PHILIPPE ROBBA

Prolongement des solutions d'une équation différentielle p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. nº 11, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A8_0>

Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, A. ESCASSUT, P. ROBBA)
1973/74, n° 11, 3 p.

18 mars 1974

PROLONGEMENT DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE p-ADIQUE

par Philippe ROBBA

On démontre que si l'équation différentielle $Lu = f$, linéaire, à coefficients polynomiaux, a une solution u, élément analytique dans une classe résiduelle, et si f admet un prolongement analytique dans presque toutes les classes résiduelles, alors u a un prolongement analytique dans presque toutes les classes résiduelles.

1. NOTATIONS. - K désigne un corps valué non archimédien, complet et algébriquement clos. On note $\mathfrak{a}$ l'anneau de valuation de K, et k le corps résiduel de K.

Si $P \in K[X]$, on pose $|P| = \sup_{x \in \mathfrak{a}} P(x)$; si $R = P/Q \in K(X)$, on pose

$$|R| = |P|/|Q| .$$

C'est la norme de Gauss. On notera E le complété de $K(X)$ pour cette norme.

Soit A un sous-ensemble de K formé d'une réunion de classes résiduelles (on considèrera $\complement\mathfrak{a}$ comme la classe résiduelle du point ∞). Un <u>élément analytique</u> sur A est la limite, pour la norme de Gauss, d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A. Si A contient toutes les classes résiduelles, sauf un nombre fini, on dira que A est <u>admissible</u>. Un élément analytique sur un ensemble admissible sera dit admissible.

2. THEORÈME. - <u>Soit</u> L <u>un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans</u> $K[X]$. <u>Soit</u> $u \in E$ <u>tel que</u> Lu <u>soit admissible</u>. <u>Alors</u> u <u>est admissible</u>.

En particulier, si u est un élément analytique sur une classe résiduelle, et si Lu est admissible, u se prolonge analytiquement dans presque toutes les classes résiduelles.

(La démonstration originale a été simplifiée suivant une suggestion de DWORK.)

<u>Démonstration</u>. - Soit $L = \sum_{i=1}^{n} a_i D^i$, $a_i \in K[X]$. Posons

$$m(L) = \max_i (\deg a_i - i) .$$

(i) Supposons que $m(L) \leq 0$. D'après le théorème de Mittag-Leffler [1], si $v \in E$, on a la décomposition unique

$$v = v_\infty + \sum_{\alpha \in k} v_\alpha ,$$

où v_∞ est un élément analytique sur $\mathfrak{a}$, et v_α est un élément analytique dans le complémentaire de la classe α, nul à l'infini, la série convergeant dans E.

L'hypothèse faite sur Lu signifie que l'on a $(Lu)_\alpha = 0$ pour presque tous les

α .

D'autre part, la condition $m(L) \leq 0$ implique que, pour tout α , Lu_α (resp. Lu_∞) est un élément analytique sur le complémentaire de la classe α , nul à l'infini (resp. un élément analytique sur $\mathfrak{a}$).

L'unicité de la décomposition de Mittag-Leffler montre donc que

$$(Lu)_\infty = Lu_\infty ,$$

et

$$(Lu)_\alpha = Lu_\alpha , \quad \forall \alpha \in k .$$

Donc, pour presque tous les α , $Lu_\alpha = 0$. Comme les u_α non nuls sont linéairement indépendants (unicité de la décomposition), c'est qu'il y en a au plus n d'entre eux non nuls, avec n = degré de L . Ceci montre que u est admissible.

(ii) Supposons que $m(L) > 0$. Posons $L_1 = D^m L$. Alors $m(L_1) = 0$. De plus, $L_1 u = D^m(Lu)$ est admissible. On déduit alors de (i) que u est admissible.

3. REMARQUE. - La démonstration donne une estimation du nombre de classes résiduelles où u ne se prolonge pas : u se prolonge dans toutes les classes résiduelles où Lu se prolonge sauf dans au plus $n + M$ d'entre elles, avec $n = \deg L$ et $M = \max(m(L) , 0)$.

4. PROBLÈMES.

4.1: La démonstration utilise de façon essentielle le fait que les coefficients de L sont des polynômes. Le résultat du théorème est-il encore valable si l'on suppose seulement que les coefficients de L sont admissibles ?

On possède une réponse partielle à cette question [2]. Si L a ses coefficients admissibles, et a un 0-noyau au point générique t (cette condition est explicitée dans [3], elle est un peu plus restrictive que l'hypothèse pour L d'être injectif dans E), alors, si f est admissible, l'équation $Lu = f$ possède une, et une seule, solution u dans E , et u est admissible.

4.2: Les conclusions du théorème subsistent-elles encore si l'on ne suppose plus que L est linéaire, mais que Lu est un polynôme en x , u , u' , ... , $u^{(n)}$?

Une réponse positive à cette question permettrait de résoudre la conjecture 5.12 de [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ROBBA (P.). - Fonction analytique sur les groupes valués ultramétriques complets. "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, n° 10, 1973, p. 109-218.

[2] ROBBA (P.). - On the index of p-adic differential operators, II (à paraître).

[3] ROBBA (P.). - Indice d'un opérateur différentiel, groupe de travail d'analyse ultramétrique, 1973/74, n° 2, 14 p.

[4] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, groupe de travail d'analyse ultramétrique, 1973/74, n° 1, 15 p.

(Texte reçu le 14 mai 1974)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS