

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

JACQUES PENON

Approche polygraphique des ∞ -catégories non strictes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 40, n° 1 (1999), p. 31-80

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1999__40_1_31_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROCHE POLYGRAPHIQUE DES ∞ -CATEGORIES NON STRICTES

par Jacques PENON

ABSTRACT. We give a new definition of a non-strict ∞ -category, called Prolix. The prolixes are algebras for some monad built on the category of reflexive ∞ -graphs. That monad can be defined by a universal property which expresses the universal relaxation of the axioms of ∞ -categories. On the other hand, the building of this monad uses a 'polygraphical' material, obtained by logical technics.

Introduction.

● A ce jour plusieurs tentatives d'axiomatisation des ∞ -catégories non-strictes ont été proposées. A notre connaissance, il y a celle de Z. Tamsamani (voir [17]) avec ses n -nerfs généralisant la caractérisation simpliciale des catégories, celle de M.A Batanin avec les "weak ω -categories" qui utilise les opérades et les n -spans (voir [2] et [3]). (Ses travaux font suite à ceux de J. Baez et J. Dolan - voir aussi [1]). D'autres axiomatisations des ∞ -catégories ont été formulées (comme celle de M. Makkai, C. Hermida et J. Power) mais nous ne les connaissons pas encore.

En voici une nouvelle. Elle fut exposée en janvier 97 au S.I.C à Paris. Nous l'avons obtenue à l'aide d'une version personnelle des polygraphes : les systèmes cellulaires; mais elle peut se décrire avantageusement sans ce matériel (ce que nous faisons au cours du chapitre I).

● Notre axiomatisation part de la remarque suivante : les ∞ -catégories non-strictes généralisent les ∞ -catégories (strictes) en relâchant leurs axiomes. Nous voulons dire par là que, non seulement on a remplacé les identités de base entre n -cellules valables dans les ∞ -catégories, par la donnée de cellules d'ordre immédiatement supérieur "connectant" les n -cellules, mais encore qu'on a aussi relâché les axiomes de cohérence qu'il devait exister entre ces nouvelles cellules et ainsi de suite. Ces "identités de base" ou ces "axiomes de cohérence" ne sont pas simplement des égalités entre n -cellules dans la

structure considérée, puisqu'il faut aussi tenir compte du regroupement canonique que représentent ces n -cellules. Elles ne sont que l'expression dans l' ∞ -catégorie non-strict de n -cellules dans une "structure libre" où tout ces regroupements canoniques vivent naturellement. Avant donc de définir les ∞ -catégories non-strictes nous avons cherché de quelle structure libre il s'agissait. Parallèlement nous avons reconnu dans les "identités de base" ou dans les "axiomes de cohérence" des égalités entre ces regroupements canoniques après les avoir plongés dans l' ∞ -catégorie libre (engendrée par la structure considérée). Ce sont elles qui nous disent si dans toutes les ∞ -catégories de tels regroupements sont susceptibles d'être égaux. Enfin il faut aussi prendre en compte la fonction qui "pétrifie" les axiomes de cohérence (celle qui construit les $(n + 1)$ -cellules à partir des pré-supposés axiomes). Une telle fonction doit se trouver dans la structure libre cherchée puisque les regroupements canoniques peuvent contenir des cellules elles-mêmes obtenues par cette fonction. La partie délicate de notre travail a consisté en la mise en place et en la construction de cette structure libre.

Notre définition des ∞ -catégories non-strictes (que nous avons appelées ici "prolixes" pour les distinguer des autres définitions) apparaît ensuite naturellement. En effet, la "structure libre" obtenue engendre une monade sur la catégorie des ∞ -graphes réflexifs et il suffit d'en prendre ses algèbres pour répondre à la question. En fait, chronologiquement, nous avons d'abord construit cette monade avant de mettre au point la structure pour laquelle elle était universelle (alors que dans cet exposé, nous avons choisi l'ordre inverse par souci de clarté).

- Cette construction utilise un matériel polygraphique. Rappelons qu'Albert Burroni a introduit les "polygraphes" dans [8] (parallèlement R. Street définit les "parity complexes" (voir [16])). Ceux-ci, au départ, étaient destinés à donner des présentations des ∞ -catégories (il les utilise aussi maintenant à d'autres fins comme la réécriture et l'informatique). Ces polygraphes manipulent des expressions graphiques en dimension arbitraire ou encore des "regroupements de cellules" (en anglais "pasting") comme on en a parlé précédemment. Seulement A. Burroni le fait dans le cadre ∞ -catégorique ce qui, vu notre problématique, est à priori trop "strict" pour nous. D'autre part, les propriétés universelles dont il a recours ne nous renseignent pas sur la construction proprement dite des expressions graphiques qu'il manipule. Aussi avons nous opté pour une autre approche, plus descriptive, empruntée aux

techniques des logiciens. On a donc mis au point un calcul formel n -dimensionnel. Le chapitre II de cet article expose en détail les procédures de ce calcul formel (appelé ici : système cellulaire).

- Les systèmes cellulaires (comme les polygraphes qui les ont précédés) ont leur intérêt propre indépendamment de la recherche des ∞ -catégories non-strictes. On peut les voir aussi comme des lointains descendants des polyèdres de Poincaré et autre *cw*-complexes. Ils servent à modéliser toutes les formes géométriques possibles et contrairement aux ensembles simpliciaux n'ont pas recours à une forme géométrique privilégiée (minimale) permettant de les engendrer toutes par agrégation. Dans le cadre simplicial cette agrégation n'est d'ailleurs pas aussi claire qu'il paraît lorsqu'on ne veut pas se limiter aux constructions homologiques (elles sont bien trop abéliennes pour conserver tout leur contenu géométrique). En revanche, dans les systèmes cellulaires les agrégations, qui sont plutôt des compositions, n'entament en rien la description de ceux-ci et n'ont, a priori, pas de caractère abélien.

Remerciements :

Je remercie Madame EHRESMANN d'avoir accepté de publier ce texte dans les Cah. Top. Géo. Diff. Cat. , ainsi que J.M.CORDIER pour m'avoir permis d'accéder aux travaux de l'équipe australienne.

Mes remerciements vont aussi à A.BURRONI et D.BOURN pour les nombreuses discussions concernant le sujet exposé ici.

Enfin je tiens à remercier Monsieur P.J.AUBRY qui a tapé mon manuscrit, et surtout mon épouse qui, au cours des deux années particulièrement éprouvantes pendant lesquelles s'est effectué ce travail, n'a pas ménagé ses efforts pour m'aider et m'encourager.

Première partie : Les prolixes.

§1. Rappel : Les ∞ -catégories.

• Une **catégorie** est la donnée de $\mathbb{C} = (C_0, C_1, b, s, \iota, \circ)$ où :

- C_0 et C_1 sont des ensembles,
- $b, s : C_1 \rightrightarrows C_0$ et $\iota : C_0 \rightarrow C_1$ sont des applications,
- $\circ : \{(y, x) \in C_1 \times C_1 / s(y) = b(x)\} \rightarrow C_1$ est une application,
(l'image de (y, x) par $\circ$ est noté $y \circ x$)

Ces données sont liées par les propriétés suivantes :

(réflexivité) pour $x \in C_0$, $s\iota(x) = x = b\iota(x)$

(positionnement) Pour $y, x \in C_1$ tels que : $s(y) = b(x)$ alors :

$$b(y \circ x) = b(y) \quad , \quad s(y \circ x) = s(x)$$

(unité) Pour $x \in C_1$, $\iota b(x) \circ x = x$, $x \circ \iota s(x) = x$

(associativité) Pour $z, y, x \in C_1$ tels que : $s(z) = b(y)$, $s(y) = b(x)$, alors :

$$(z \circ y) \circ x = z \circ (y \circ x)$$

Exemples : Oublions la classe habituelle d'exemples de catégories, elle n'a pas beaucoup d'utilité ici.

