$ par exemple). L'implication (1) \implies (2) peut alors se lire :

$$(H(D) \text{ noethérien}) \implies (H(D) \text{ de Bezout}).$$

Ce qui suit a pour but de montrer que la réciproque est vraie.

THÉOREME. - $(H(D) \text{ noethérien}) \iff (H(D) \text{ de Bezout})$.

Notations. - On note \ln le logarithme népérien.

On utilise les notations de KRASNER des semi-réels. Par exemple, $\Gamma(a, r^-, R^-)$ désigne l'ensemble des points tels que

$$(r^- < |x - a| < R^-) \iff (r \leq |x - a| < R) .$$

2. Si D n'a qu'un nombre fini de composantes infraconnexes (c. i. c.) dont une au moins n'est pas ouverte ni réduite à un point, alors $H(D)$ n'est pas de Bezout.

Soit E cette c. i. c., et $a \in E - E^0$. Remarquons que si $f \in H(E)$, $f \in H(D)$, car $X_E \in H(D)$ (cf. [2]). Il existe une famille x_n de points de $\mathbb{C}D$ tels que

$$|x_n - a| \rightarrow 0 \text{ en décroissant,}$$

$x_n \in D(x_n, p_n)$, trou de D (où p_n n'appartient pas nécessairement au groupe des valeurs).

Soit α_i une suite satisfaisant à $|\alpha_i(x_i - a)| \rightarrow 0$ en décroissant ; $|\alpha_i|$ croît. Considérons

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i r_i \frac{x-a}{x-x_i} \quad \text{où } r_i \in K, \quad p_i \leq |r_i| \leq |x_i|.$$

Alors

$$\left\| \alpha_i r_i \frac{x-a}{x-x_i} \right\|_E \leq |\alpha_i x_i|.$$

Donc $f \in H(E)$, donc $f \in H(D)$. De plus, soit $y_i \in D$, y_i vérifiant :

$$|x_i - y_i| \leq |r_i| + \varepsilon_i, \quad \text{où } \frac{|r_i|}{|r_i| + \varepsilon_i} > \max \left(\left| \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \right|, \left| \frac{\alpha_{i+1}(x_{i-1} - a)}{\alpha_i(x_i - a)} \right| \right)$$

ce qui est évidemment possible.

Alors :

$$\text{si } j < i : \quad \left| \alpha_j r_j \frac{y_i - a}{y_i - x_j} \right| \leq |\alpha_j (y_i - a)| \leq |\alpha_{i-1} (y_i - a)| < |\alpha_i (y_i - a)| \frac{|r_i|}{|r_i| + \varepsilon_i}$$

$$\text{si } j > i : \quad \left| \alpha_j r_j \frac{y_i - a}{y_i - x_j} \right| \leq |\alpha_j r_j| \leq |\alpha_{i+1} (x_{i+1} - a)| < |\alpha_i (y_i - a)| \frac{|r_i|}{|r_i| + \varepsilon_i}$$

$$\text{si } j = i : \quad \left| \alpha_i r_i \frac{y_i - a}{y_i - x_i} \right| \geq |\alpha_i (y_i - a)| \frac{|r_i|}{|r_i| - \varepsilon_i}.$$

Finalement, si on suppose $|\varepsilon_i| \leq |r_i|$:

$$\frac{1}{2} |\alpha_i (y_i - a)| \leq |f(y_i)| \leq |\alpha_i (y_i - a)|.$$

Construisons à présent une suite x_i' (extraite de x_i), des suites α_i , β_i , vérifiant les hypothèses précédentes, et satisfaisant de plus à

$$\left| \frac{\alpha_{2i}}{\beta_{2i}} \right| \rightarrow 0, \quad \left| \frac{\alpha_{2i+1}}{\beta_{2i+1}} \right| \rightarrow +\infty.$$

Supposons les suites construites à l'ordre $2n+1$, de façon que :

$$\left| \frac{\alpha_{2i}}{\beta_{2i}} \right| \leq \frac{1}{2i}; \quad \left| \frac{\alpha_{2i+1}}{\beta_{2i+1}} \right| \geq 2_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Alors on détermine successivement β_{2n} , x_{2n} , α_{2n} grâce à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} |\beta_{2n}| &> \max(|\alpha_{2n-1}|, \frac{1}{2n} |\beta_{2n-1}|) \\ |x_{2n} - a| &< \min \left(\left| \frac{(x_{2n-1} - a)\beta_{2n-1}}{\beta_{2n}} \right|, \left| \frac{\alpha_{2n-1}(x_{2n-1} - a)}{\alpha_{2n-1}} \right| \right) \\ |\alpha_{2n-1}| &\leq |\alpha_{2n}| < \frac{|\beta_{2n}|}{2n}. \end{aligned}$$

De même, pour β_{2n+1} , x_{2n+1} , α_{2n+1} .

