DANIEL BARSKY

Mesures p-adiques à densité 2

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. nº 9, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A6_0>

Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, A. ESCASSUT, P. ROBBA)
1973/74, n° 9, 5 p.

25 février 1974

MESURES p-ADIQUES À DENSITÉ 2

par Daniel BARSKY

On montre que les mesures à densité ne forment pas une sous-algèbre de convolution de l'algèbre de convolution des mesures p-adiques sur $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$.

<u>Notations</u>. - $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{R}$ ont leur signification habituelle. Soient $\underset{\sim}{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, $\underset{\sim}{Q}_p$ son corps des fractions, $\underset{\sim}{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$ muni de la norme ultramétrique prolongeant celle de $\underset{\sim}{Q}_p$ normalisée par $|p| = p^{-1}$. Soient $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p) = \mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$ muni de la norme de la convergence uniforme sur $\underset{\sim}{Z}_p$ notée $|.|$, $\mathcal{C}'$ le dual de $\mathcal{C}$ muni de la norme habituelle notée $\|.\|$, si $\mu \in \mathcal{C}'$,

$$\|\mu\| = \sup_{f\in\mathcal{C}-\{0\}}(|(\mu|f)|/|f|)$$

(où l'on note $(\mu|f)$ l'action de μ sur f).

On notera $\ell(x)$ la partie entière de $(\log(x))/\log(p)$ où $x \in R$. Bien entendu, p est un nombre premier. On note $\varphi_n \in \mathcal{C}$ la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(n , \ell(n) + 1)$ de centre $n \in \underset{\sim}{N}$ et de rayon $p^{-\ell(n)-1}$, et $\psi_{x,h} \in \mathcal{C}$ la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x , h)$ de centre $x \in \underset{\sim}{Z}_p$ et de rayon p^{-h} . On note enfin $\mathcal{A}$ l'espace des fonctions analytiques bornées sur la boule unité ouverte $\mathcal{B}$ de $\underset{\sim}{C}_p$ muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}$ notée $\|.\|$.

1. Lien entre mesures et fonctions analytiques sur $\mathcal{B}$.

Nous poserons les définitions suivantes :

<u>Définition</u> 1 [2]. - Une mesure est un élément de $\mathcal{C}'$.

<u>Définition</u> 2 [2]. - Une mesure μ est à densité sur $\underset{\sim}{Z}_p$ si, pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p$, il existe $d_\mu(x) \in \underset{\sim}{C}_p$ tel que $\lim_{h\to+\infty}(\mu|\varphi_{x,h}) = d_\mu(x)$. $d_\mu(x)$ est la densité de μ au point x .

<u>Définition</u> 3 [2]. - Si μ et ν sont 2 mesures, leur produit tensoriel est la forme linéaire sur $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p) \times \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p) \simeq \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p^2 , \underset{\sim}{C}_p)$, définie par

$$(\mu \otimes \nu|f.g) = (\mu|f)(\nu|g) ,$$

et prolongée par continuité sur $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p^2 , \underset{\sim}{C}_p)$.

<u>Définition</u> 4 [2]. - Soient μ et ν deux mesures, leur produit de convolution $\mu * \nu$ est défini par $(\mu * \nu|f) = (\mu \otimes \nu|\tilde{f})$, où $\tilde{f}(x , y) = f(x + y)$.

Soit $\theta_X(x)$ $(X \in \mathcal{B}$ et $x \in \underset{\sim}{Z}_p)$ la fonction de $\mathcal{B}\times\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, définie par

$$\theta_X(x) = 1 + X\binom{x}{1} + \dots + X^n\binom{x}{n} + \dots , \text{ où } \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} ,$$

on posera $Q_n(x) = \binom{x}{n}$.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ <u>un élément de</u> $\mathfrak{A}$. <u>Il existe un isomorphisme d'espaces de Banach</u> π <u>entre</u> $\mathfrak{A}$ <u>et</u> $\mathcal{C}'$ <u>tel que, si</u> $\pi(F) = \mu_F$, <u>alors</u> $(\mu_F|Q_n) = a_n$ <u>pour</u> $n \geq 0$, <u>et</u> $(\mu_F|\theta_X) = F(X)$ <u>pour tout</u> $X \in \mathfrak{B}$.

On sait que, si $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, alors $\sup_{n\geq 0} |a_n| = \|F\|$, et qu'il existe une unique mesure μ_F telle que $(\mu_F|Q_n) = a_n$ pour tout $n \geq 0$ [6]. On a aussi

$$(\mu_F|\theta_X) = (\mu_F|\sum_{n\geq 0} Q_n X^n) = \sum_{n\geq 0}(\mu_F|Q_n) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n ,$$

d'où la proposition.

$\mathfrak{A}$ est en fait une algèbre de Banach pour le produit ordinaire des fonctions, de même le produit de convolution fait de $\mathcal{C}'$ une algèbre de Banach.

PROPOSITION 2. - <u>L'application</u> π , <u>définie à la proposition</u> 1, <u>est un isomorphisme d'algèbre de Banach entre</u> $\mathfrak{A}$ <u>et</u> $\mathcal{C}'$.

Il reste à montrer que $\pi(F.G) = \mu_F * \mu_G$, donc que, pour tout $X \in \mathfrak{B}$,

$$(\mu_F * \mu_G|\theta_X) = (F.G)(X) = F(X)\ G(X)$$

or

$$(\mu_F * \mu_G|\theta_X) = (\mu_F \otimes \mu_G|\tilde{\theta}_X) \text{ , où } \tilde{\theta}_X(x\ ,\ y) = \theta_X(x + y) = \theta_X(x)\ \theta_X(y) ,$$

donc $(\mu_F * \mu_G|\theta_X) = (\mu_F|\theta_X)(\mu_G|\theta_X) = F(X)\ G(X)$; d'où la proposition.

PROPOSITION 3. - <u>On a la formule suivante</u> :

$$(\mu * \nu|\psi_{n,h}) = \sum(\mu|\psi_{k,h})(\nu|\psi_{j,h})$$

<u>la sommation étant étendue aux indices</u> k <u>et</u> j <u>tels que</u> $0 \leq k$, $j < p^h$ <u>et</u> $|k + j - n| \leq p^{-h}$.

Soient F et G les images de μ et ν par π^{-1} . On a

$$F(X) = \sum_{k=0}^{p^h-1}(\mu|\psi_{k,h})(1+X)^k + (1-(1+X)^{p^h})F_h(X) \text{ , où } F_h \in \mathfrak{A} \text{ et } \|F_h\| \leq \|\mu\| ,$$

$$G(X) = \sum_{j=0}^{p^h-1}(\nu|\psi_{j,h})(1+X)^j + (1-(1+X)^{p^h})G_h(X) \text{ , où } G_h \in \mathfrak{A} \text{ et } \|G_h\| \leq \|\nu\| .$$

(pour la démonstration, cf. [3] ou [5].) On a alors

$$(F.G)(X) = \sum_{n=0}^{p^h-1} \sum_{j,k}(\mu|\psi_{k,h})(\nu|\psi_{j,h})(1 + X)^n + (1 - (1 + X)^{p^h})R_h(X)$$

la deuxième sommation porte sur j et k tels que $0 \leq k$, $j < p^h$ et $|k + j - n| \leq p^{-h}$, $R_h \in \mathfrak{A}$, et $\|R_h\| \leq \|F\|.\|G\|$. On remarque, en effet, d'une part que

$$(1 + X)^{p^h+m} = (1 + X)^m - (1 - (1 + X)^{p^h})(1 + X)^m ,$$

et d'autre part on a le lemme suivant :

LEMME. - <u>Soit</u> $F \in \mathfrak{A}$, <u>soit</u> $\mu_F = \pi(F) \in \mathcal{C}'$. <u>Soit</u> $F_h(X) = \sum_{j=0}^{p^h-1} b_{j,h}(1+X)^j$.

Pour que l'on ait $b_{j,h} = (\mu_F|\psi_{j,h})$ pour $0 \leq j \leq p^h - 1$, il faut et il suffit qu'il existe une application g_h de $\mathcal{B}$ dans $\underset{\sim}{C}_p$ telle que

$$|F(X) - F_h(X)| \leq |(1 - (1 + X)^{p^h})g_h(X)| .$$

S'il en est ainsi $g_h \in \mathcal{A}$, et $\|g_h\| \leq \|F\|$.

Pour la démonstration, voir [3].

On conclut alors, avec le lemme, que

$$(\mu * \nu|\psi_{n,h}) = \Sigma(\mu|\psi_{k,h})(\nu|\psi_{j,h})$$

la sommation portant sur k et j tels que $0 \leq k$, $j < p^h$ et $|k+j-n| \leq p^{-h}$. La proposition 3 est démontrée.

2. Construction d'une mesure à densité.

Soient $M^+ = \{x \in \underset{\sim}{Z}_p \ ; \ x = p^n \ , \ n > 0\}$, $M^- = \{x \in \underset{\sim}{Z}_p \ ; \ x = - p^n \ , \ n > 0\}$, $M = M^+ \cup M^-$. Soit f l'application de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, définie par

$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin M , \quad f(x) = 1 \text{ si } x \in M^+ , \quad f(x) = - 1 \text{ si } x \in M^- .$$