1. Un ensemble ordonné est une catégorie (les flèches sont les paires d'éléments (y, x) où $y \geq x$)
2. Un monoïde est une catégorie (un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre).
3. Si $h : M \rightarrow M'$ est un homomorphisme de monoïde, on en fait une catégorie $\mathbb{C}$ en posant : $C_0 = M'$, $C_1 = M \times M'$, $s(m, m') = m'$, $b(m, m') = h(m)m'$, $\iota(m') = (e, m')$ où pour le monoïde M , on note e son élément neutre et on écrit multiplicativement sa loi de composition. La loi de composition de $\mathbb{C}$ est donnée par : $(m_1, m'_1) \circ (m_0, m'_0) = (m_1 m_0, m'_0)$ si $s(m_1, m'_1) = b(m_0, m'_0)$.
4. Si on dispose d'un graphe, c'est à dire de la donnée $\mathbb{G} = (G_0, G_1, b, s)$ où G_0 et G_1 sont des ensembles $b, s : G_1 \rightrightarrows G_0$ sont des applications, alors les "chemins" de $\mathbb{G}$ forment une catégorie (si $A, B \in G_0$,

un chemin de $A \rightarrow B$ est un triplet (B, S, A) où S est une suite finie (éventuellement vide) $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ d'éléments de G_1 vérifiant pour $n \geq 1$: $b(x_n) = B$, $s(x_1) = A$ et quelquesoit $i \in \{1, \dots, n-1\}$ $s(x_{i+1}) = b(x_i)$; et pour $n = 0$: $B = A$. Les chemins se composent par concaténation (ou juxtaposition), lorsqu'ils sont composables.

• Une **2-catégorie** est la donnée de :

$$\mathbb{D} = (((D_n)_{0 \leq n \leq 2}, (b_{pn}, s_{pn}, \iota_{np}, \circ_p^n)_{(p,n) \in L_2})$$

où $L_2 = \{(p, n) \in \{0, 1, 2\}^2 / p < n\}$ telle que :

0. Pour tout couple $(p, n) \in L_2$

$$\mathbb{D}_{pn} = (D_p, D_n, b_{pn}, s_{pn}, \iota_{np}, \circ_p^n),$$

est une catégorie.

Cette donnée doit, en plus, satisfaire les conditions suivantes :

1. Pour $x \in D_2$, $s_{01}s_{12}(x) = s_{01}b_{12}(x) = s_{02}(x)$,

$$b_{01}s_{12}(x) = b_{01}b_{12}(x) = b_{02}(x)$$

$$\text{Pour } y \in D_0, \iota_{21}\iota_{10}(y) = \iota_{20}(y)$$

2. Pour $y, x \in D_2$ tels que : $s_{02}(y) = b_{02}(x)$,

$$b_{12}(y \circ_0^2 x) = b_{12}(y) \circ_0^1 b_{12}(x) \quad , \quad s_{12}(y \circ_0^2 x) = s_{12}(y) \circ_0^1 s_{12}(x)$$

3. Pour $y', x', y, x \in D_2$ tels que : $s_{12}(y') = b_{12}(x')$, $s_{12}(y) = b_{12}(x)$,

$$s_{02}(x') = b_{02}(x),$$

$$(y' \circ_1^2 x') \circ_0^2 (y \circ_1^2 x) = (y' \circ_0^2 y) \circ_1^2 (x' \circ_0^2 x)$$

4. Pour $y, x \in D_1$ tels que : $s_{01}(y) = b_{01}(x)$,

$$\iota_{21}(y \circ_0^1 x) = \iota_{21}(y) \circ_0^2 \iota_{21}(x)$$

Pour simplifier on note : $s_p = s_{p(p+1)}$, $b_p = b_{p(p+1)}$, $\iota_p = \iota_{(p+1)p}$ pour $p \in \{0, 1\}$.

Exemples :

1. (a) La catégorie des petites catégories est en fait une 2-catégorie (les 2-cellules sont les transformations naturelles).
- (b) Si $\mathbb{V}$ est une catégorie monoïdale, la catégorie des $\mathbb{V}$ -catégories (petites) est aussi une 2-catégorie.
- (c) Si $\mathbb{C}$ est une catégorie à produits fibrés finis, la catégorie des catégories internes à $\mathbb{C}$ est une 2-catégorie.
- (d) Si $\mathbb{C}$ est une catégorie, la catégorie des catégories fibrées sur $\mathbb{C}$ est une 2-catégorie.

2. Si $\mathbb{C} = (C_0, C_1, b, s, \iota, \circ)$ est une catégorie, on peut la voir comme une 2-catégorie en posant $b_0 = b$, $s_0 = s$, $\iota_0 = \iota$, $\circ_0^1 = \circ$, $C_2 = C_1$, $b_1 = s_1 = \iota_1 = Id$, $\circ_1^2$ est trivial (i.e. $y \circ_1^2 x = x$), $\circ_0^2 = \circ$

3. Si $h : A \rightarrow B$ est un homomorphisme de monoïde commutatif, on en fait une 2-catégorie $\mathbb{C}$ en posant : $C_0 = \{0\}$, $C_1 = B$, $C_2 = A \times B$, $s_0 = b_0$ (évident), $s_1(a, b) = b$, $b_1(a, b) = h(a) + b$, $\iota_0(0) = 0$, $\iota_1(b) = (\circ, b)$

Les lois de composition sont données par : $b' \circ_0^1 b = b' + b$

$$(a', b') \circ_1^2 (a, b) = (a' + a, b) \text{ si } s_1(a', b') = b_1(a, b),$$

$$(a', b') \circ_0^2 (a, b) = (a' + a, b' + b)$$

4. Si $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{k} C$ est une paire d'homomorphismes de monoïde (composables) où A et B sont commutatifs tels que $kh = 0$

(i.e. $\text{Im } h \subset \ker k$) elle définit une structure de 2-catégorie en posant :

$$D_0 = C, D_1 = B \times C, D_2 = A \times B \times C,$$

$$s_0(b, c) = c, b_0(b, c) = k(b).c, \iota_0(c) = (0, c)$$

$$s_1(a, b, c) = (b, c), b_1(a, b, c) = (h(a) + b, c), \iota_1(b, c) = (0, b, c)$$

$$(b', c') \circ_0^1 (b, c) = (b' + b, c) \text{ si } s_0(b', c') = b_0(b, c)$$

$$(a', b', c') \circ_0^2 (a, b, c) = (a' + a, b' + b, c) \text{ si } s_{02}(a', b', c') = b_{02}(a, b, c)$$

$$(où s_{02} = s_0 s_1, b_{02} = b_0 b_1)$$

$$(a', b', c') \circ_1^2 (a, b, c) = (a' + a, b, c) \text{ si } s_1(a', b', c') = b_1(a, b, c)$$

Remarque : Nous n'avons pas parlé ici de la 2-catégorie des 2-chemins sur 2-graphe. Son existence, dans le cas réflexif, est donnée par la proposition 1 du §2, et on fera une construction explicite au chapitre II grâce aux systèmes cellulaires.

• Une ∞ -catégorie est la donnée de

$$\mathbb{K} = \left((K_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_{pn}, s_{pn}, \iota_{np}, \circ_p^n)_{(p,n) \in L} \right) \quad \text{où} \quad L = \left\{ (p, n) \in \mathbb{N}^2 / p < n \right\}$$

telle que :

Pour tout triplets $(p, q, n) \in \mathbb{N}^3$ où $p < q < n$, les données

$\mathbb{K}_{pqn} = \left((K_{p_i})_{0 \leq i \leq 2}, (b_{p_i p_j}, s_{p_i p_j}, \iota_{p_j p_i}, \circ_{p_i}^{p_j})_{(i,j) \in L_2} \right)$ soient des 2-catégories (où $p_0 = p$, $p_1 = q$, $p_2 = n$).