Montrons à présent que l'idéal engendré par f , g associés aux éléments (α_i) , (β_i) n'est pas principal. Sinon, on aura dans $H(D)$:

$$f = ah; \quad g = bh; \quad (h = cf + dg) \implies ((ac - bd)(y_i) = 1,$$

car $h(y_i) \neq 0$ évidemment. Alors

$$\frac{a}{b}(y_i) \cdot c(y_i) + d(y_i) = \frac{1}{b(y_i)}.$$

Comme $a/b = f/g$, si i est pair, on voit que $|b(y_i)| \geq \delta$ dans un voisinage de a , et i pair. Or si $k \in K(D)$, et $\|b - k\| < \delta$, alors $|k(y_i)| \geq \delta$ dans

ce voisinage, donc $|k(y)| \geq \delta$ pour tout y dans un voisinage (continuité de k au point a). Donc $|b(y)| \geq \delta$ dans ce voisinage, et par conséquent b est inversible. Ceci est en contradiction avec

$$\left| \frac{a}{b}(y_i) \right| \rightarrow +\infty \text{ quand } i \rightarrow +\infty, \text{ donc à } \left| \frac{\alpha_{2i+1}}{\beta_{2i+1}} \right| \rightarrow +\infty \text{ quand } i \rightarrow +\infty.$$

Le résultat est ainsi démontré.

3. Si D n'a qu'un nombre fini de composantes infraconnexes, dont une au moins admet un T -filtre, alors $H(D)$ n'est pas de Bezout.

Rappelons la définition d'un T -filtre de E (E c. i. c. de D).

C'est un filtre défini par une suite décroissante de cercles percés emboîtés C_m , de rayon d_m , tels que C_m admet au moins un nombre fini $k(m)$ de classes $\Gamma_{m,i}$, $1 \leq i \leq k(m)$, qu'il existe des entiers $q_{m,i}$, $1 \leq i \leq k(m)$, que si on pose :

$$\gamma_m = \sup_{1 \leq i \leq k(m)} \gamma(\Gamma_{m,i}, q_{m,i}); \quad q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i}, \quad d_m \rightarrow R \neq 0$$

alors

$$\gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_n}{d_j} \right)^{q_j} \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow +\infty.$$

Par définition, si A est un disque non circonférencié tel que $A \not\subset E$, alors

$$\gamma(A, q) = 1 \text{ si } A \cap E = \emptyset,$$

$\gamma(A, q) = r^q \inf_{p \in \varepsilon(A, q)} \left\| \frac{1}{p} \right\|_{A \cap E}$, où $\varepsilon(A, q)$ est l'ensemble des polynômes unitaires de degré q dont tous les zéros appartiennent à $A - A \cap E$, et $r = \text{diam } A$.

Supposons pour simplifier que le T -filtre est décroissant et à centre a . On peut supposer $a = 0$.

Ces T -filtres sont caractérisés par le fait qu'ils sont auto-annulateurs, c'est-à-dire qu'il existe $f \in H(E)$ telle que :

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow -\ln R} v(f, \mu) &= +\infty; \\ v(f, \mu) &< +\infty \text{ pour } \mu < -\ln R \\ v(f(x)) &= +\infty \text{ pour } |x| \leq R. \end{aligned}$$

Pour démontrer cette équivalence, A. ESCASSUT construit des éléments F_n de $K(E)$ vérifiant, si l'on pose $\mu_n = -\ln d_n$:

$$\begin{aligned} (1) \quad v(x) < \mu_{h(n)} &\implies |F_n(x)| = 1 \text{ et } |1 - F_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \\ (2) \quad \left. \begin{aligned} v(x) \geq \mu_{h(n+1)} &\implies |F_n(x)| \leq \frac{1}{n} \\ \mu_{h(n+1)} \geq v(x) \geq \mu_{h(n)} &\implies |F_n(x)| \leq \frac{1}{2n} \end{aligned} \right\} \implies (v(x) \geq \mu_{h(n)}) \implies |F_n(x)| \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

où $h(n)$ est une suite tendant en croissant vers $+\infty$.

Définissons à présent des éléments de $K(D)$ $\varphi_1, \dots, \varphi_n; \psi_1, \dots, \psi_n$; des

suites d'entiers $p_1 < r_1 < \dots < p_n < r_n < \dots$ tels que :

$$\mathfrak{g}_k = \prod_{i=r_{k-1}+1}^{p_k} F_i ; \quad \psi_k = \prod_{i=p_k+1}^{r_k} F_i .$$

Si

$$f_k = \prod_{j=1}^k \varphi_j ; \quad \mathfrak{g}_k = \prod_{j=1}^k \psi_j ,$$

alors

$$v(f_k, \mu_{h(p_k)}) \geq v(\mathfrak{g}_k, \mu_{h(p_k)}) + k ,$$

$$v(\mathfrak{g}_k, \mu_{h(r_k)}) \geq v(f_k, \mu_{h(r_k)}) + k .$$

Supposons que l'on ait construit ces éléments jusqu'à l'ordre n . Notons d_n la dérivée à droite de \mathfrak{g}_n au point $\mu_{h(r_n+1)}$, et $e_n = v(\mathfrak{g}_n, \mu_{h(r_n+1)})$; \mathfrak{g}_n (par construction des F_i qui ont tous leurs pôles α tels que $|\alpha| \geq d_{h(r_n+1)-1}$) a tous ses pôles tels que $|\alpha| \geq d_{h(r_n+1)-1}$. Donc $v(\mathfrak{g}_n, \mu) \leq d_n + \mu e_n$ pour $\mu \geq \mu_{h(r_n+1)}$. Or :

$$\inf_{\mu \geq \mu_{h(m)}} v(\prod_{i=r_n}^m F_i, \mu) \rightarrow +\infty \text{ quand } m \rightarrow +\infty ,$$

car $v(F_{i,p}) \geq 0$, $\forall i$, et $v(F_m, \mu) \geq \ln m$ pour $\mu \geq \mu_{h(m)}$.

Il existe donc m_0 , tel que, si $m \geq m_0$ et $\mu \geq \sup [\mu_{h(r_n+1)}, \mu_{h(m)}]$,

$$v(\prod_{i=r_n}^m F_i, \mu) - \mu e_n - d_n \geq n + 1 .$$

Posons $m_0 = p_{n+1}$. En recommençant la même démonstration, il existe r_{n+1} tel que si $m \geq r_{n+1}$, alors

$$v(\prod_{i=p_{n+1}+1}^m F_i, \mu) - \mu e'_n - d'_n \geq n + 1$$

pour $\mu \geq \sup [\mu_{h(p_{n+1}+1)}, \mu_{h(n)}]$.

Notons alors

$$\varphi_{n+1} = \prod_{i=r_n+1}^{p_{n+1}} F_i ; \quad \psi_{n+1} = \prod_{i=p_{n+1}+1}^{r_{n+1}} F_i .$$

On a

$$v(\varphi_{n+1}, \mu_{h(p_{n+1})}) \geq v(\mathfrak{g}_n, \mu_{h(p_{n+1})}) + n + 1 = v(\mathfrak{g}_{n+1}, \mu_{h(p_{n+1})}) + n + 1$$

car $v(\psi_{n+1}, \mu_{h(p_{n+1})}) = 0$. Donc

$$v(f_{n+1}, \mu_{h(p_{n+1})}) \geq v(\mathfrak{g}_{n+1}, \mu_{h(p_{n+1})}) + n + 1 .$$

De même :

$$v(\mathfrak{g}_{n+1}, \mu_{h(r_{n+1})}) \geq v(f_{n+1}, \mu_{h(r_{n+1})}) + n + 1 .$$

Montrons à présent que f_k admet une limite dans $H(E)$. On a :

$$f_k \text{ est borné, car } |\varphi_k(x)| \leq 1, \quad \forall n .$$

De plus,

- ou bien $v(x) \geq \mu_{h(r_{k-1})}$, et alors $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{2p_{k+1}}$, car

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq |1 - \varphi_{k+1}(x)| |f_k(x)| \leq |F_{P_{k-1}}(x)|$$

et on utilise (2),

- ou bien $v(\mathbf{x}) < \mu_h(r_{k-1})$, auquel cas :

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq |1 - \varphi_{k+1}(x)| = |1 - \prod_{i=r_k+1}^{p_{k+1}} F_i(x)|.$$

Or :

LEMME. - Si $|u_i| \leq 1$, $|1 - \prod u_i| \leq \max |1 - u_i|$.

Donc $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq 1/r_{k+1}$ d'après (1).

On en déduit que f_k , g_k tendent dans $H(E)$ vers f et g .

D'autre part, dès que $\mu \leq \mu_h(r_n)$ et $i \geq n+1$, on a :

$$v(\varphi_i, \mu) = v(\psi_i, \mu) = 0.$$

Donc

$$v(f, \mu_{h(p_n)}) = v(\varphi_{n+1}, \mu_{h(p_n)}) + v(f_n, \mu_{h(p_n)}) = v(f_n, \mu_{h(p_n)}),$$

$$v(g, \mu_{h(p_n)}) = v(\psi_{n+1}, \mu_{h(p_n)}) + v(g_n, \mu_{h(p_n)}) = v(g_n, \mu_{h(p_n)}).$$

D'où

$$v(f, \mu_{h(p_n)}) \geq v(g, \mu_{h(p_n)}) + n.$$

De même,

$$v(g, \mu_{h(r_n)}) \geq v(f, \mu_{h(r_n)}) + n.$$

Montrons qu'alors l'idéal engendré par f et g n'est pas principal. Sinon, on aurait :

$$f = ah, \quad g = bh; \quad h = cf + dg.$$

Soit, comme $v(h, \mu) < +\infty$, $\forall \mu < -\ln R$:

$$(3) \quad v(ac + bd, \mu) = 0 \quad \text{pour } \mu < -\ln R.$$

Or

$$(4) \quad v(f, \mu) - v(g, \mu) = v(a, \mu) - v(b, \mu).$$

Si a et b sont simultanément annulés par le T -filtre, $v(a, \mu) \rightarrow +\infty$, $v(b, \mu) \rightarrow +\infty$. Comme $v(c, \mu)$ et $v(d, \mu)$ sont minorés, il est clair que :

$$v(ac + bd, \mu) \geq \min [v(a, \mu) + v(c, \mu), v(b, \mu) + v(d, \mu)]$$

tend vers l'infini si $\mu \rightarrow -\ln R$, ce qui est en contradiction avec (3). Or, en supposant que $v(a, \mu)$ ne tend pas vers l'infini, on sait qu'alors $v(c, \mu)$ est majoré pour $\mu < -\ln R$. Or, d'après (4), cela signifierait que $v(f, \mu) - v(g, \mu)$ serait majoré, ce qui est en contradiction en remplaçant μ par $\mu_{h(p_n)}$. De même, si l'on suppose que $v(b, \mu)$ ne tend pas vers l'infini. Le résultat est donc dé-

montré dans ce cas.

Le cas où le T -filtre est croissant s'en déduit immédiatement par inversion. Quant au cas où le T -filtre est décroissant et n'a pas de centre, il se traite de la même manière que précédemment, en utilisant la fonction $w(f, \mu)$ associée au T -filtre, au lieu de $v(f, \mu)$.

4. Si D a une infinité de composantes infraconnexes, $H(D)$ n'est pas de Bezout.

Ce cas a été traité en détail dans [3]. C'est pourquoi la démonstration en sera ici rapide.

On sait tout d'abord, grâce à [2], que D admet une infinité de couronnes vides, c'est-à-dire d'éléments maximaux dans l'ensemble des couronnes non circonscrites, centrées en un point de D , et incluses dans $\mathbb{C}D$. Si l'on dénote par $I(\Gamma)$ et $E(\Gamma)$ les plages internes et externes de Γ , où Γ est une couronne vide, il est facile de voir que $X_{I(\Gamma)}$ et $X_{E(\Gamma)}$ appartiennent à $H(D)$. Trois cas peuvent alors se produire :

- ou bien D admet une infinité de couronnes vides maximales (pour la relation d'ordre "est concentrique à"),

- ou bien D admet une suite croissante de couronnes vides,

- ou bien D admet une suite décroissante de couronnes vides.

Le deuxième cas se ramène au troisième cas par inversion.

Dans le premier cas, trois éventualités sont envisageables :

- ou bien il existe une infinité de plages internes à des distances mutuelles égales,

- ou bien il existe une infinité de plages internes dont les distances mutuelles forment une suite décroissante,

- ou bien il existe une infinité de plages internes dont les distances mutuelles forment une suite croissante.

La troisième éventualité se ramène à la deuxième par inversion.

