BERNARD RANDÉ

Une généralisation du théorème de Mittag-Leffler

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 11, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A10_0>

Groupe d'etude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 11, 4 p.

24 février 1975

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE MITTAG-LEFFLER

par Bernard RANDÉ

Rappelons le théorème de P. ROBBA.

THÉORÈME. - Soit A un ensemble infraconnexe, $f \in H(A)$. Pour tout T, trou intérieur de A, il existe f_T unique tel que : $f_T \in H(\complement T)$, et $f - f_T$ se prolonge analytiquement dans T.

De plus, $f = \sum_{T \text{ trou intérieur}} f_T$, où la convergence est uniforme sur A. Enfin,

$$\|f\|_A = \sup_T \|f_T\|_{\complement T} .$$

Nous allons généraliser ce théorème à un ensemble $H(A)$ qui n'est pas infraconnexe. Nous supposerons A fermé, borné, de façon que A soit une algèbre de Banach.

Notation. - On utilise la notation de KRASNER des semi-réels. On note pour r et R semi-réels

$$\Gamma(a, r, R) = \{x \in K \text{ tels que } r \leqslant |x - a| \leqslant R\} .$$

Par exemple

$$\Gamma(a, 0^-, 1^-) = \{x \in K \text{ tels que } |x - a| < 1\}$$

$$\Gamma(a, 1^+, +\infty) = \{x \in K \text{ tels que } |x - a| > 1\}$$

$$\Gamma(a, 1^+, 2^-) = \{x \in K \text{ tels que } 1 < |x - a| < 2\}$$

Ces trois ensembles sont les prototypes des couronnes non circonférenciées.

Trous généralisés. - Sur $\complement A$, la relation : " $x \sim y \iff$ il existe une couronne non circonférenciée contenant x et y incluse dans $\complement A$ " est une relation d'équivalence. Les classes en sont les trous généralisés de A. Cette notion, pour un fermé borné, recouvre exactement celles de "trou d'une composante infraconnexe de A", "couronne vide de A", "complémentaire de l'enveloppe circonférenciée de A".

On appelle plage d'un trou une composante infraconnexe du complémentaire de ce trou. Un trou a zéro, une ou deux plages.

Hypothèse. - On suppose que A vérifie la condition suivante :

(C) Pour tout trou T de A, pour toute plage P de T, $P \cap A$ est approche analytique de P.

Supposons que A vérifie la condition (C). Alors on a le résultat suivant.

THÉORÈME. - Soit $f \in H(A)$; pour tout T, trou généralisé de A, il existe f_T unique tel que $f_T \in H(\complement T)$, et $f - f_T$ se prolonge analytiquement dans T.

De plus, $f = \sum_{T,\ T \text{ trou généralisé}} f_T$, où la convergence est uniforme sur A . Enfin, $\|f\|_A = \sup_T \|f_T\|_{CT}$.

Les points essentiels de la démonstration sont les lemmes 1 et 2 qui suivent. A partir d'eux, la démonstration s'achève comme dans [2].

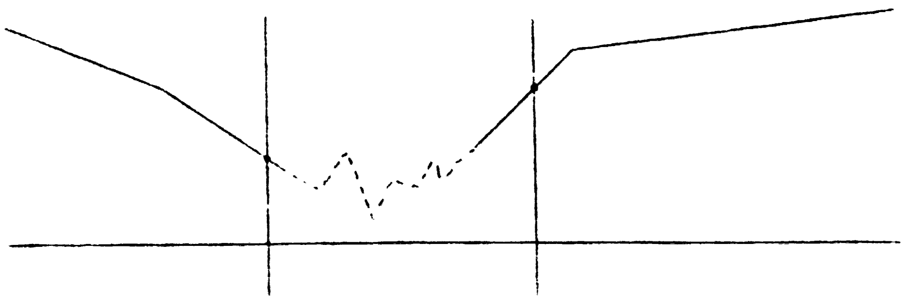
LEMME 1. - Soit T un trou de A , $f \in H_0(CT)$. Alors, $\|f\|_{CT} = \|f\|_A$.

(Dire que $f \in H_0(B)$, c'est dire que $f \in H(B)$ et $f(x) \longrightarrow 0$ quand $|x| \longrightarrow \infty$.)

Démonstration. - T est une couronne de centre a . On appelle v la fonction de valuation de f relative à a . Si $T = \Gamma(a\ ,\ r\ ,\ R)$, et si $m = -\log R$; $M = -\log r$, on a :

$$\|f\|_{CT} = \sup[e^{-v(f,m)}\ ,\ e^{-v(f,M)}] ,$$

comme le montre le graphe de $v(f\ ,\ \mu)$:



De plus, d'après la condition (C) :

$$\|f\|_A \geq \sup[\exp(-v(f\ ,\ m))\ ,\ \exp(-v(f\ ,\ M))] .$$

D'où

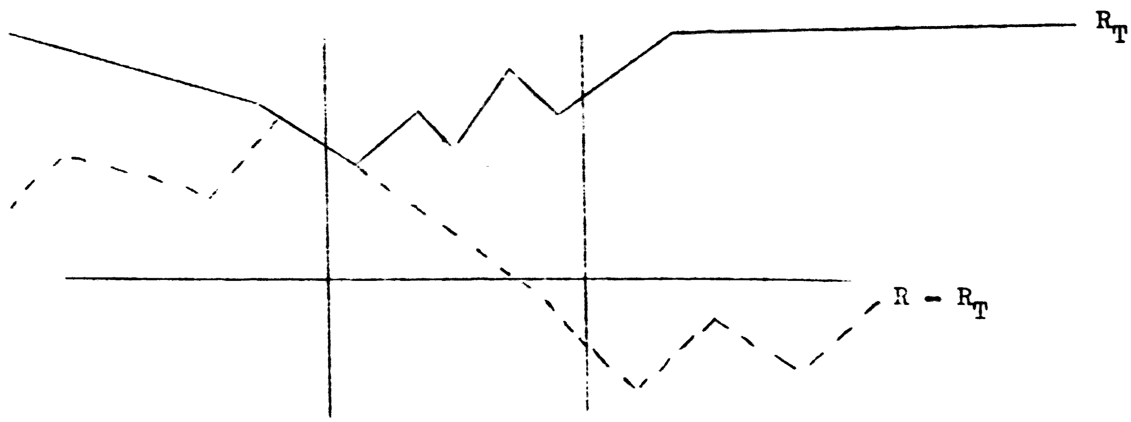
$$\|f\|_A \geq \sup[\exp(-v(f\ ,\ m))\ ,\ \exp(-v(f\ ,\ M))] = \|f\|_{CT} \geq \|f\|_A .$$

LEMME 2. - Soit $R \in K(A)$; R_T la somme des parties singulières de R relatives au trou T (id est : $R - R_T$ est sans pôle dans T). Alors, $\|R_T\|_{CT} \leq \|R\|_A$.

Les notations sont les mêmes que celles du lemme 1. Notons que $R_T(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

Démonstration.

1er cas : il existe un voisinage de m sur lequel : $v(R_T\ ,\ \mu) = v(R - R_T\ ,\ \mu)$. On a le graphe ci-après.



Alors : $v(R , M) = \min [v(R_T , M) , v(R - R_T , M)]$ (car ces deux derniers nombres sont différents).

De plus,

$$v(R , m) \geq v(R_T , m) = v(R - R_T , m) \geq v(R - R_T , M)$$
$$v(R - R_T , M) \geq v(R , M)$$

Donc

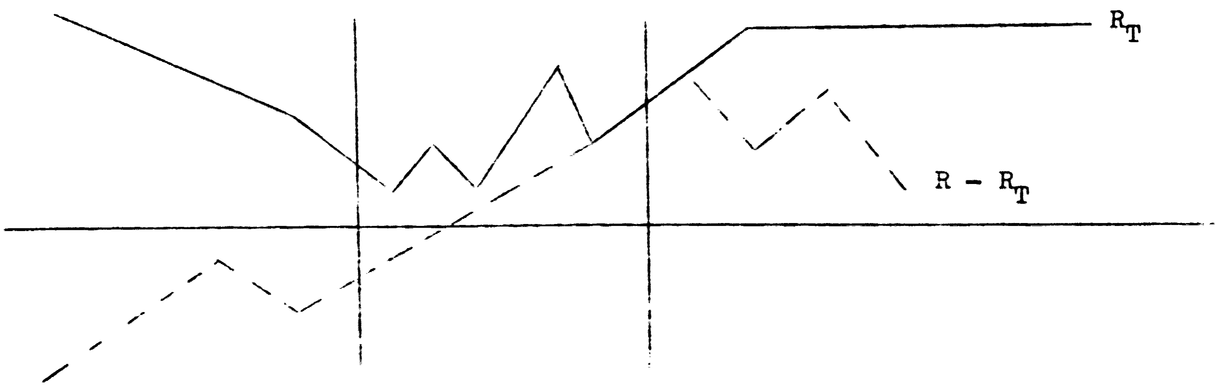
$$\|R\|_A = \sup[\exp(-v(R,m)) , \exp(-v(R,M))] = \exp(-v(R,M)) \geq \sup[v(R_T,M),v(R_T,m)] .$$

D'où

$$\|R\|_A \geq \|R_T\|_T .$$

2e cas : il existe un voisinage de M sur lequel : $v(R_T , \mu) = v(R - R_T , \mu)$.

La démonstration est la même que la précédente, à partir du graphe ci-dessous.



3e cas : on n'est dans aucun des cas précédents.

Alors

$$v(R , m) = \min [v(R_T , m) , v(R - R_T , m)]$$
$$v(R , M) = \min [v(R_T , M) , v(R - R_T , M)]$$

Soit

$$\sup\left[\exp(-v(R, m)), \exp(-v(R, M))\right] \geq \|R_T\|_A = \|R_T\|_T .$$

Or

$$\|R\|_A = \sup\left[\exp(-v(R, m)), \exp(-v(R, M))\right] .$$

Donc

$$\|R\|_A \geq \|R_T\|_T .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse 3e cycle, Math., Bordeaux 1970 (multigraphié).

[2] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbre de Banach ultramétrique", Astérisque, 1973, n° 10, p. 1-107.

(Texte reçu le 28 juillet 1975)

Bernard RANDÉ
ENS de Saint-Cloud
2 avenue Pozzo di Borgo
92211 SAINT-CLOUD