En d'autres termes cela signifie que $\mathbb{K}$ est la donnée :

- Pour chaque entier n d'un ensemble K_n ,
- Pour chaque couple d'entiers (p, n) où $p < n$, d'applications

$$b_{pn}, s_{pn} : K_n \rightrightarrows K_p, \quad \iota_{np} : K_p \rightarrow K_n$$

$$\text{et } \circ_p^n : \star_p K_n \rightarrow K_n$$

où $\star_p K_n = \{(y, x) \in K_n \times K_n / s_{pn}(y) = b_{pn}(x)\}$

Ces données devant satisfaire les propriétés suivantes :

1. pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, et :

$$(a) \text{ pour } x \in K_k, \quad s_{kn} \iota_{nk}(x) = b_{kn} \iota_{nk}(x) = x$$

$$(b) \text{ pour } y, x \in K_n, \text{ tels que } s_{kn}(y) = b_{kn}(x),$$

$$s_{kn}(y \circ_k^n x) = s_{kn}(x), \quad b_{kn}(y \circ_k^n x) = b_{kn}(y)$$

$$(c) \text{ pour } x \in K_n, \quad x \circ_k^n \iota_{nk} s_{kn}(x) = x, \quad \iota_{nk} b_{kn}(x) \circ_k^n x = x,$$

$$(d) \text{ pour } x, y, z \in K_n \text{ tels que : } s_{kn}(x) = b_{kn}(y), s_{kn}(y) = b_{kn}(z) :$$

$$x \circ_k^n (y \circ_k^n x) = (x \circ_k^n y) \circ_k^n z$$

2. pour $p, q, n \in \mathbb{N}$, $p < q < n$ et :

(a) pour $x \in K_n$

$$b_{pq}s_{qn}(x) = b_{pn}(x) = b_{pq}b_{qn}(x)$$

$$s_{pq}s_{qn}(x) = s_{pn}(x) = s_{pq}b_{qn}(x)$$

pour $y \in K_p$

$$\iota_{nq}\iota_{qp}(x) = \iota_{np}(x)$$

(b) pour $y, x \in K_n$, tels que $s_{pn}(y) = b_{pn}(x)$:

$$s_{qn}(y \circ_p^n x) = s_{qn}(y) \circ_p^q s_{qn}(x)$$

$$b_{qn}(y \circ_p^n x) = b_{qn}(y) \circ_p^q b_{qn}(x)$$

(c) pour $y', x', y, x \in K_n$ tels que :

$$s_{qn}(y') = b_{qn}(x'), \quad s_{qn}(y) = b_{qn}(x), \quad s_{pn}(x') = b_{pn}(x) :$$

$$(y' \circ_q^n x') \circ_p^n (y \circ_q^n x) = (y' \circ_p^n y) \circ_q^n (x' \circ_p^n x)$$

(d) pour $y, x \in K_q$, tels que $s_{pq}(y) = b_{pq}(x)$:

$$\iota_{nq}(y \circ_p^q x) = \iota_{nq}(y) \circ_p^n \iota_{nq}(x)$$

Remarque : Les propriétés (2.a) et (1.b) entraînent aussi que :

pour $p \leq q < n$ et $y, x \in K_n$ avec $s_{qn}(y) = b_{qn}(x)$ on a :

$$(2.b') \quad s_{pn}(y \circ_q^n x) = s_{pn}(x) \quad , \quad b_{pn}(y \circ_q^n x) = b_{pn}(x)$$

Comme pour les 2-catégories, on note : $s_p = s_{p(p+1)}$, $b_p = b_{p(p+1)}$,

$\iota_p = \iota_{(p+1)p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exemples :

1. On peut voir une 2-catégorie $((D_n)_{0 \leq n \leq 2}, (b_{pn}, s_{pn}, \iota_{np}, \circ_p^n)_{(p,n) \in L_2})$

comme une ∞ -catégorie en posant : $K_n = D_n$ si $0 \leq n \leq 2$ et $K_n = D_2$, $b_n = s_n = \iota_n = Id$ si $n \geq 2$ et $b_{pn} = b_p b_{p+1} \dots b_{n-1}$, $s_{pn} = s_p s_{p+1} \dots s_{n-1}$, $\iota_{np} = \iota_{n-1} \dots \iota_{p+1} \iota_p$ si $0 \leq p < n$ et enfin pour $y, x \in K_n$ tels que : $s_{pn}(y) = b_{pn}(x)$,

si $0 \leq p \leq 1$, $y \circ_p^n x = y \circ_p^2 x$ ($n \geq 2$)

si $1 < p$, $y \circ_p^n x = x$ (dans ce cas $y = x$)

2. (Voir [5]) Si $A_0 \xleftarrow{\partial_0} A_1 \xleftarrow{\partial_1} A_2 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} A_n \xleftarrow{\partial_n} \dots$ est un complexe de chaîne (dans $\mathbf{Ab}$), on en fait une ∞ -catégorie en posant :

$$K_n = A_n \times A_{n-1} \times \dots \times A_0$$

et pour $x = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) \in K_n$,

$$s_{pn}(x) = (x_p, \dots, x_0) \quad b_{pn}(x) = (\partial_p(x_{p+1}) + x_p, x_{p-1}, \dots, x_0)$$

$$\iota_{np}(x_p, \dots, x_0) = (0, \dots, 0, x_p, \dots, x_0)$$

et pour $y = (y_n, \dots, y_0)$, $x = (x_n, \dots, x_0)$, éléments de K_n tels que : $s_{pn}(y) = b_{pn}(x)$ on pose :

$$y \circ_p^n x = (y_n + x_n, \dots, y_{p+1} + x_{p+1}, x_p, \dots, x_0)$$

3. (Voir [15]) Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles où, pour $n \geq 1$, M_n est muni d'une structure de monoïde et où, pour $n \geq 2$, ils sont tous commutatifs.

On en fait une ∞ -catégorie en posant :

$$K_n = \{(y_k, x_k)_{k \leq n} \in \prod_{k=0}^n (M_k \times M_k) / y_n = x_n\}$$

et pour $p < n < m$, $\mu = ((y_k, x_k))_{k \leq n} \in K_n$, on pose :

$$b_{pn}(\mu) = ((y''_k, x''_k))_{k \leq p} \quad , \quad s_{pn}(\mu) = ((y'_k, x'_k))_{k \leq p} \quad ,$$

$$\iota_{mn}(\mu) = ((\bar{y}_k, \bar{x}_k))_{k \leq m}$$

si $k < p$ $y''_k = y'_k = y_k$, $x''_k = x'_k = x_k$

$$y''_p = x''_p = y_p, \quad y'_p = x'_p = x_p$$

et si $k \leq n$ $\bar{y}_k = y_k$ $\bar{x}_k = x_k$

si $k > n$ $\bar{y}_k = \bar{x}_k = 1$ (où 1 désigne l'élément neutre de M_k)

pour $\nu = ((d_k, c_k))_{k \leq n}$, $\mu = ((b_k, a_k))_{k \leq n}$ éléments de K_n , tels que :

$$s_{pn}(\nu) = b_{pn}(\mu) \text{ on pose : } \nu \circ_p^n \mu = ((f_k, e_k))_{k \leq n} \text{ où}$$

$$\text{si } k < p \quad (f_k, e_k) = (d_k, c_k) = (b_k, a_k)$$

$$\text{si } k = p \quad (f_p, e_p) = (d_p, a_p)$$

$$\text{si } k > p \quad (f_k, e_k) = (d_k \cdot b_k, c_k \cdot a_k)$$

(où le point est la loi de composition dans M_k)

Remarque : En fait l'exemple (2.) s'identifie à une sous- ∞ -catégorie de celle obtenue à partir de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dans (3.)).

• $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ étant deux ∞ -catégories on appelle **morphisme** (strict) $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ la donnée d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications $f_n : K_n \rightarrow K'_n$ satisfaisant les conditions suivantes :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. si $n \geq 0$ et $x \in K_{n+1}$ alors :

$$b_n f_{n+1}(x) = f_n b_n(x) \quad s_n f_{n+1}(x) = f_n s_n(x)$$

2. si $n \geq 0$ et $x \in K_n$ alors : $f_{n+1} \iota_n(x) = \iota_n f_n(x)$

3. si $0 \leq p < n$, $y, x \in K_n$ tels que : $s_{pn}(y) = b_{pn}(x)$ alors

$$f_n(y \circ_p^n x) = f_n(y) \circ_p^n f_n(x)$$

(cette définition a un sens car $s_{pn} f_n(y) = b_{pn} f_n(x)$, grâce au (1.))

• ∞ -catégories et morphismes (stricts) entre ∞ -catégories définissent une catégorie noté $\infty\text{-Cat}$.

§2. Les ∞ -graphes réflexifs.

• Les ∞ -catégories non-strictes et les ∞ -catégories strictes ont une base structurale commune que l'on pourrait qualifier de "positionnelle". C'est sur ce concept de base de nature uniquement "positionnelle", que nous appelons " ∞ -graphe réflexif", que nous allons nous appuyer pour aboutir à la formalisation des ∞ -catégories non-strictes.

• On appelle ∞ -graphe réflexif la donnée de $\mathbb{G} = ((G_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n, s_n, \iota_n)_{n \in \mathbb{N}})$ où, pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

- G_n est un ensemble,

- $b_n, s_n : G_{n+1} \rightrightarrows G_n$ et $\iota_n : G_n \rightarrow G_{n+1}$ sont des applications .

Ces données devant satisfaire les propriétés suivantes :

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $x \in G_n$, on a :

a) Si $n \geq 1$,

$$b_{n-1}b_n(x) = b_{n-1}s_n(x), \quad s_{n-1}b_n(x) = s_{n-1}s_n(x)$$

b) $b_n\iota_n(x) = s_n\iota_n(x) = x$

• pour $0 \leq p < n$, on pose

$$b_{pn} = b_p b_{p+1} \cdots b_{n-1}, \quad s_{pn} = s_p s_{p+1} \cdots s_{n-1}, \quad \iota_{np} = \iota_{n-1} \cdots \iota_{p+1} \iota_p \text{ et}$$

$$b_{nn} = s_{nn} = \iota_{nn} = Id_{G_n}$$

Pour $0 \leq q < p < n$, on a :

$$a') \quad b_{qp}b_{pn} = b_{qn} = b_{qp}s_{pn} \text{ et } s_{qp}b_{pn} = s_{qn} = s_{qp}s_{pn}$$

$$b'_0) \quad \iota_{np}\iota_{pq} = \iota_{nq}$$

et pour $0 \leq p \leq n$, on a :

$$b'_1) \quad b_{pn}\iota_{np} = Id_{G_p} = s_{pn}\iota_{np}$$

Exemples :

1. Evidemment les ∞ -catégories ont une structure sous-jacente d' ∞ -graphe réflexif.
2. Les graphes réflexifs sont des ∞ -graphes réflexifs, où un graphe réflexif est la donnée de (G_0, G_1, b, s, ι) où G_0, G_1 sont des ensembles, $b, s : G_1 \rightrightarrows G_0$, $\iota : G_0 \rightarrow G_1$ sont des applications telles que $b\iota = s\iota = Id_{G_0}$

(il suffit de compléter cette donnée en posant $G_n = G_1$ si $n > 1$ et $b_n = s_n = \iota_n = Id_{G_n}$ si $n \geq 1$ et $b_0 = b$, $s_0 = s$, $\iota_0 = \iota$)

En particulier un ensemble E muni d'une relation R réflexive (d'où le nom de graphe "réflexif") "est" un graphe réflexif. il suffit de poser $G_0 = E$, $G_1 = R$, b et s sont alors les projections et ι la diagonale.

3. Si $\mathbb{G} = ((G_n), (b_n, s_n, \iota_n))$ est un ∞ -graphe réflexif et $E = \{u, v\}$ un ensemble ayant au plus deux éléments. On construit un nouveau ∞ -graphe réflexif $\mathbb{G}' = ((G'_n), (b'_n, s'_n, \iota'_n))$ en posant $G'_0 = E$ et

$$G'_{n+1} = G_n \amalg E \text{ si } n \geq 1,$$

$b'_0, s'_0 : G'_1 \rightarrow G'_0$ sont définies par

$$b'_0(x, 0) = v, \quad b'_0(x, 1) = x, \quad s'_0(x, 0) = u, \quad s'_0(x, 1) = x, \quad \iota'_0(x) = (x, 1);$$

$$\text{et } b'_{n+1} = b_n \amalg Id_E, \quad s'_{n+1} = s_n \amalg Id_E, \quad \iota'_{n+1} = \iota_n \amalg Id_E \quad \text{si } n \geq 0.$$

4. (la sphère en dimension n) Ici l' ∞ -graphe réflexif est défini par :

$$G_p = \{0\} \text{ si } p < n, \quad G_p = \{0, 1\} \text{ si } p \geq n, \quad b_{n-1}(x) = s_{n-1}(x) = 0, \\ b_p(x) = s_p(x) = x \text{ si } p \neq n-1, \quad \iota_p(x) = x, \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

• De même qu'à tout graphe on associe la catégorie de ses chemins (voir le §1) - C'est tout simplement la catégorie libre sur ce graphe - de même à tout ∞ -graphe réflexif on associe une ∞ -catégorie libre. C'est ce qu'on va préciser maintenant.

• Si $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$ sont deux ∞ -graphes réflexifs, un morphisme $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}'$ est la donnée d'une suite d'applications $(f_n : G_n \rightarrow G'_n)$ satisfaisant :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. si $n \geq 1$ et $x \in G_n$,

$$b_{n-1}f_n(x) = f_{n-1}b_{n-1}(x) \quad s_{n-1}f_n(x) = f_{n-1}s_{n-1}(x)$$

2. si $n \geq 0$ et $x \in G_n$,

$$f_{n+1}\iota_n(x) = \iota_n f_n(x)$$

∞ -graphes réflexifs et morphismes entre ∞ -graphes réflexifs définissent une catégorie notée $\infty\text{-Grr}$.

Il y a, bien entendu, un foncteur d'oubli $U : \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Grr}$.

Proposition 1 : *Le foncteur U admet un adjoint à gauche (noté C)*

preuve : ∞ -catégories et ∞ -graphes sont projectivement esquissables (voir déf. dans [10]). Notons σ_1 et σ_0 leurs esquisses respectives.

Clairement σ_0 peut apparaître comme une sous-esquisse de σ_1 . Par suite le foncteur d'oubli qu'il induit $\text{Mod}(\sigma_1) \rightarrow \text{Mod}(\sigma_0)$ admet un adjoint à gauche (voir le théorème d'adjonction dans [11], [12], [7]). Ainsi U admet un adjoint à gauche puisque le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\sigma_1) & \longrightarrow & \text{Mod}(\sigma_0) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \infty\text{-Cat} & \longrightarrow & \infty\text{-Grr} \end{array}$$

Nous verrons au chapitre II que l'adjoint à gauche C peut se construire explicitement grâce à une double induction.

§3. ∞ -magmas et étirements.

• Allons un peu plus loin dans la description conjointe des ∞ -catégories strictes et non-strictes. Cette fois nous allons ajouter aux ∞ -graphes réflexifs des lois de composition présentes dans les deux structures d' ∞ -catégories strictes et non strictes. Puis nous conserverons les propriétés communes à ces deux structures. Elles sont, là encore, essentiellement "positionnelles". Appelons " ∞ -magma" le concept ainsi obtenu.

De façon précise :

- On appelle ∞ -magma la donnée :

$$\mathbb{M} = ((M_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n, s_n, \iota_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\circ_p^n)_{(n,p) \in L})$$

où :

1. $((M_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n, s_n, \iota_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est un ∞ -graphe réflexif.
2. $(\circ_p^n)_{(n,p) \in L}$ est une famille d'applications $\circ_p^n : \star_p M_n \rightarrow M_n$ ($\star_p M_n$ désignant l'ensemble $\{(y, x) \in M_n \times M_n / s_{pn}(y) = b_{pn}(x)\}$, rappelons aussi que L désigne l'ensemble $\{(p, n) \in \mathbb{N}^2 / p < n\}$).
Ces données étant astreintes à satisfaire les propriétés suivantes :
pour $p, q, n \in \mathbb{N}$, $p < n$, $q < n$ et $(c_1, c_0) \in \star_q M_n$ on a :

$$\begin{aligned} \text{si } p \leq q, \quad s_{pn}(c_1 \circ_q^n c_0) &= s_{pn}(c_0), \quad b_{pn}(c_1 \circ_q^n c_0) = b_{pn}(c_1) \\ \text{si } p > q, \quad b_{pn}(c_1 \circ_q^n c_0) &= b_{pn}(c_1) \circ_q^p b_{pn}(c_0) \\ s_{pn}(c_1 \circ_q^n c_0) &= s_{pn}(c_1) \circ_q^p b_{pn}(c_0) \end{aligned}$$

Exemples.