Nous allons montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Il existe une mesure à densité sur $\underset{\sim}{Z}_p$, μ , telle que, pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p$,

$$\lim_{h\to+\infty}(\mu|\psi_{x,h}) = d_\mu(x) = f(x) .$$

Considérons la quantité suivante : $D(x , \ell , h) = \Sigma_i f(p^i) + \Sigma_j f(- p^j)$ les sommations portant sur les indices i et $j \in \underset{\sim}{N}$ tel que $1 \leq i$, $j \leq \ell$, $p^i \in \mathcal{B}(x , h)$ et $- p^j \in \mathcal{B}(x , h)$. Montrons que $\lim_{\ell\to+\infty} D(x , \ell , h)$ existe pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p$. Si $0 \notin \mathcal{B}(x , h)$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices k tels que p^k ou $p^{-k} \in \mathcal{B}(x , h)$, donc $D(x , \ell , h)$ est stationnaire pour ℓ assez grand. En particulier, si $x = + p^n$ ou $- p^n$, alors

$$\lim_{\ell\to+\infty} D(x , \ell , h) = + 1 \text{ ou } - 1 \quad (n < h) ,$$

si $|x \pm p^n| < p^{-h}$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, alors

$$\lim_{\ell\to+\infty} D(x , \ell , h) = 0 .$$

Si $0 \in \mathcal{B}(x , h)$, tous les points p^n et $- p^n$ se trouvent dans $\mathcal{B}(x , h)$ pour $n \geq h$ et, par conséquent,

$$\lim_{\ell\to+\infty} D(x , \ell , h) = 0$$

car $D(x , \ell , h) = 0$ pour $\ell \geq 1$. Posons $(\mu|\psi_{x,h}) = \lim_{\ell\to+\infty} D(x , \ell , h)$, il est clair que ceci définit une mesure sur $\mathcal{C}$. Montrons que cette mesure est à densité sur $\underset{\sim}{Z}_p$. Il faut donc montrer que, pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p$, il existe $d_\mu(x)$ tel que

$$\lim_{h\to+\infty}(\mu|\psi_{x,h}) = \lim_{h\to+\infty} \lim_{\ell\to+\infty} D(x , \ell , h) = d_\mu(x) .$$

Si $x \notin M$, $x \neq 0$, il existe h_0 tel que, pour $h \geq h_0$, aucun point de M n'appartienne à $\mathcal{B}(x , h)$, donc, pour $h \geq h_0$, $D(x , \ell , h) = 0$ et donc, dans ce cas, $\lim_{h\to+\infty}(\mu|\psi_{x,h}) = 0$. Si $x \in M$, il existe h_0 tel que pour $h \geq h_0$, x soit le seul point de M dans $\mathcal{B}(x , h)$, donc, pour $h \geq h_0$, $D(x,\ell,h) = 1$ ou -1 , et donc

$$\lim_{h\to+\infty}(\mu|\psi_{x,h}) = 1 \text{ ou } -1 \text{ suivant que } x \in M^+ \text{ ou } M^- .$$

Si $x = 0$, alors $(\mu|\psi_{x,h}) = 0$ pour tout h , et donc

$$\lim_{h\to+\infty}(\mu|\psi_{x,h}) = 0 .$$

On a donc bien montré que μ est à densité sur $\underset{\sim}{Z}_p$ et que $d_\mu = f$.

THÉORÈME 2. - Soit μ la mesure définie au théorème 1. $\mu * \mu$ n'est pas à densité en 0 .

En effet,

$$(\mu * \mu|\psi_{0,h}) = \sum(\mu|\psi_{k,h})(\mu|\psi_{j,h})$$

la sommation portant sur k et j vérifiant $0 \leq k , j < p^h$ et $|k + j| \leq p^{-h}$; donc

$$(\mu * \mu|\psi_{0,h}) = \sum_{0\leq k<p^h}(\mu|\psi_{k,h})(\mu|\psi_{p^h-k,h}) + (\mu|\psi_{0,h})^2 .$$

Si $k \neq p^n$ $(n < h)$, alors

$$(\mu|\psi_{k,h}) = (\mu|\psi_{p^h-k,h}) = 0 \quad \text{si} \quad k = p^n ,$$

alors $(\mu|\psi_{p^n,h}) = -(\mu|\psi_{p^h-p^n}) = 1$, donc $(\mu * \mu|\psi_{0,h}) = -2h$. Or $2h$ n'a pas de limite p-adique lorsque h tend vers $+\infty$, donc $\mu * \mu$ n'est pas à densité en 0 .

COROLLAIRE. - Les mesures à densité ne forment pas une sous-algèbre de convolution de C' .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[2] AMICE (Y.). - Mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, exposé n° 16, 6 p.

[3] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques et prolongement analytique, Thèse Sc. math. Univ. Paris-7, 1974.

[4] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques à densité, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 15e année, 1973/74, exposé n° 4, 6 p.

[5] LAZARD (M.). - Les zéros d'une fonction analytique. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 14, p. 47-76).

[6] SERRE (J.-P.). - Espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 21 juin 1974)

Daniel BARSKY
36 rue de Penthièvre
75008 PARIS