DIAGRAMMES

R. GUITART
C. LAIR

Limites et co-limites pour représenter les formules

Diagrammes, tome 7 (1982), exp. nº 4, p. GL1-GL24
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1982__7__A4_0>

© Université Paris 7, UER math., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Diagrammes, Vol. 7 , 1982.

LIMITES ET CO-LIMITES POUR REPRESENTER LES FORMULES

R. Guitart et C. Lair

Introduction.

Soit L un langage classique et T une théorie du premier ordre classique, décrite dans le langage de L .
Nous établissons au §1 que les groupoïdes respectifs des intèrprètations ensemblistes de L et des modèles de T sont des groupoïdes esquissables au sens de C. Ehresmann. En particulier, ceci signifie que les modèles de T sont des structures esquissables.
En théorie usuelle des modèles, si l'on sait évidemment définir canoniquement les isomorphismes entre modèles de T , on ne possède pas de définition générale des homomorphismes entre ces modèles (sauf à particulariser T , par exemple en supposant qu'elle est algébrique = équationnelle). Nous montrons au §1 que de l'esquissabilité des modèles de T résultent des procédés systématiques de définition (et donc d'étude) des homomorphismes entre ces modèles. Ce point de vue est celui de (R.M.S.S.): les morphismes d'une catégorie de modèles sont, eux-aussi, des structures qu'il convient donc d'esquisser également. Ainsi, une catégorie de modèles est esquissable à l'aide d'une co-catégorie interne à la catégorie des esquisses.

Les intèrpètations ensemblistes d'un langage L sont esquissables. Les intèrprètations ensemblistes des formules

classiques écrites avec L le sont également: par des sur-esquisses de l'esquisse décrivant L . Une combinaison booléenne de ces formules possède donc une esquisse qui est une "combinaison booléenne" des sur-esquisses précédentes. Nous établissons au §2 qu'une telle situation se systématise: la catégorie des "sur-esquisses" (appelées précisément //L//-esquisses au §2) d'une esquisse donnée //L// - jouant le rôle d'un langage de base - possède au moins un calcul fonctoriel booléen (ou propositionnel). Par réalisations (i. e. par intèrprètations) ensemblistes, ces calculs fonctoriels booléens fournissent:

- le calcul booléen classique (intersection, complémentaire) sur les groupoïdes d'isomorphismes entre les structures ainsi esquissées,
- un calcul "booléen" non classique sur les catégories d'homomorphismes entre ces structures esquissées.

Au §3 nous donnons d'autres démonstrations des résutats obtenus aux §§1 et 2 et quelques précisions techniques. Cependant, il convient de noter qu'on y ébauche une procédure de traduction entre:

- les systèmes de ré-écriture d'une formule classique en une formule équivalente de forme donnée,
- certains calculs fonctoriels - i. e. certaines logiques - sur la catégorie des esquisses.

Le §0 est consacré à des rappels de terminologie et notations.

0. Terminologie. Notations.

On dit que //S// = (S, $\mathbb{P}$, Π) est une esquisse (mixte) si, et seulement si (voir (E.T.S.A.)):

- S est un graphe multiplicatif petit,
- $\mathbb{P}$ est un ensemble de cônes projectifs de bases petites, dis-

tingués dans $\underline{S}$,

- Π est un ensemble de cônes inductifs de bases petites, distingués dans $\underline{S}$.

Lorsque l'ensemble des cônes inductifs distingués est vide, on dit qu'il s'agit d'une esquisse <u>projective</u> que l'on note alors, plus simplement, $/\underline{S}/$.
Si $//\underline{S}//$ est une esquisse, on notera $//\,/\underline{S}/\,// = (\underline{S}, \mathbb{P}', \Pi')$ les esquisses telles que $\mathbb{P}' \supset \mathbb{P}$ et $\Pi' \supset \Pi$.
Enfin, une esquisse telle que $(\underline{S},\emptyset,\emptyset)$ sera identifiée à $\underline{S}$.

On dit que $//R//: //\underline{S}// \longrightarrow //\underline{S}'//$ est une <u>réalisation de</u> $//\underline{S}//$ <u>vers</u> $//\underline{S}'//$ si, et seulement si:

- $R: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ est un foncteur,

- l'image par R de tout cône distingué de $//\underline{S}//$ est un cône distingué de $//\underline{S}'//$.

Une réalisation ~~entre~~ esquisses projectives sera notée, plus simplement, $/R/: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$.
Esquisses et réalisations entre esquisses sont les objets et les morphismes de la <u>catégorie des esquisses</u> notée Esq .

Soit $//\underline{S}//$ une esquisse. On appelle simplement <u>réalisation de</u> $//\underline{S}//$, et l'on note $F: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$, tout foncteur $F: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ transformant les cônes distingués de $//\underline{S}//$ en des limites de Ens .
On note $\mathrm{réal}(//\underline{S}//)$ la classe de toutes les réalisations de $//\underline{S}//$. On désigne par $\mathrm{Réal}(//\underline{S}//)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont les objets sont ces réalisations. Enfin, on désigne par $\mathrm{GrRéal}(//\underline{S}//)$ le sous-groupoïde, plein, saturé par isomorphismes, de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont la classe d'objets est $\mathrm{réal}(//\underline{S}//)$; c'est donc aussi un sous-groupoïde, plein, saturé par isomorphismes, de $\mathrm{Réal}(//\underline{S}//)$.

Supposons que

$$//\underline{\$}//: \quad //\underline{S}_1// \underset{d}{\overset{c}{\rightrightarrows}} //\underline{S}_2// \xrightarrow[k]{} //\underline{S}_3//$$

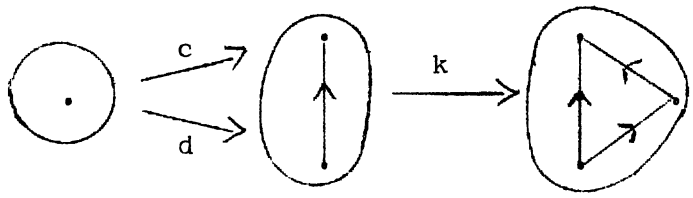
est une co-catégorie (resp. un co-groupoïde) interne à Esq ;
on en déduit une catégorie (resp. un groupoïde) ensembliste:

$$\text{réal}(//\underline{\$}//):\quad \text{réal}(//\underline{S}_1//) \underset{\text{réal}(d)}{\overset{\text{réal}(c)}{\leftleftarrows}} \text{réal}(//\underline{S}_2//) \xleftarrow{\text{réal}(k)} (\text{réal}(//\underline{S}_3//).$$

Une catégorie (resp. un groupoïde) $\underline{K}$ sera dite (resp. dit) <u>esquissable</u> si, et seulement si, $\underline{K}$ est équivalente (resp. équivalent) à une catégorie (resp. un groupoïde) réal(//$\underline{\$}$ //), où //$\underline{\$}$ // est une co-catégorie (resp. un co-groupoïde) interne à Esq .

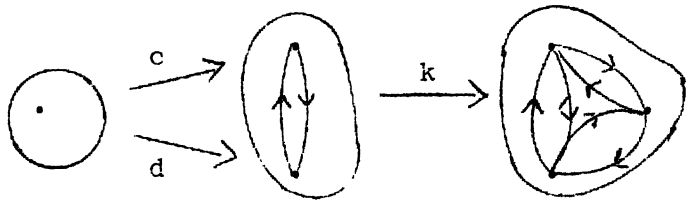
Plus précisément, $\underline{K}$ sera dite (resp. dit) <u>naturellement esquissable</u> si, et seulement si, $\underline{K}$ est équivalente (resp. équivalent) à une catégorie (resp. un groupoïde) réal(//$\underline{S}$ //$\boxtimes$ $\underline{\mathcal{Z}}$) (resp. réal(//$\underline{S}$ //$\boxtimes$ $\underline{\mathcal{Z}}^\wedge$) , où $\underline{\mathcal{Z}}$ (resp. $\underline{\mathcal{Z}}^\wedge$) est la co-catégorie (resp. le co-groupoïde) <u>canonique</u> interne à Esq suivant (voir aussi (E.G.C.E.)):

$\underline{\mathcal{Z}}$:



$\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$

(resp. $\underline{\mathcal{Z}}^\wedge$:



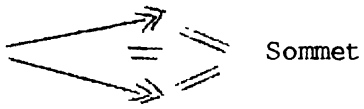
$\underline{1}^\wedge$ $\underline{2}^\wedge$ $\underline{3}^\wedge$).

Par exemple, la catégorie Réal(//$\underline{S}$ //) est naturellement esquissable puisque Réal(//$\underline{S}$ //) $\simeq$ réal(//$\underline{S}$ //$\boxtimes$ $\underline{\mathcal{Z}}$) . De même, le groupoïde GrRéal(//$\underline{S}$ //) est naturellement esquissable

puisque GrRéal(//$\underline{S}$ //) $\simeq$ réal(//$\underline{S}$ //$\times$ $\underline{2}^{\wedge}$).
(On pourra se reporter à (R.M.S.S.) pour d'autres exemples.)

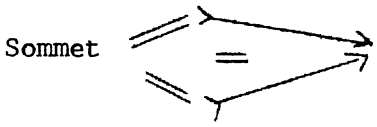
Dans la suite, nous aurons à construire et décrire certaines esquisses particulières. Nous le ferons brièvement à l'aide de diagrammes pour lesquels nous adopterons les conventions suivantes:

- le symbole $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow$ signifie que le cône suivant est distingué dans l'esquisse considérée:



même si le flèche en question n'est pas un épimorphisme dans le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse (mais elle doit donc être réalisée en un épi de Ens),

- le symbole $\rightarrowtail$ signifie, dualement, que le cône suivant est distingué



même si la flèche en question n'est pas un monomorphisme dans le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse (mais elle doit donc être réalisée en un mono de Ens),

- si $\underline{I}$ est une petite catégorie, le symbole

$$\begin{tikzcd} \varinjlim S_I = S & \\ & \cdots \; S_I \; \cdots \arrow[ul, "s_I"] \end{tikzcd}$$

signifie que le cône inductif considéré est distingué dans l'esquisse décrite, même s'il n'est pas limite inductive dans le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse utilisée (cependant, il doit être réalisé en une limite inductive de Ens),

- dualement, si $\underline{I}$ est une petite catégorie, le symbole

$$\varprojlim S_I = S \xrightarrow{p_I} \ldots \; S_I \; \ldots$$

signifie que le cône projectif considéré est distingué, même s'il n'est pas limite projective dans le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse décrite (mais il doit être réalisé en une limite projective de Ens),

- enfin, le symbole $\xrightarrow[f]{\sim}$ représente un couple de flèches $\underset{f'}{\overset{f'}{\rightleftarrows}}$ vérifiant $f.f' = Id$ et $f'.f = Id$.

1. <u>Esquissabilité des groupoïdes et des catégories de modèles de théories du premier ordre classique.</u>

Supposons que $L = (V,(F_n)_{n\in\underline{N}},(R_n)_{n\in\underline{N}})$ est un langage (au sens de (E.D.L.M.)) ayant V pour ensemble (infini) de variables et, pour tout $n\in\underline{N}$, ayant F_n (resp. R_n) pour ensemble de symboles fonctionnels (resp. relationnels) à n places.

Le groupoïde des bijections entre ensembles opère, évidemment, sur la classe int(L) des intèrprètations (ensemblistes) de L . Il en résulte un groupoïde d'hypermorphismes, noté GrInt(L) et appelé <u>groupoïde canonique des intèrprètations de L</u> .

Dans ces conditions, nous avons:

<u>Proposition 1.</u> <u>Le groupoïde canonique des intèrprètations d'un langage est un groupoïde naturellement esquissable.</u>

<u>Preuve.</u> Il suffit d'utiliser l'esquisse projective $/\underline{S}_L/$ briè-

vement décrite ci-dessous:

$$\begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ S & \xleftarrow[f]{} & S^n & \longleftarrow & G_r \\ & & \vdots & & \end{array}$$

(où $n \in \underline{N}$, f parcourt F_n et r parcourt R_n . //

Supposons, de nouveau, que L est un langage et, de plus, que θ est une formule booléenne de L , i. e. une combinaison booléenne (finitaire) de formules atomiques ne contenant que les seules variables $x_1, \ldots , x_p$ (où $p \in \underline{N}$).
Le groupoïde des bijections ensemblistes opère sur la classe $\mathrm{int}(\theta)$ des intèrprètations $I = (E,\Omega)$ (de support E et de graphe $\Omega \subset E^p$) de θ . Il en résulte un groupoïde d'hypermorphismes, noté $\mathrm{GrInt}(\theta)$ et appelé <u>groupoïde canonique des intèrprètations de θ</u> .
Il est facile de construire une sur-esquisse $//\underline{S}_\theta//$ de $/\underline{S}_L/$, contenant en particulier un monomorphisme distingué $g: G \rightarrowtail S^p$, de sorte que toute réalisation $F: //\underline{S}_\theta// \longrightarrow \mathrm{Ens}$ s'identifie à une intèrprètation $I = (F(S),F(G))$ et inversement. Autrement dit, on a:

<u>Proposition</u> 2. <u>Le groupoïde canonique des intèrprètations d'une formule booléenne est un groupoïde naturellement esquissable</u>.