Posons $X_n = X_{I(\Gamma_n)} \in H(D)$, et

$$f = \sum \alpha_n X_n$$

$$g = \sum \beta_n X_n$$

où α_n , β_n sont des suites de K telles que :

$$\left| \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} \right| \rightarrow 0 ; \quad \left| \frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}} \right| \rightarrow +\infty ; \quad \alpha_n \rightarrow 0, \quad \beta_n \rightarrow 0$$

dont l'existence est immédiate.

f et g appartiennent évidemment à $H(D)$. De plus, si $(f, g) = (h)$, alors

$$f = ah ; \quad g = bh ; \quad h = cf + dg .$$

Donc, si $E = \cup I(\Gamma_n) : X_E(ac + bd) = X_E$. Posons $\|\alpha\|_{E(\Gamma_n)} = \|\alpha\|_n$.

On ne peut avoir simultanément $\|a\|_n$ et $\|b\|_n$ qui tendent vers 0. Supposons donc que $\|a\|_{\varphi(n)} \geq \delta > 0$, où $\varphi(n)$ est une suite extraite de n . Montrons que a est inversible sur E privé d'au plus un nombre fini de plages.

Soit $k \in K(D)$ telle que $\|a - k\| < \delta$. Alors $\|a\|_{\varphi(n)} = \|k\|_{\varphi(n)} \geq \delta$.

Dans la première éventualité, soit x un point d'une plage interne et r la distance mutuelle de deux plages. Considérons $v_n(k, \mu)$ pour $\mu = -\ln r$. Dans toutes les classes de $D(x, r^+)$, sauf un nombre fini, on a :

$$v(k(y)) = v_x(k, -\ln r) .$$

Cette valeur commune est donc inférieure à $-\ln \delta$, puisqu'il y a une infinité de $I(\delta_{\varphi(n)})$. Donc $|k(y)| \geq \delta$ sauf dans un nombre fini de plages.

Dans la deuxième éventualité, envisageons deux possibilités. Si l'on note $D(x_n, r_n^+)$ le disque de centre $x_n \in I(\Gamma_n)$, de rayon $r_n = d(I(\Gamma_{n+1}), I(\Gamma_n))$, alors :

- ou bien $\bigcap_n D(x_n, r_n^+) = \emptyset$. Dans ce cas, k n'a ni pôle ni zéro dans $D(x_n, r_n^+)$ pour $n \geq n_0$; donc $|k(x)| = \text{Cte}$ pour $x \in \bigcup_{n \geq n_0} D(x_n, r_n^+)$. Donc $|k(y)| \geq \delta$ pour $x \in \bigcup_{n \geq n_0} I(\Gamma_n)$.

- ou bien $\bigcap_n D(x_n, r_n^+) = D(x, r^+)$. Pour $\mu \geq \mu_0$, la fonction $v_n(k, \mu)$ est linéaire; il existe une suite de points, tendant vers l'infini, telle que :

$$v_x(k, \mu_{\varphi(n)}) \leq -\ln \delta .$$

Donc, pour tout $\mu \geq \mu_0$, $v_x(k, \mu) \leq -\ln \delta$. Cela montre que $|k(y)| \geq \delta$ sauf sur un nombre fini de plages.

Soit $E' = E - \bigcup_{\text{nb fini}} I(\Gamma_n)$.

Sur E' , a est donc inversible puisque $(\|a - k\| < \delta) \implies (|a(x)| \geq \delta)$. D'où : $g = a^{-1} b f$.

En particulier, g/f est majoré, ce qui est contradictoire avec $\|\frac{g}{f}\|_{2n} \rightarrow +\infty$. Le cas où D admet une suite décroissante de couronnes vides se traite de la même manière que le cas où D admet une infinité d'éléments maximaux dont les distances mutuelles décroissent.

On posera alors $X_n = X_{I(\Gamma_n) \cap E(\Gamma_{n+1})}$.

Le résultat est donc démontré dans tous les cas.

Remarque. - Une démonstration analogue permettrait d'obtenir le résultat suivant : pour tout $n \geq 2$, il existe un idéal de $H(D)$ engendré par n éléments et pas par $n - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Analyse p -adique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 1^{re} année, 1959/60, 63 p.
- [2] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse 3^e cycle, Math., Bordeaux 1970.
- [3] RANDÉ (B.). - Principalité des idéaux à génération finie d'une algèbre de Krasner, Diplôme d'Etudes approfondies, Univ. Paris-VI, 1975.

(Texte reçu le 6 janvier 1975)

Bernard RANDÉ
Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud
2 avenue Pozzo di Borgo
92211 SAINT-CLOUD