Supposons, encore, que L est un langage et, de surcroit, que σ est une formule classique, i. e. une formule du premier ordre, de longueur finie, écrite avec un nombre fini de quantificateurs.
Le groupoïde des bijections ensemblistes opère, bien entendu, sur la classe $\mathrm{mod}(\sigma)$ des modèles de σ , i. e. des intèrprè-

tations de L qui satisfont σ . Il en résulte un groupoïde d'hypermorphismes, noté $\mathrm{GrMod}(\sigma)$ et appelé le <u>groupoïde canonique des modèles de</u> σ .

Dans ces conditions, montrons que:

<u>Proposition</u> 3. <u>Le groupoïde canonique des modèles d'une formule classique est un groupoïde naturellement esquissable.</u>

<u>Preuve</u>. La formule σ est équivalente à une formule classique prénexe, i. e. pouvant s'écrire:

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots \exists x_{2n} \ \theta(x_1, \ldots, x_{2n}) ,$$

où $n \in \underline{N}$ et θ est une formule booléenne.

Il suffit, alors, d'utiliser la sur-esquisse $//\underline{S}_\sigma//$ de $//\underline{S}_\theta//$, brièvement décrite ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "="] & S^{2n} \arrow[d, "p_{2n}"] & & \\
P_{2n-1} \arrow[r, tail] & S^{2n-1} \arrow[d, "p_{2n-1}"'] & = P_{2n-1} + P'_{2n-1} \arrow[d, phantom, "="] & P'_{2n-1} \arrow[l, tail] \arrow[d, two heads] \\
& S^{2n-2} & = P_{2n-2} + P'_{2n-2} & P'_{2n-2} \arrow[l, tail] \\
& \vdots & & \\
& \vdots & & \\
& S^{3} \arrow[d, "p_3"'] & = P_3 + P'_3 \arrow[d, phantom, "="] & P'_3 \arrow[l, tail] \arrow[d, two heads] \\
P_2 \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "="] & S^{2} \arrow[d, "p_2"] & = P_2 + P'_2 & P'_2 \arrow[l, tail] \\
P_1 \arrow[r, "\sim"] & S &&
\end{tikzcd}$$

. //

Supposons toujours que L est un langage et, maintenant, que T est une théorie du premier ordre classique, i. e. un ensemble de formules classiques de L .
Le groupoïde des bijections ensemblistes opère encore sur la classe mod(T) des modèles de T , i. e. des intèrprètations de L satisfaisant toutes les formules appartenant à T . On appelle donc groupoïde canonique des modèles de T et on note GrMod(T) le groupoïde d'hypermorphismes qui résulte de cette opération.
Dès lors, nous avons:

Théorème 1. Le groupoïde canonique des modèles d'une théorie du premier ordre classique est un groupoïde naturellement esquissable.

Preuve. Il suffit de considérer l'esquisse mixte $//\underline{S}_T//$, somme amalgammée au-dessus de $/\underline{S}_L/$, dans la catégorie Esq , des esquisses $//\underline{S}_\sigma//$, quand σ parcourt T . //

Notons que les esquisses $/\underline{S}_L/$, $//\underline{S}_\theta//$, $//\underline{S}_\sigma//$ ou $//\underline{S}_T//$ ne sont pas, a priori, les seules qui permettent d'esquisser naturellement les groupoïdes canoniques GrInt(L) , GrInt(θ) , GrMod(σ) , GrMod(T) .
Remarquons aussi que, dès lors que l'on sait esquisser naturellement, à l'aide d'une esquisse $//\underline{S}//$, les groupoïdes canoniques précédents, on dispose d'un moyen systématique pour définir des types d'isomorphismes (resp. d'homomorphismes) - non nécessairement canoniques - entre intèrprètations ou modèles de L , θ , σ ou T : ce sont les morphismes des groupoïdes (resp. des catégories) réal($//\underline{\$}//$) , où $//\underline{\$}//$ est un co-groupoïde (resp. une co-catégorie) de Esq dont l'objet des objet est l' esquisse $//\underline{S}//$.

2. Combinaisons booléennes d'esquisses.

Dans toute la suite de ce §2 , nous supposons que $//\underline{L}//$ est une esquisse fixée.

On dit que $$//\underline{L}// \xrightarrow[//R//]{} //\underline{S}// \xrightarrow[//Id_{\underline{S}}//]{} ///\underline{S}/ //$$
est une <u>esquisse de langage</u> $//\underline{L}//$ si, et seulement si:

- le foncteur $GrRéal(//R//): GrRéal(//\underline{S}//) \longrightarrow GrRéal(//\underline{L}//)$ est une équivalence,

(on pourrait imposer la condition plus forte:

- $Réal(//R//): Réal(//\underline{S}//) \longrightarrow Réal(//\underline{L}//)$ est une équivalence,

mais nous n'en avons pas l'utilité technique ici; on notera, cependant, que c'est bien cette dernière condition qui est vérifiée dans la pratique courante car:

- $//\underline{L}// = /\underline{L}/$ et $//\underline{S}// = /\underline{S}/$ sont purement projectives,
- $//R// \mp /R/ : /\underline{L}/ \longrightarrow /\underline{S}/$ et $///\underline{S}/ //$ sont construites à partir de la donnée de formules internes à $Réal(/\underline{L}/)$: ce sont justement les cônes inductifs distingués de $///\underline{S}/ //$ qui ont pour images, par le plongement de Yoneda

$$\underline{S}^{op} \longrightarrow Réal(/\underline{S}/) \simeq Réal(/\underline{L}/) \quad ,$$

ces formules internes (consulter (C.M.C.F.))).

Dans ce cas, si aucune ambiguïté n'est possible sur $//R//$, nous dirons plus simplement que $/ //\underline{S}///$ est une $//\underline{L}//$-<u>esquisse</u>

Si $///\underline{S}/ //$ est une $//\underline{L}//$-esquisse, le groupoïde $GrRéal(///\underline{S}/ //)$ est évidemment équivalent à un sous-groupoïde $\underline{G}$ de $GrRéal(//\underline{L}//)$ saturé par isomorphismes. Le sous-groupoïde complémentaire de $\underline{G}$ dans $GrRéal(//\underline{L}//)$ sera noté $\neg GrRéal(///\underline{S}/ //)$ et appelé <u>groupoïde complémentaire canonique</u> du groupoïde des réalisations de la $//\underline{L}//$-esquisse $///\underline{S}/ //$.

Etablissons que:

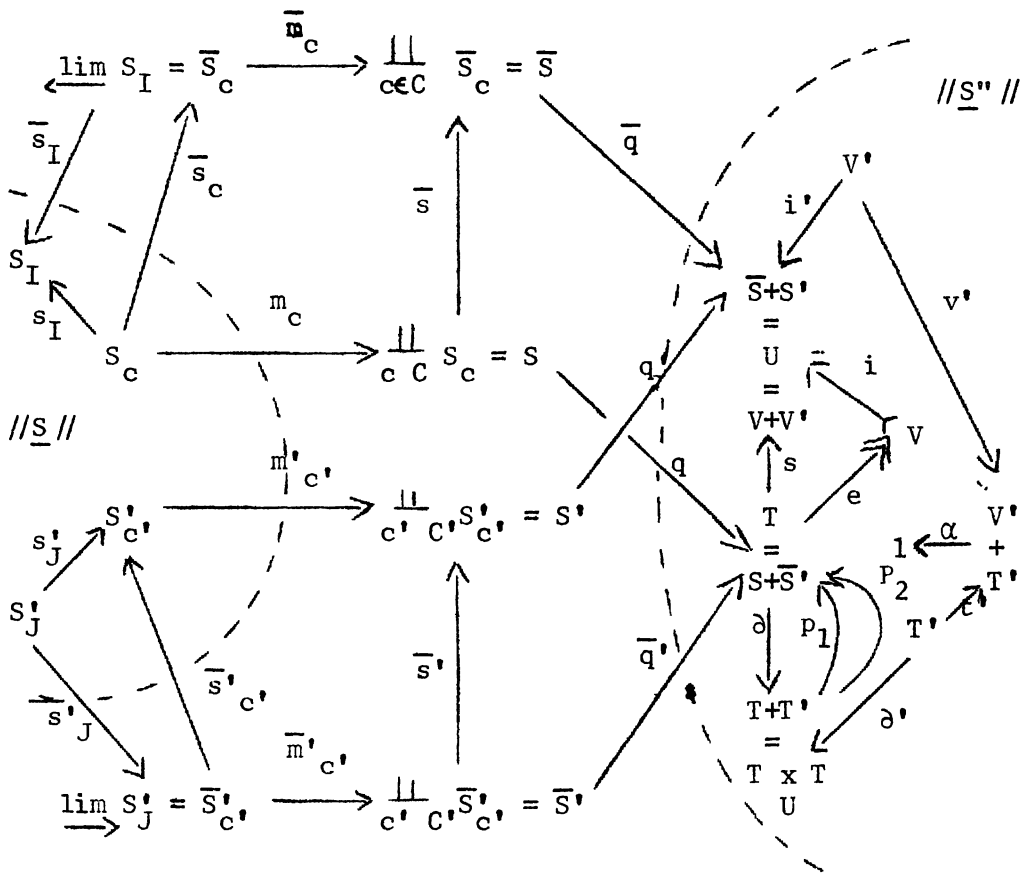
<u>Proposition</u> 4. <u>Le groupoïde complémentaire canonique du groupoïde des réalisations d'une</u> $//\underline{L}//$-<u>esquisse est un groupoïde</u>

naturellement esquissable.

Preuve. Décrivons une $//\underline{L}//$-esquisse $///\underline{S}'///$ telle que GrRéal($///\underline{S}'///$) soit équivalent au groupoïde complémentaire canonique considéré.

La sous-esquisse $//\underline{S}'//$ de $///\underline{S}'///$ contient $//\underline{S}//$ comme sous-esquisse, elle est construite à partir de $//\underline{S}//$ par adjonction de flêches et cônes distingués supplémentaire que l'on précise brièvement par le diagramme ci-dessous et les équations qui le suivent, où C (resp. C') désigne l'ensemble - éventuellement vide - des cônes projectifs (resp. inductifs) $c = (s_I : S_c \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$

(resp. $c' = (s'_J : S'_J \longrightarrow S'_{c'})_{J \in \underline{J}}$) distingués dans $///\underline{S}///$ mais non dans $//\underline{S}//$:



- pour tout $c \in C$ et tout $I \in \underline{I}$, on a $\bar{s}_I . \bar{s}_c = s_I$,
- pour tout $c' \in C'$ et tout $J \in \underline{J}$, on a $\bar{s}'_{c'} . \bar{s}'_J = s'_J$,
- pour tout $c \in C$, on a $\bar{m}_c . \bar{s}_c = \bar{s} . m_c$,
- pour tout $c' \in C'$, on a $\bar{m}'_{c'} . \bar{s}'_{c'} = \bar{s}' . \bar{m}'_{c'}$,
- $\bar{q} . \bar{s} = s . q$ et $q' . \bar{s}' = s . \bar{q}'$,
- $i . e = s$ et $p_1 . \partial = p_2 . \partial = Id_T$.

Il est immédiat de constater que la réalisation

$$//R'//: \ //\underline{L}// \xrightarrow[//R//]{} //\underline{S}// \hookrightarrow //\underline{S}'//$$

induit bien une équivalence entre les groupoïdes GrRéal($//\underline{L}//$) et GrRéal($//\underline{S}'//$).

Pour obtenir $///\underline{S}'/ //$, il suffit alors de distinguer α comme épi.

On conclut facilement en constatant qu'une réalisation

$$F: \ ///\underline{S}'/ // \longrightarrow \text{Ens}$$

(qui transforme nécessairement α en une surjection) ne peut transformer s en une bijection. En conséquence, il existe bien un élément c de C ou c' de C' tel que $F(c)$ ou $F(c')$ n'est pas une limite. //

Si $(///\underline{S}_i/ //)_{i \in I}$ est une famille de $//\underline{L}//$-esquisses, le groupoïde GrRéal($///\underline{S}_i/ //$) est, pour chaque $i \in I$, quivalent à un sous-groupoïde $\underline{G}_i$ de GrRéal($//\underline{L}//$) saturé par isomorphismes. L'intersection de ces sous-groupoïdes est encore un sous-groupoïde de GrRéal($//\underline{L}//$) saturé par isomorphismes. Nous poserons

$$\bigcap_{i \in I} \underline{G}_i = \bigwedge_{i \in I} \text{GrRéal}(///\underline{S}_i/ //)$$

et nous l'appellerons <u>groupoïde conjonction canonique des groupoïdes de réalisations de la famille</u> $(///\underline{S}_i/ //)_{i \in I}$.

Montrons, maintenant, que:

<u>Proposition</u> 5. <u>Le groupoïde conjonction canonique des groupoïdes de réalisations d'une famille de</u> $//\underline{L}//$<u>-esquisses est un groupoïde naturellement esquissable.</u>

<u>Preuve</u>. Il suffit d'utiliser la $//\underline{L}//$-esquisse $///\underline{S}/\,//$ définie comme suit:

- la sous-esquisse $//\underline{S}//$ de $///\underline{S}/\,//$ est la somme amalgammée, au-dessus de $//\underline{L}//$, dans la catégorie Esq , des $//\underline{S}_i//$ représentée ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} & //\underline{S}_i// \arrow[dr, "//Q_i//"] & \\ //\underline{L}// \arrow[ur, "//R_i//"] \arrow[rr, "//R// = //Q_i//\,.\,//R_i//"'] & & //\underline{S}// \end{tikzcd} ,$$

- $///\underline{S}/\,//$ est la somme amalgammée, au-dessus de $//\underline{L}//$, dans la catégorie Esq , des $///\underline{S}_i/\,//$ représentée ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} & ///\underline{S}_i/\,// \arrow[dr] & \\ //\underline{L}// \arrow[ur, "//Id_{\underline{S}_i}//\,.\,//R_i//"] \arrow[rr, "///R'/\,//"'] & & ///\underline{S}'/\,// \end{tikzcd}$$

(on constate que ceci définit bien une esquisse de langage $//\underline{L}//$:

$$\begin{tikzcd} //\underline{L}// \arrow[r, "//R//"] \arrow[rr, bend right, "///R'/\,// = //Id_{\underline{S}}//\,.\,//R//"'] & //\underline{S}// \arrow[r, "//Id_{\underline{S}}//"'] & ///\underline{S}'/\,// = ///\underline{S}/\,// \end{tikzcd}$$

car le foncteur "graphe multiplicatif sous-jacent" commute aux sommes amalgammées). //

Supposons, maintenant, que:

- $P((x_i)_{1 \leq i \leq n})$ est une formule purement booléenne, i. e. est écrite à l'aide des variables $x_1, \ldots, x_n$ et des seuls symboles $\neg$ et $\wedge$,

- $(///\underline{S}_i/\,//)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de $//\underline{L}//$-esquisses.

Chacun des groupoïdes GrRéal($///\underline{S}_i/\,//$) est équivalent à un sous-groupoïde de GrRéal($//\underline{L}//$) , saturé par isomorphismes, auquel nous l'identifions. Dans ces conditions, nous notons $P((\text{GrRéal}(///\underline{S}_i/\,//))_{1 \leq i \leq n})$ le sous-groupoïde de GrRéal($//\underline{L}//$), saturé par isomorphismes, dont les objets sont les réalisations $F: //\underline{L}// \longrightarrow \text{Ens}$ telles que soit vraie la proposition $P((F \in \text{réal}(///\underline{S}_i/\,//)_{1 \leq i \leq n})$. Ce sous-groupoïde est alors appelé <u>groupoïde canonique d'intèrprètation de</u> P <u>par les réalisations de la famille</u> $(///\underline{S}_i/\,//)_{1 \leq i \leq n}$.

Des propositions 4 et 5 résulte immédiatement:

<u>Théorème</u> 2. <u>Le groupoïde canonique d'intèrprètation d'une formule purement booléenne par les réalisations d'une famille de $//\underline{L}//$-esquisses est un groupoïde naturellement esquissable.</u>

Les constructions utilisées dans les démonstrations précédentes et la "combinaison booléenne" de ces constructions que l'on utilise pour établir le théorème 2 fournissent, à partir des $//\underline{L}//$-esquisses initialement données,d'autres $//\underline{L}//$-esquisses que nous pouvons noter respectivement:

$$\neg ///\underline{S}/\,// \;,\quad \bigwedge_{i\in I} ///\underline{S}_i/\,// \quad \text{et} \quad P((///\underline{S}_i/\,//)_{1\leq i\leq n}).$$

Ainsi, sont définis des opérateurs sur la classe $//\underline{L}//$-esq des $//\underline{L}//$-esquisses. Ils se prolongent, évidemment, en autant de foncteurs sur la catégorie -que l'on définit facilement - $//\underline{L}//$-Esq des $//\underline{L}//$-esquisses:

$$\neg : //\underline{L}//\text{-Esq} \longrightarrow //\underline{L}//\text{-Esq} \;,$$

$$\bigwedge_{i\in I} : (//\underline{L}//\text{-Esq})^I \longrightarrow //\underline{L}//\text{-Esq} \;,$$

$$P : (//\underline{L}//\text{-Esq})^n \longrightarrow //\underline{L}//\text{-Esq} \;.$$

On dispose donc d'un <u>calcul fonctoriel booléen</u> (ou <u>propositionnel</u>) sur la catégorie des $//\underline{L}//$-esquisses.

Remarquons qu'un tel calcul n'est pas unique, au même titre

que la $//\underline{L}//$-esquisse $\neg\,///\underline{S}/\,//$ (resp. $\bigwedge_{i\in I} ///\underline{S}_i/\,//$) précédente n'est pas, en général, la seule telle que:

$$\mathrm{GrRéal}(\neg\,///\underline{S}/\,//) \simeq \neg\,\mathrm{GrRéal}(///\underline{S}/\,//)$$

$$(\text{resp. } \mathrm{GrRéal}(\bigwedge_{i\in I} ///\underline{S}_i/\,//) \simeq \bigwedge_{i\in I} \mathrm{GrRéal}(///\underline{S}_i/\,//)\ ).$$

Il y aurait donc lieu d'analyser chacun de ces calculs foncto-riels et de les comparer.

Notons qu'un <u>système naturel</u> (en $//\underline{L}//$) de calculs fonctoriels booléens sur les catégories $//\underline{L}//$-Esq (quand $//\underline{L}//$ varie dans Esq) permet de définir un calcul booléen (ou propositionnel) sur les catégories esquissables.

Supposons, en effet, que:

$$//\underline{\mathbb{L}}//:\ //\underline{L}_1// \rightrightarrows //\underline{L}_2// \longrightarrow //\underline{L}_3//$$

est une co-catégorie interne à Esq . Alors, on appelle $//\underline{\mathbb{L}}//$-<u>cocatégorie interne à</u> Esq un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
//\underline{\mathbb{L}}// \arrow[d, "//\mathbb{R}//"'] & : & //\underline{L}_1// \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & //\underline{L}_2// \arrow[r] \arrow[d] & //\underline{L}_3// \arrow[d] \\
//\underline{\mathbb{S}}// \arrow[d, "//\mathrm{Id}_{\underline{S}}//"'] & : & //\underline{S}_1// \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & //\underline{S}_2// \arrow[r] \arrow[d] & //\underline{S}_3// \arrow[d] \\
///\underline{\mathbb{S}}/\,// & : & ///\underline{S}_1/\,// \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & ///\underline{S}_2/\,// \arrow[r] & ///\underline{S}_3/\,//
\end{tikzcd}$$

vérifiant:

- chaque ligne est une co-catégorie interne à Esq ,
- chaque colonne $1 \leq p \leq 3$ est une $//\underline{L}_p//$-esquisse.

Dans ces conditions:

- si $///\underline{\mathbb{S}}/\,//$ est une $//\underline{\mathbb{L}}//$-co-catégorie interne à Esq , on

appelle <u>négation</u> de la catégorie esquissable réal($///\underline{\$}/ //$) , et l'on note $\neg$ réal($///\underline{\$}/ //$) , la catégorie esquissable réal($\neg ///\underline{\$}/ //$) (qui n'est pas, en général, "la catégorie complémentaire de réal($///\underline{S}/ //$) dans réal($//\underline{L}//$)"),

- si $(///\underline{\$}_i/ //)_{i\in I}$ est une famille de $//\underline{L}//$-co-catégories internes à Esq , on appelle <u>conjonction</u> des catégories esquissables $(\text{réal}(///\underline{\$}_i/ //))_{i\in I}$, et l'on note $\bigwedge_{i\in I}$ réal($///\underline{\$}_i/ //$), la catégorie esquissable réal($\bigwedge_{i\in I} ///\underline{\$}_i/ //$) (qui n'est pas, en général, "l'intersection des catégories réal($///\underline{\$}_i/ //$)").

3. <u>Compléments</u>.

Montrons en quoi le calcul fonctoriel booléen exhibé au §2 n'est pas unique.
Pour ce faire, explicitons, par exemple, une autre $//\underline{L}//$-esquisse $\neg' ///\underline{S}/ // \neq \neg ///\underline{S}/ //$ vérifiant encore:

$$\text{GrRéal}(\neg' ///\underline{S}/ //) \simeq \neg\,\text{GrRéal}(///\underline{S}/ //) .$$

On y parvient immédiatement en reprenant la preuve de la proposition 4 et en substituant, lors de la construction de $//\underline{S}'//$, à la sous-esquisse $//\underline{S}''//$ celle brièvement décrite par le diagramme et les conditions ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
(U \underset{T}{+} U) \underset{U}{\times} (U \underset{T}{+} U) = W + W' & & \\
(U + U) = W \arrow[u, bend left, "q_1"] \arrow[u, bend right, "q_2"'] \arrow[d, loop left, "s_1"] \arrow[d, loop right, "s_2"'] \arrow[d, "c"] & W' \arrow[ul, "d'"'] \arrow[d, "w'"] & \\
U & W' + T' \arrow[r, "\alpha'"'] & 1 \\
T \arrow[u, "s"] \arrow[d, loop left, "p_1"] \arrow[d, loop right, "p_2"'] \arrow[d, "\partial"] & T' \arrow[u, "t''"'] \arrow[dl, "\partial'"] & \\
(T \underset{U}{\times} T) = T + T' & &
\end{tikzcd}$$

- $q_1.d = q_2.d = Id_W$, $p_1.\partial = p_2.\partial = Id_T$, $c.s_1 = c.s_2 = Id_U$.

Donnons, maintenant, un exemple d'application des résultats du §2 , en particulier de celui de la proposition 4. Supposons que $\underline{L}$ est une catégorie petite et que $c = (p_I : G \longrightarrow G_I)_{I \in \underline{I}}$ est un cône projectif de $\mathrm{Ens}^{\underline{L}}$, de base <u>discrète</u> $\underline{I}$. On dit (voir (F.A.U.C.)) qu'un foncteur $F : \underline{L} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ <u>valide</u> c si, et seulement si:

$$(*_c) \ \forall f : G \longrightarrow F \ \exists I \in \underline{I} \ \exists g : G_I \longrightarrow F \quad (g.p_I = f) .$$

On note alors $\mathrm{val}(c)$ la classe des objets de $\mathrm{Ens}^{\underline{L}}$ validant c et $\mathrm{GrVal}(c)$ (resp. $\neg\mathrm{GrVal}(c)$) le sous-groupoïde plein, saturé par isomorphismes, de $\mathrm{Ens}^{\underline{L}}$ dont la classe d'objets est $\mathrm{val}(c)$ (resp. le complémentaire de $\mathrm{val}(c)$ dans $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}^{\underline{L}})$).
Dans ces conditions, nous avons:

<u>Proposition</u> 6. <u>Les groupoïdes</u> $\mathrm{GrVal}(c)$ <u>et</u> $\neg\mathrm{GrVal}(c)$ <u>sont des groupoïdes naturellement esquissables.</u>

<u>Preuve</u>. A tout objet $F : \underline{L} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{L}}$ associons sa catégorie d'hypermorphismes $H(F)$ et notons $\pi(F) : H(F) \longrightarrow \underline{L}$ le foncteur canonique de projection. On sait que le plongement de Yoneda $Y : \underline{L}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{L}}$ est dense. Autrement dit, on a:

$$F = \varinjlim \ (H(F)^{op} \xrightarrow[\pi(F)^{op}]{} \underline{L}^{op} \xrightarrow[Y]{} \mathrm{Ens}^{\underline{L}})$$

Notons $\underline{S}_{co}{}^{op}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{L}}$ dont les objets sont:

- les $Y(L)$, quand L est objet de $\underline{L}$,
- G sommet du cône c ,
- les G_I , quand I est objet de $\underline{I}$.

Désignons par $/\underline{S}_{co}/$ l'esquisse projective obtenue en dis-

tinguant dans $\underline{S}_{co}$ les limites projectives canoniques:

- $G = \varprojlim (H(G) \xrightarrow[\pi(G)]{} \underline{L} \xrightarrow[R_o]{} \underline{S}_{co}$,

- $G_I = \varprojlim (H(G_I) \xrightarrow[\pi(G_I)]{} \underline{L} \xrightarrow[R_o]{} \underline{S}_{co}$,

où $R_o : \underline{L} \longrightarrow \underline{S}_{co}$ est la restriction de Y^{op} .
Notons $\underline{S}_c$ le graphe multiplicatif obtenu en adjoignant à $\underline{S}_{co}$:

- un cône inductif $\overline{c} = (\overline{p}_I : G_I \longrightarrow \overline{G})_{I \in \underline{I}}$, de même base que c^{op} ,

- une flèche $h: \overline{G} \longrightarrow G$ telle que $p_I . h = \overline{p}_I$, pour tout objet I de $\underline{I}$.

Désignons par $//\underline{S}_c//$ la sur-esquisse de $/\underline{S}_{co}/$ obtenue en distinguant également le cône inductif $\overline{c}$. On en déduit une réalisation:

$$//R//: \underline{L} \xrightarrow[/R_o/]{} /\underline{S}_{co}/ \hookrightarrow //\underline{S}_c// \ .$$

Si $///\underline{S}_c/ //$ est la sur-esquisse de $//\underline{S}_c//$ obtenue en distinguant de plus h comme épi, il est alors clair que

$$\mathrm{GrVal}(c) \simeq \mathrm{GrRéal}(///\underline{S}_c/ //)$$

(voir aussi (C.M.C.F.)).
De plus, on constate immédiatement que:

$$\underline{L} \xrightarrow[//R//]{} //\underline{S}_c// \xrightarrow[//\mathrm{Id}_{\underline{S}_c}//]{} ///\underline{S}_c/ //$$

est bien une $\underline{L}$-esquisse. On conclut donc par application de la proposition 4.

Les constructions précédentes sont encore valables si on substitue à la catégorie petite $\underline{L}$ une esquisse projective $/\underline{L}/$ (car on dispose encore d'un "plongement de Yoneda" $\underline{L}^{op} \longrightarrow \mathrm{Réal}(/\underline{L}/)$ qui est toujours dense): à tout cône projectif - i. e. à toute formule interne - c de $\mathrm{Réal}(/\underline{L}/)$

est donc associée une $/\underline{L}/$-esquisse

$$/\underline{L}/ \longrightarrow //\underline{S}_c// \longrightarrow ///\underline{S}_c/// \ .$$

Plus généralement, si C est un ensemble de cônes projectifs à bases discrètes dans Réal($/\underline{L}/$) , on lui associe une $/\underline{L}/$-esquisse dite <u>externe</u>:

$$/\underline{L}/ \longrightarrow //\underline{S}_C// \longrightarrow ///\underline{S}_C/// \ .$$

Elle s'obtient par somme amalgammée au-dessus de $/\underline{L}/$, dans la catégorie Esq , des esquisses respectives $//\underline{S}_c//$ et $///\underline{S}_c///$ quand c parcourt C .

Dans ces conditions, les opérateurs négation $\neg$ et disjonction $\bigvee_{i\in I}$ sur les $/\underline{L}/$-esquisses externes se déduisent l'un de l'autre. En effet, on a:

$$- \bigvee_{i\in I} ///\underline{S}_{C_i}/// = \neg \Big(\underset{\substack{/\underline{L}/ \\ i\in I}}{+} \neg ///\underline{S}_{C_i}/// \Big) \ ,$$

$$- \neg ///\underline{S}_C/// = \bigvee_{\substack{C' \subset C \\ C' \neq \emptyset}} ///\underline{S}_{C'}/// \ , \text{ si l'on pose}$$

$$///\underline{S}_{C'}/// = \Big(\underset{\substack{/\underline{L}/ \\ c\in C-C'}}{+} ///\underline{S}_c/// \Big) \underset{/\underline{L}/}{+} \Big(\underset{\substack{/\underline{L}/ \\ c\in C'}}{+} ///\underline{S}_c/// \Big) \ ,$$

(où $\underset{/\underline{L}/}{+}$ désigne l'opération de somme amalgammée au-dessus de $/\underline{L}/$ dans la catégorie Esq).

Notons, enfin, qu'à toute esquisse $//\underline{L}//$ est canoniquement associée une $/\underline{L}/$-esquisse externe

$$/\underline{L}/ \longrightarrow //\underline{S}_C// \longrightarrow ///\underline{S}_C///$$

telle que les catégories Réal($///\underline{S}_C///$) et Réal($//\underline{L}//$) soient équivalentes:

- il suffit de poser $C = Y(C')$, où C' est l'ensemble des cônes distingués de $//\underline{L}//$ et $Y: \underline{L}^{op} \longrightarrow$ Réal($/\underline{L}/$) est

le plongement de Yoneda.

On peut démontrer la proposition 3 d'une autre manière que celle présentée au §1.

On sait (voir (C.Y.A.L.)) que toute formule classique d'un langage L est élémentairement équivalente à une formule de la forme:

$$(1) \quad \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots \exists x_{2n} D(x_1, \ldots, x_{2n}) ,$$

où D est de la forme:

$$\bigwedge_{i < z} (A_i \longrightarrow \bigvee_{j < p_i} B^i_j) ,$$

où les A_i sont des conjonctions de formules atomiques et les B^i_j sont des formules atomiques. Pour prouver la proposition 3 , il suffit donc de le faire pour des formules classiques de la forme (1).

Soit $/\underline{S}_L/$ l'esquisse projective associée (comme dans la preuve de la proposition 1) au langage L . Il est montré en (I.F.O.F.) que le groupoïde canonique des modèles $\mathrm{GrMod}(\sigma)$ d'une formule σ de la forme (1) est équivalent au sous-groupoïde plein, saturé par isomorphismes, de $\mathrm{Réal}(/\underline{S}_L/)$ ayant pour objets ceux de $\mathrm{Réal}(/\underline{S}_L/)$ <u>validant un certain arbre</u> . Pour établir la proposition 3, il suffit donc de prouver qu'un tel sous-groupoïde est naturellement esquissable, en précisant ce que l'on entend (en (I.F.O.F.)) par validation d'un arbre.

Notons M l'ensemble des mots finis, non vides, s'écrivant $m = m_1 m_2 \ldots m_z$ (on pose alors $z = \mathrm{long}\, m$) grâce à l'alphabet $\underline{N}^* = \{1,2, \ldots ,n, \ldots \}$. Munissons M de l'ordre défini comme suit:

- $m \leq m'$ si, et seulement si:

  + $\mathrm{long}\, m \leq \mathrm{long}\, m'$,

  + pour tout $i \leq \mathrm{long}\, m$, on a $m_i \leq m'_i$.

On appelle alors <u>arbre fini</u> toute partie finie A de M , sta-

ble par induction, i. e. vérifiant:

- " $m \leq m'$ dans M et m' appartient à A " implique " m appartient à A " .

A tout arbre fini A , on associe un graphe orienté, noté $\underline{A}$, défini comme suit:

- ses objets sont les éléments de A ,
- ses flêches sont les $s_{mn}: m \longrightarrow mn$ tels que:
  + m appartient à A ,
  + n appartient à $\underline{N}^*$,
  + le concaténé mn de m et n appartient à A .

Un <u>arbre</u> (<u>fini</u>) de Réal($/\underline{S}_L/$) est alors un homomorphisme de graphes orientés $a: \underline{A} \longrightarrow$ Réal($/\underline{S}_L/$) . On dit qu'un objet $F: /\underline{S}_L/ \longrightarrow$ Ens de Réal($/\underline{S}_L/$) <u>valide</u> l'arbre a si, et seulement si, il existe une stratégie gagnante pour le joueur J_0 , dans le jeu à deux joueurs J_0 et J_1 défini comme suit:

- au premier coup, J_1 choisit un $f_1: a(1) = a_1 \longrightarrow F$,
- au deuxième coup, J_0 choisit un couple (n_2, f_2) tel que:
  + le mot $1n_2$ appartient à A ,
  + $f_2: a_{1n_2} \longrightarrow F$,
  + $f_2 . a(s_{1n_2}) = f_1$,

...

- au $p^{\text{ième}}$ coup, $J_{p \bmod 2}$ choisit un couple (n_p, f_p) tel que:
  + le mot $1n_2n_3 \ldots n_{p-1}n_p$ appartient à A ,

$$+\ f_p : a_{1n_2\ldots n_p} \longrightarrow F\ ,$$

$$+\ f_p . a(s_{1n_2\ldots n_p}) = f_{p-1}\ ,$$

- le premier joueur qui ne peut jouer a perdu.

Montrons donc que le sous-groupoïde, plein, saturé par isomorphismes, noté GrVal(a) , de Réal($/\underline{S}_L/$) dont les objets sont ceux qui valident un arbre fini a est naturellement esquissable. Pour faire court, nous ne le prouvons que dans le cas particulier suivant (le cas général se traitant de manière analogue):

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} : \quad 1 \arrow[r, "s_{11}"] & 11 \arrow[r, "s_{112}"] \arrow[dr, "s_{111}"'] & 112 \arrow[r, "s_{1121}"] & 1121 \\
& & 111 &
\end{tikzcd}\ ,$$

l'image de $\underline{A}$ par a: $\underline{A} \longrightarrow$ Réal($/\underline{S}_L/$) étant notée:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "x_{11}"] & a_{11} \arrow[r, "x_{112}"] \arrow[dr, "x_{111}"'] & a_{112} \arrow[r, "x_{1121}"] & a_{1121} \\
& & a_{111} &
\end{tikzcd}\ ,$$

(et Y: $\underline{S}_L^{op} \longrightarrow$ Réal($/\underline{S}_L/$) désignant le "plongement" de Yoneda).

A tout objet F de Réal($/\underline{S}_L/$) est associée une catégorie d'hypermorphismes H(F) et un foncteur canonique de projection $\pi(F)$: H(F) $\longrightarrow \underline{S}_L$ tels que:

$$F = \varinjlim \left((H(F)^{op} \xrightarrow[\pi(F)^{op}]{} \underline{S}_L^{op} \xrightarrow[Y]{} \text{Réal}(/\underline{S}_L/) \right).$$

Notons $/\underline{S}/$ l'esquisse projective obtenue comme suit:

- $\underline{S}^{op}$ est la sous-catégorie pleine de Réal($/\underline{S}_L/$) dont les objets sont:

+ les $Y(S)$, si S est objet de $\underline{S}_L$,

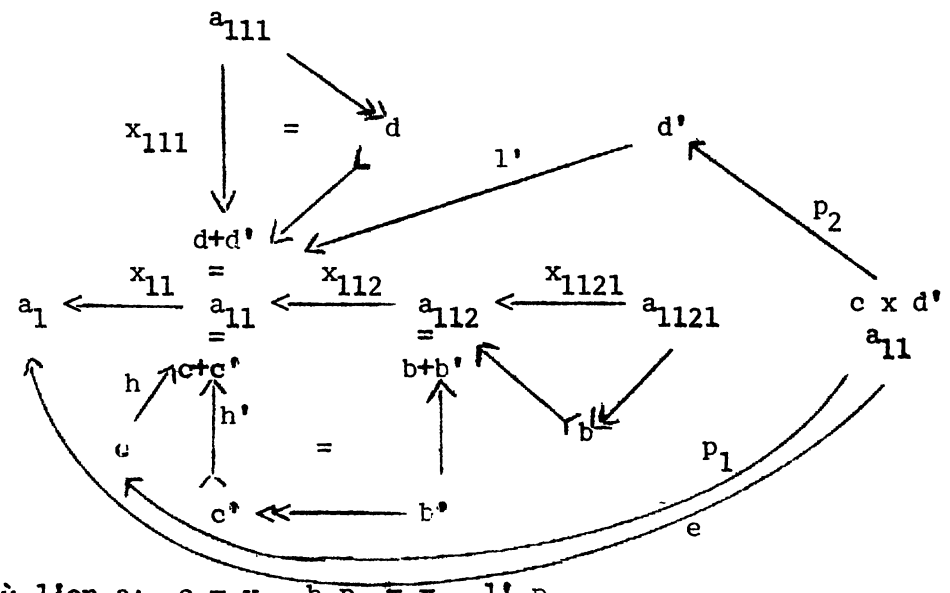
+ les a_m , si m est élément de A ,

- les cônes projectifs distingués de $/\underline{S}/$ sont:

+ les cônes projectifs images par $Y^{op}: \underline{S}_L \longrightarrow \underline{S}$ des cônes projectifs distingués de $/\underline{S}_L/$,

+ les limites projectives canoniques $a_m = \lim\limits_{\longleftarrow}(H(a_m) \xrightarrow[\pi(a_m)]{} \underline{S}_L \xrightarrow[Y^{op}]{} \underline{S})$ si m est élément de A .

Nous complètons alors $/\underline{S}/$ en une sur-esquisse $//\underline{S}'//$ en lui adjoignant le diagramme et les conditions suivantes:



où l'on a: $e = x_{11}.h.p_1 = x_{11}.l'.p_2$.

On vérifie bien alors que $\mathrm{GrRéal}(//\underline{S}'//) \simeq \mathrm{GrVal}(a)$.

Compte tenu des remarques et constructions précédentes, et avec une terminologie évidente, ceci établit que:

<u>Théorème</u> 3. <u>Les groupoïdes naturellement esquissables</u> (i. e. <u>de la forme</u> $\mathrm{GrRéal}(//\underline{S}//)$) <u>sont des groupoïdes canoniques de validation d'un ensemble de cônes projectifs à bases discrètes = formules internes = arbres de hauteur</u> 1 (<u>donnés</u>

dans Réal(/S/)) et inversement. De même, tout groupoïde naturellement esquissable est un groupoïde canonique de validation d'un ensemble d'arbres finis et inversement.

Bibliographie.

(C.M.C.F.) R. Guitart et C. Lair, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4 , Paris (1980).

(C.Y.A.L.) L. Henkin, J. Monk et A. Tarski, Cylindric algebras, Part I , North-Holland (1971).

(E.D.L.M.) G. Kreisel et J.-L. Krivine, Elements de logique mathématique, Dunod, Paris (1967).

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Mathématiques 23, Paris (1975).

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iaşi XIV (1968).

(F.A.U.C.) H. Andréka et I. Németi, Formulas and ultraproducts in categories, Beit. zur Alg. und Geom. 8 (1979).

(I.F.O.F.) H. Andréka et I. Németi, Injectivity in categories to represent all first order formulas I , Dem. Math. XII-3 (1979).

(R.M.S.S.) R. Guitart et C. Lair, Critères de rigidification des morphismes souples entre structures internes, Diagrammes 5, Paris (1981).