1. Les ∞ -catégories sont des ∞ -magmas.
2. Il y a deux autres exemples importants d' ∞ -magmas (qui ne sont pas des ∞ -catégories) ce sont :
 - (a) $\text{Span}(\underline{C})$ où $\underline{C}$ est une catégorie à produits fibrés finis et où $\text{Span}(\underline{C})_n$ est l'ensemble des n -spans sur $\underline{C}$
 - (b) $\prod(X)$ où X est un espace topologique et où $\prod(X)_n$ est l'ensemble des homotopies d'ordre n de X .

ces deux exemples sont assez long à développer et nous n'en donnerons pas la description ici. (pour plus de détails voir [6], [9], [3] et [2])

3. Nous verrons d'autres exemples d' ∞ -magmas au chapitre II avec les systèmes cellulaires stricts.
- $\mathbb{M}$ et $\mathbb{M}'$ étant deux ∞ -magmas, un morphisme (strict) d' ∞ -magma $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ est la donnée d'une suite d'applications $(f_n : M_n \rightarrow M'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $(f_n) : ((M_n), (b_n, s_n, i_n)) \rightarrow ((M'_n), (b'_n, s'_n, i'_n))$ est un morphisme d' ∞ -graphe réflexif.
2. pour $(p, n) \in L$ et $(c_1, c_0) \in \star_p M_n$ alors :

$$f_n(c_1 \circ_p^n c_0) = f_n(c_1) \circ_p^n f_n(c_0)$$

- Les morphismes entre ∞ -catégories sont évidemment des exemples de morphismes entre ∞ -magmas.
- Notons $\infty\text{-Mag}$ la catégorie des ∞ -magmas.

• Le but maintenant est de "relacher" les axiomes des ∞ -catégories (strictes) pour finalement pouvoir axiomatiser les " ∞ -catégories non-strictes". Pour

cela on a besoin ici d'un concept d'étirement. De façon informelle on cherche à transformer des égalités entre cellules en cellules de dimension supérieure.

• Un **étirement**¹ est la donnée : $\mathcal{E} = (\mathbb{M}, \mathbb{E}, \pi, ([,]_n)_{n \in \mathbb{N}})$ où :

- $\mathbb{M}$ et $\mathbb{E}$ sont deux ∞ -magmas,
- $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}$ est un morphisme d' ∞ -magmas,
- $([,]_n : \tilde{\mathbb{E}}_n \rightarrow \mathbb{E}_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications,

(où $\tilde{\mathbb{E}}_n = \{(c_1, c_0) \in E_n \times E_n / b_{n-1}(c_1) = b_{n-1}(c_0), s_{n-1}(c_1) = s_{n-1}(c_0) \text{ et } \pi_n(c_1) = \pi_n(c_0)\}$)

Ces données devant satisfaire les propriétés suivantes :

Pour $n \in \mathbb{N}$,

1. et pour $(c_1, c_0) \in \tilde{\mathbb{E}}_n$, $b_n([c_1, c_0]_n) = c_1$, $s_n([c_1, c_0]_n) = c_0$,
2. et pour $(c_1, c_0) \in \tilde{\mathbb{E}}_n$, $\pi_{n+1}([c_1, c_0]_n) = \imath_n \pi_n(c_1) = \imath_n \pi_n(c_0)$,
3. et pour $c \in \mathbb{E}_n$, $[c, c]_n = \imath_n(c)$.

Exemple (trivial). Si on prend $\mathbb{E} = \mathbb{M}$ et $\pi = Id_{\mathbb{M}}$ alors :

$(c_1, c_0) \in \tilde{\mathbb{E}}_n \Leftrightarrow c_1 = c_0$ et dans ce cas on est contraint de poser :

$$[c_1, c_0]_n = [c_0, c_0]_n = \imath_n(c_0) \quad (= \imath_n(c_1))$$

On dit alors que cet étirement est l'étirement trivial sur $\mathbb{M}$.

• Un morphisme d'étirements $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est un couple (m, e) de morphismes d' ∞ -magmas $m : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$, $e : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ faisant commuter le carré suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{e} & \mathbb{E}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{m} & \mathbb{M}' \end{array}$$

et tel que : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(c_1, c_0) \in \tilde{\mathbb{E}}_n$, $e_{n+1}([c_1, c_0]_n) = [e_n(c_1), e_n(c_0)]_n$.
Notons $\mathbb{E}t$ la catégorie des étirements.

• Considérons aussi la catégorie $Pret$ qui a :

¹Cette terminologie a été trouvée conjointement avec F. Metayer

- pour objets, les triplets $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \gamma)$ où $\mathbb{M}$ est un ∞ -magma, $\mathbb{G}$ est un ∞ -graphe réflexif et $\gamma : \mathbb{G} \rightarrow V(\mathbb{M})$ est un morphisme de ∞ -graphe réflexif (V désignant le foncteur d'oubli canonique $\infty\text{-Mag} \rightarrow \infty\text{-Grr}$),
- pour flèches $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \gamma) \rightarrow (\mathbb{M}', \mathbb{G}', \gamma')$ les couples (f, g) où $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ est un morphisme ∞ -magmas et $g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}'$ est un morphisme d' ∞ -graphes réflexifs tels que : $V(f) \cdot \gamma = \gamma' \cdot g$.

Il y a un foncteur d'oubli :

$$\mathcal{U} : \mathbb{E}t \rightarrow \mathbb{P}ret, (\mathbb{M}, \mathbb{E}, \pi, ([,]_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto (\mathbb{M}, V(\mathbb{E}), V(\pi)).$$

Proposition 2. *Le foncteur $\mathcal{U} : \mathbb{E}t \rightarrow \mathbb{P}ret$ admet un adjoint à gauche (noté $\mathcal{E}$)*

preuve: On peut, à nouveau ici utiliser l'esquissabilité du foncteur $\mathcal{U}$ (voir le théorème d'adjonction dans [11], [12], [7]). Mais la preuve est un peu longue, aussi préférons nous vous renvoyer au chapitre II où l'on fera une construction explicite du foncteur $\mathcal{E}$ à l'aide d'une double induction.

Dans cette adjonction l' ∞ -magma $\mathbb{M}$ sous-jacent à un objet $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \gamma)$ de $\mathbb{P}ret$ reste fixe.

§4. Les prolixes.

- Jusqu'à maintenant nous avons vu deux constructions universelles :

1. A un ∞ -graphe réflexif $\mathbb{G}$ on associe son ∞ -catégorie libre $C(\mathbb{G})$ (Notons η l'unité de cette adjonction).
2. A un objet de $\mathbb{P}ret$ on associe son étirement libre pour le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathbb{E}t \rightarrow \mathbb{P}ret$.

- On va combiner ces deux constructions universelles pour obtenir une monade sur $\infty\text{-Grr}$. L'axiomatisation des ∞ -catégories non-strictes en résultera.

- Appelons **étirement catégorique** un étirement $(\mathbb{M}, \mathbb{E}, \pi, ([,]_n)_{n \in \mathbb{N}})$ où en fait $\mathbb{M}$ est une ∞ -catégorie. On note $\mathbb{E}tC$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{E}t$ ayant pour objets des étirements catégoriques.

Considérons le foncteur d'oubli

$$\hat{V} : \mathbb{E}tC \rightarrow \infty\text{-Grr}, (\mathbb{C}, \mathbb{E}, \pi, ([,]_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto V(\mathbb{E}).$$

Proposition : *Le foncteur d'oubli $\hat{V} : \mathbb{E}tC \rightarrow \infty\text{-Grr}$ admet un adjoint à gauche noté $\hat{\mathcal{E}} : \infty\text{-Grr} \rightarrow \mathbb{E}tC$.*

preuve : Décomposons le foncteur d'oubli $\hat{V}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{E}tC \xrightarrow{\mathcal{U}'} \mathbb{P}retC \xrightarrow{U'} \infty\text{-Grr}$$

où $\mathbb{P}retC$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathbb{P}ret$ ayant pour objets les triplets $(\mathbb{C}, \mathbb{G}, \gamma) \in |\mathbb{P}ret|$ où $\mathbb{C}$ est une ∞ -catégorie. $\mathcal{U}'$ est la restriction de $\mathcal{U} : \mathbb{E}t \rightarrow \mathbb{P}ret$ et U' est le foncteur d'oubli $(\mathbb{C}, \mathbb{G}, \gamma) \mapsto \mathbb{G}$.

$\mathcal{U}'$ admet pour adjoint à gauche la restriction $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$, quand à U' on voit facilement qu'il admet pour adjoint à gauche le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \infty\text{-Grr} &\longrightarrow \mathbb{P}retC \\ \mathbb{G} &\longmapsto (C(\mathbb{G}), \mathbb{G}, \eta_{\mathbb{G}}) \end{aligned}$$

Ainsi, par composition, $\hat{V}$ admet pour adjoint à gauche le foncteur composé $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}' \cdot \mathcal{P}$.

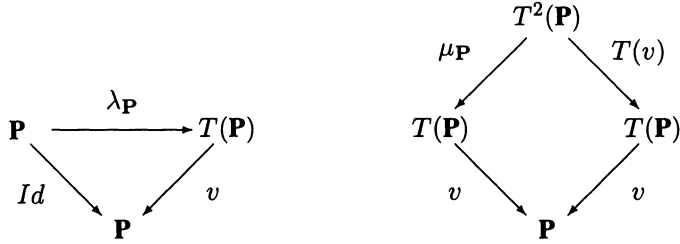
• L'adjonction $\hat{\mathcal{E}} \dashv \hat{V} : \mathbb{E}tC \rightleftarrows \infty\text{-Grr}$ produit une monade sur $\infty\text{-Grr}$ que l'on note $\mathbb{T} = (T, \lambda, \mu)$. C'est à partir d'elle qu'on va définir la structure de prolix.

- Le rôle de la monade $\mathbb{T}$ est de relâcher les axiomes des ∞ -catégories (strictes) (nous le verrons mieux au paragraphe suivant). Le procédé de relâchement étant ascendant, cette monade relâche aussi les cohérences entre axiomes relâchés et ainsi de suite. Ce procédé étant standardisé, les prolixes vont être des ∞ -graphes réflexifs sur lesquels opèrent ces relâchements.

• **Définition :** *on appelle **prolix**² une algèbre pour la monade $\mathbb{T}$ sur $\infty\text{-Grr}$ (pour la définition générale des algèbres voir [13]). C'est donc un couple $(\mathbf{P}, v)$ où :*

1. $\mathbf{P}$ est un ∞ -graphe réflexif,
2. $v : T(\mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{P}$ est un morphisme entre ∞ -graphes réflexifs tel que les deux "diagrammes" suivants commutent :

²Cette terminologie m'a été suggérée par A. Burroni. Il l'utilisait lui-même pour désigner la structure "non-strict" à découvrir qui généraliserait les ∞ -catégories



- Un **morphisme strict** entre prolixes $(\mathbf{P}, v) \rightarrow (\mathbf{P}', v')$ est un morphisme de $\mathbb{T}$ -algèbre, c'est à dire un morphisme d' ∞ -graphes réflexifs $f : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}'$ tel que le carré suivant commute dans $\infty\text{-Grr}$:

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbf{P}) & \xrightarrow{T(f)} & T(\mathbf{P}') \\ v \downarrow & & \downarrow v' \\ \mathbf{P} & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}' \end{array}$$

- Notons $\mathbb{Prol}$ la catégorie des prolixes, $\Gamma : \mathbb{Prol} \rightarrow \infty\text{-Grr}$ le foncteur d'oubli canonique et Π son adjoint à gauche.

• Exemples :

1. Les ∞ -catégories "sont" des prolixes. en effet on peut les munir canoniquement d'une structure d'étirement catégorique, (c'est l'étirement triviale sur ces ∞ -catégories). Or nous allons voir dans l'exemple suivant que tout étirement catégorique "est" un prolix.
2. Plus généralement tous les étirements catégoriques ont canoniquement une structure de prolix. Il suffit pour cela de remarquer que l'adjonction $\hat{\mathcal{E}} \dashv \hat{V} : \mathbb{Et}C \rightleftharpoons \infty\text{-Grr}$ engendre un foncteur de comparaison $\pi : \mathbb{Et}C \rightarrow \mathbb{Prol}$, $\mathcal{E} \mapsto (\hat{V}(\mathcal{E}), \hat{V}(\varepsilon_{\mathcal{E}}))$ où ε est la co-unité de l'adjonction précédente (Pour la définition générale du foncteur de comparaison relatif à une monade voir [13])
3. Les prolixes de dimension ≤ 2 s'identifient exactement aux bicatégories (voir la définition dans [4] - la preuve de ce résultat sera montré dans un article ultérieur - voir aussi [14]).

• **La structure d' ∞ -magma des prolixes.** $\mathbb{G}$ étant un ∞ -graphe réflexif, notons $(\star_p^n)$ la famille des lois de composition dans l' ∞ -magma $T(\mathbb{G})$ (En fait, comme $T(\mathbb{G}) = \hat{V}\hat{\mathcal{E}}(\mathbb{G})$, $T(\mathbb{G})$ est seulement l' ∞ -graphe réflexif sous-jacent à un ∞ -magma)

$(\mathbf{P}, v)$ étant un prolix, montrons qu'on peut canoniquement munir $\mathbf{P}$ d'une structure d' ∞ -magma. Notons $\lambda = \lambda_{\mathbf{P}}$.

- Soit $(a, b) \in \star_p \mathbf{P}_n$ alors $(\lambda_n(a), \lambda_n(b)) \in \star_p T(\mathbf{P})_n$.

On peut donc poser :

$$a \circ_q^n b = v_n(\lambda_n(a) \star_q^n \lambda_n(b))$$

Alors on a :

Pour $p \leq q$

$$s_{pn}(a \circ_q^n b) = s_{pn}(b) \quad b_{pn}(a \circ_q^n b) = b_{pn}(a)$$

Pour $p > q$

$$s_{pn}(a \circ_q^n b) = s_{pn}(a) \circ_q^p s_{pn}(b) \quad b_{pn}(a \circ_q^n b) = b_{pn}(a) \circ_q^p b_{pn}(b)$$

En effet :

Pour $p \leq q$

$$\begin{aligned} s_{pn}(a \circ_q^n b) &= s_{pn}v_n(\lambda_n(a) \star_q^n \lambda_n(b)) = v_p s_{pn}(\lambda_n(a) \star_q^n \lambda_n(b)) \\ &= v_p s_{pn} \lambda_n(b) = v_p \lambda_p s_{pn}(b) \\ &= s_{pn}(b) \quad (\text{car } v \cdot \lambda_{\mathbf{P}} = Id_{\mathbf{P}}) \end{aligned}$$

On le vérifie de même pour le but.

Pour $p > q$

$$\begin{aligned} s_{pn}(a \circ_q^n b) &= s_{pn}v_n(\lambda_n(a) \star_q^n \lambda_n(b)) = v_p s_{pn}(\lambda_n(a) \star_q^n \lambda_n(b)) \\ &= v_p (s_{pn} \lambda_n(a) \star_q^p s_{pn} \lambda_n(b)) = v_p (\lambda_p s_{pn}(a) \star_q^p \lambda_p s_{pn}(b)) \\ &= s_{pn}(a) \circ_q^p s_{pn}(b) \end{aligned}$$

On le vérifie de même pour le but.

Ainsi $\mathbf{P}$ muni de la famille des lois $(\circ_q^n)_{(q,n) \in L}$ est un ∞ -magma.

- si $(t_1, t_0) \in \star_p T(\mathbf{P})_n$, alors dans $(T(\mathbf{P}), \mu_{\mathbf{P}})$ on a :

$$t_1 \circ_q^n t_0 = t_1 \star_q^n t_0$$

où $(\circ_q^n)$ est la suite des lois de composition canoniques du prolix $(T(\mathbf{P}), \mu_{\mathbf{P}})$.

En effet, si on note $\hat{\lambda} = \lambda_{T(\mathbf{P})}$ et $\mu = \mu_{\mathbf{P}}$ on a :

$$\mu_n(\hat{\lambda}_n(t_1) \star_q^n \hat{\lambda}_n(t_0)) = \mu_n \hat{\lambda}_n(t_1) \star_q^n \mu_n \hat{\lambda}_n(t_0) = t_1 \star_q^n t_0$$

puisque $\mu_{\mathbf{P}} : T^2(\mathbf{P}) \rightarrow T(\mathbf{P})$ est un morphisme d' ∞ -magmas (voir la remarque précédente) et qu'on a : $\mu \cdot \hat{\lambda} = \mu_{\mathbf{P}} \cdot \lambda_{T(\mathbf{P})} = Id$

- Si maintenant $f : (\mathbf{P}, v) \rightarrow (\mathbf{P}', v')$ est un morphisme de prolixes on a :

$$f_n(a \circ_q^n b) = f_n(a) \circ_q^n f_n(b) \quad \text{lorsque } (a, b) \in \star_q \mathbf{P}_n$$

En effet :

$$\begin{aligned} f_n(a \circ_q^n b) &= f_n v_n(\lambda_n(a) \star_q^n \lambda_n(b)) = v'_n T f_n(\lambda_n(a) \star_q^n \lambda_n(b)) \\ &= v'_n (T f_n \lambda_n(a) \star_q^n T f_n \lambda_n(b)) = v'_n (\lambda_n f_n(a) \star_q^n \lambda_n f_n(b)) \\ &= f_n(a) \circ_q^n f_n(b) \end{aligned}$$

car $Tf : T(\mathbf{P}) \rightarrow T(\mathbf{P}')$ est un morphisme d' ∞ -magmas.

- En particulier, comme $v : (T(\mathbf{P}), \mu_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{P}, v)$ est un morphisme de prolixes on a :

$$v_n(t_1 \star_q^n t_0) = v_n(t_1) \circ_q^n v_n(t_0) \quad \text{si } (t_1, t_0) \in \star_q T(\mathbf{P})_n$$

§5. Etude des étirements catégoriques.

• Avant d'étudier le relâchement des axiomes d' ∞ -catégories dans les prolixes, faisons le dans les étirements catégoriques.

• Soient $\mathcal{E} = (\mathbb{C}, \mathbb{E}, p, ([,]_n))$ et $\mathcal{E}' = (\mathbb{C}', \mathbb{E}', p', ([,]_n))$ deux étirements catégoriques et $(f, e) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ un morphisme d'étirements.

Le crochet. Soit $a, b \in \mathbb{E}_{n+1}$, on note $a \sim b$ si $(a, b) \in \mathbb{E}_{n+1}$.

Alors, dans ce cas, on vérifie que :

$$[a, b]_{n+1} \circ_{n+1}^{n+2} [b, a]_{n+1} \sim \imath_{n+1}(a) \quad \text{et} \quad [b, a]_{n+1} \circ_{n+1}^{n+2} [a, b]_{n+1} \sim \imath_{n+1}(b)$$

Notons $[[a, b]] = [\iota_{n+1}(a), c]_{n+2}$ où $c = [a, b]_{n+1} \circ_{n+1}^{n+2} [b, a]_{n+1}$.

Alors

$$e_{n+3}([a, b]) = [[e_{n+1}(a), e_{n+1}(b)]]$$

L'associativité. Soit (a, b, c) un n -chemin d'ordre $n + 1$ (où on appelle p -chemin d'ordre q ($p < q$) une suite finie $(a_1, \dots, a_m)$ de cellules de $\mathbb{E}_q$ telles que $\forall i, 1 \leq i \leq m - 1 \quad s_{pq}(a_i) = b_{pq}(a_{i+1})$).

Les cellules $a_1 = a \circ_n^{n+1} (b \circ_n^{n+1} c)$ et $a_0 = (a \circ_n^{n+1} b) \circ_n^{n+1} c$ sont définies et $a_1 \sim a_0$. Notons $A(a, b, c) = [a_1, a_0]_{n+1}$.

Alors on a :

$$e_{n+2}(A(a, b, c)) = A(e_{n+1}(a), e_{n+1}(b), e_{n+1}(c))$$

- Soit (a, b, c, d) un n -chemin d'ordre $n + 1$ alors $\bar{a}_1 \sim \bar{a}_0$ où $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_0$ sont les composés suivants (pour la loi $\circ_{n+1}^{n+2}$) :

$$\begin{array}{ccc}
 & & ((a \circ b) \circ c) \circ d \\
 & & \downarrow A(a,b,c) \circ I_d \\
 & & (a \circ (b \circ c)) \circ d \\
 & & \downarrow A(a,boc,d) \\
 & & a \circ ((b \circ c) \circ d) \\
 & & \downarrow I_a \circ A(b,c,d) \\
 & & a \circ (b \circ (c \circ d)) \\
 \\
 \bar{a}_1 : & ((a \circ b) \circ c) \circ d & \\
 & \downarrow A(aob,c,d) & \\
 & (a \circ b) \circ (c \circ d) & \\
 & \downarrow A(a,b,cod) & \\
 & a \circ (b \circ (c \circ d)) & \\
 \bar{a}_0 : & &
 \end{array}$$

(où ici $\circ = \circ_n^{n+1}$ ou $\circ_n^{n+2}$ et $I_x = \iota_{n+1}(x)$)

On peut noter $A(a, b, c, d) = [\bar{a}_1, \bar{a}_0]_{n+2}$. Là encore :

$$e_{n+2}(A(a, b, c, d)) = A(e_{n+1}(a), e_{n+1}(b), e_{n+1}(c), e_{n+1}(d))$$

- Soit (a, b, c) un n -chemin d'ordre $n + 2$. Alors $(s_{n+1}(a), s_{n+1}(b), s_{n+1}(c))$ et $(b_{n+1}(a), b_{n+1}(b), b_{n+1}(c))$ sont des n -chemins d'ordre $n + 1$. Considérons les deux cellules :

$$\begin{array}{ccc}
 (s(a) \circ s(b)) \circ s(c) & & (s(a) \circ s(b)) \circ s(c) \\
 A(s(a), s(b), s(c)) \downarrow & & (aob)oc \downarrow \\
 a'_1 : \quad s(a) \circ (s(b) \circ s(c)) & & a'_0 : \quad (b(a) \circ b(b)) \circ b(c) \\
 a \circ (boc) \downarrow & & A(b(a), b(b), b(c)) \downarrow \\
 b(a) \circ (b(b) \circ b(c)) & & b(a) \circ (b(b) \circ b(c))
 \end{array}$$

(où ici $\circ = \circ_n^{n+1}$ ou $\circ_n^{n+2}$ et $b = b_{n+1}$, $s = s_{n+1}$)

Alors $a'_1 \sim a'_0$. Notons $A^2(a, b, c) = [a'_1, a'_0]_{n+2}$.

On a aussi :

$$e_{n+3}(A^2(a, b, c)) = A^2(e_{n+2}(a), e_{n+2}(b), e_{n+2}(c))$$

Les unités. Soit $a \in \mathbb{E}_{n+1}$, $n \geq 0$,

alors $a \circ_n^{n+1} \iota_n s_n(a) \sim a$ et $\iota_n b_n(a) \circ_n^{n+1} a \sim a$.

Notons $U(a) = [a, a \circ_n^{n+1} \iota_n s_n(a)]_{n+1}$ et $U'(a) = [a, \iota_n b_n(a) \circ_n^{n+1} a]_{n+1}$.

Alors :

$$e_{n+2}U(a) = Ue_{n+1}(a) \quad \text{et} \quad e_{n+2}U'(a) = U'e_{n+1}(a)$$

- Si $a \in \mathbb{E}_n$, alors :

$$U(\iota_n(a)) = U'(\iota_n(a)) = [\iota_n(a), \iota_n(a) \circ_n^{n+1} \iota_n(a)]_{n+1}$$

- Soit $a \in \mathbb{E}_{n+2}$, on a $u_1 \sim u_0$ et $u'_1 \sim u'_0$ où u_1, u_0, u'_1 et u'_0 sont les composés suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 s_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} \iota_n s_n s_{n+1}(a) & & s_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} \iota_n s_n s_{n+1}(a) \\
 U s_{n+1}(a) \downarrow & & a \circ_n^{n+2} \iota_{n+2n} s_{nn+2}(a) \downarrow \\
 u_1 : \quad s_{n+1}(a) & & u_0 : \quad b_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} \iota_n s_n b_{n+1}(a) \\
 a \downarrow & & U b_{n+1}(a) \downarrow \\
 b_{n+1}(a) & & b_{n+1}(a)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \imath_n b_n s_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} s_{n+1}(a) & & \imath_n b_n s_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} s_{n+1}(a) \\
 U' s_{n+1}(a) \downarrow & & \imath_{n+2n} b_{nn+2}(a) \circ_n^{n+2} a \downarrow \\
 u'_1 : & s_{n+1}(a) & u'_0 : \quad \imath_n b_n b_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} b_{n+1}(a) \\
 & a \downarrow & U' b_{n+1}(a) \downarrow \\
 & b_{n+1}(a) & b_{n+1}(a)
 \end{array}$$

Posons $U^2(a) = [u_1, u_0]_{n+2}$ et $U'^2(a) = [u'_1, u'_0]_{n+2}$.

Alors :

$$e_{n+3}U^2(a) = U^2e_{n+1}(a) \quad \text{et} \quad e_{n+3}U'^2(a) = U'^2e_{n+1}(a)$$

- Soit (a, c) un n -chemin d'ordre $n+1$. Considérons les cellules d'ordre $n+2$ suivantes (où $\underline{a} = b_n(a)$, $\underline{b} = s_n(a) = b_n(c)$, $\underline{c} = s_n(c)$)

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_0 : a \circ c &\xleftarrow{\imath_{n+1}(a) \circ U'(c)} a \circ (\imath_n(\underline{b}) \circ c) \xleftarrow{A(a, \imath_n(\underline{b}), c)} (a \circ \imath_n(\underline{b})) \circ c \\
 \bar{u}_1 : a \circ c &\xleftarrow{U'(a \circ c)} \imath_n(\underline{a}) \circ (a \circ c) \xleftarrow{A(\imath_n(\underline{a}), a, c)} (\imath_n(\underline{a}) \circ a) \circ c \\
 \bar{u}_2 : a \circ c &\xleftarrow{\imath_{n+1}(a) \circ U(c)} a \circ (c \circ \imath_n(\underline{c})) \xleftarrow{A(a, c, \imath_n(\underline{c}))} (a \circ c) \circ \imath_n(\underline{c})
 \end{aligned}$$

(où $\circ = \circ_n^{n+1}$ ou $\circ_n^{n+2}$)

On a : $\bar{u}_0 \sim U(a) \circ \imath_{n+1}(c)$, $\bar{u}_1 \sim U'(a) \circ \imath_{n+1}(c)$ et $\bar{u}_2 \sim U(a \circ c)$

Notons $AU_0(a, c) = [U(a) \circ \imath_{n+1}(c), \bar{u}_0]_{n+2}$,

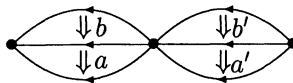
$AU_1(a, c) = [U'(a) \circ \imath_{n+1}(c), \bar{u}_1]_{n+2}$, $AU_2(a, c) = [U(a \circ c), \bar{u}_2]_{n+2}$.

Alors :

$$e_{n+3}AU_i(a, c) = AU_i(e_{n+1}(a), e_{n+1}(c)) \quad \text{si } i \in \{0, 1, 2\}$$

L'échange. Soit $a, b, a', b' \in \mathbb{E}_{n+2}$, $n \geq 0$ tels que :

$$s_{n+1}(a) = b_{n+1}(b), \quad s_{n+1}(a') = b_{n+1}(b'), \quad s_n(a) = s_n(b) = b_n(a') = b_n(b')$$



alors si on note $e_1 = (a \circ_n^{n+2} a') \circ_{n+1}^{n+2} (b \circ_n^{n+2} b')$ et $e_0 = (a \circ_{n+1}^{n+2} b) \circ_n^{n+2} (a' \circ_{n+1}^{n+2} b')$ on a $e_1 \sim e_0$.

Notons $E(a, b, a', b') = [e_1, e_0]_{n+2}$.

Alors :

$$e_{n+3}E(a, b, a', b') = E(e_{n+2}(a), e_{n+2}(b), e_{n+2}(a'), e_{n+2}(b'))$$

L'ascensionnabilité.

Soit (b, a) un p -chemin d'ordre $n + 1$ dans $\mathbb{E}$.

Alors on a :

$$\imath_{n+1}(b) \circ_p^{n+2} \imath_{n+1}(a) \sim \imath_{n+1}(b \circ_p^{n+1} a)$$

Notons :

$$I_p(b, a) = [\imath_{n+1}(b) \circ_p^{n+2} \imath_{n+1}(a), \imath_{n+1}(b \circ_p^{n+1} a)]_{n+2}$$

Alors :

$$e_{n+3}I_p(b, a) = I_p(e_{n+1}(b), e_{n+1}(a))$$

• On pourrait, bien sûr, continuer dans les cohérences entre ces différentes constructions. Hélas, il n'y a pas de raison de s'arrêter. . . On s'est donc contenté de décrire les constructions "entre l'ordre n et $n + 3$ " pour retrouver, en plus général, la situation des bicatégories.

§6. Etude des prolixes.

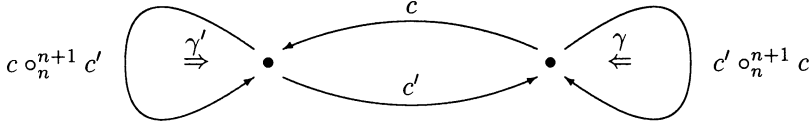
• Là encore toutes les constructions faites précédemment dans les étirements catégoriques vont subsister dans les prolixes, mais cette fois sans la présence explicite de la loi "crochet".

• Donnons nous deux prolixes quelconques $(\mathbf{P}, v)$, $(\mathbf{P}', v')$ et un morphisme strict $h : (\mathbf{P}, v) \rightarrow (\mathbf{P}', v')$ entre ces prolixes.

Notons :

$$\lambda = \lambda_{\mathbf{P}} \quad \hat{\lambda} = \lambda_{T(\mathbf{P})} \quad \mu = \mu_{\mathbf{P}}$$

• On dit qu'une cellule $c \in \mathbf{P}_{n+1}$ est **pseudo-inversible** si il existe $c' \in \mathbf{P}_{n+1}$, $\gamma, \gamma' \in \mathbf{P}_{n+2}$ tels que $s_n(c') = b_n(c)$, $b_n(c') = s_n(c)$, $s_{n+1}(\gamma) = c' \circ_n^{n+1} c$, $b_{n+1}(\gamma) = \imath_n s_n(c)$, $s_{n+1}(\gamma') = c \circ_n^{n+1} c'$, $b_{n+1}(\gamma') = \imath_n b_n(c)$.



On dit aussi qu'une cellule $c \in \mathbf{P}_{n+2}$ est une **cellule de cohérence** si, il existe $t', t \in T(\mathbf{P})_{n+1}$, $t' \sim t$ tels que $c = v_{n+2}([t', t]_{n+1})$. On vérifie qu'une cellule de cohérence est pseudo-inversible, où $c' = v_{n+2}([t, t']_{n+1})$, $\gamma = v_{n+3}([t, t'])$, $\gamma' = v_{n+3}([t', t])$ (puisque v est un morphisme d' ∞ -magmas).

L'associativité. Soit (a, b, c) un n -chemin d'ordre $n + 1$ de $\mathbf{P}$.

Alors $(\lambda_{n+1}(a), \lambda_{n+1}(b), \lambda_{n+1}(c))$ est un n -chemin d'ordre $n + 1$ de $T(\mathbf{P})$.

On peut donc poser $a(a, b, c) = v_{n+2}A(\lambda_{n+1}(a), \lambda_{n+1}(b), \lambda_{n+1}(c))$.

Alors $a(a, b, c)$ est une cellule de cohérence telle que :

$$\begin{aligned} s_{n+1}a(a, b, c) &= s_{n+1}v_{n+2}A(\lambda_{n+1}(a), \lambda_{n+1}(b), \lambda_{n+1}(c)) \\ &= v_{n+1}s_{n+1}A(\lambda_{n+1}(a), \lambda_{n+1}(b), \lambda_{n+1}(c)) \\ &= v_{n+1}((\lambda_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} \lambda_{n+1}(b)) \circ_n^{n+1} \lambda_{n+1}(c)) \\ &= (a \circ_n^{n+1} b) \circ_n^{n+1} c \end{aligned}$$

car v est un morphisme d' ∞ -magmas et $v \cdot \lambda = Id$.

De même $b_{n+1}a(a, b, c) = a \circ_n^{n+1} (b \circ_n^{n+1} c)$

- On a $h_{n+2}a(a, b, c) = a(h_{n+1}(a), h_{n+1}(b), h_{n+1}(c))$ car, si on note $\bar{x} = \lambda_{n+1}(x)$ pour $x \in \mathbf{P}_{n+1}$ ou $x \in \mathbf{P}'_{n+1}$,

$$\begin{aligned} h_{n+2}a(a, b, c) &= h_{n+2}v_{n+2}A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \\ &= v'_{n+2}T(h)_{n+2}A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \\ &= v'_{n+2}A(T(h)_{n+1}(\bar{a}), T(h)_{n+1}(\bar{b}), T(h)_{n+1}(\bar{c})) \\ &= v'_{n+2}A(\bar{h}_{n+1}(a), \bar{h}_{n+1}(b), \bar{h}_{n+1}(c)) \\ &= a(h_{n+1}(a), h_{n+1}(b), h_{n+1}(c)) \end{aligned}$$

(puisque $h \cdot v = v' \cdot T(h)$ que $T(h)$ "est" un morphisme d'étirements catégoriques et que $T(h) \cdot \lambda_{\mathbf{P}} = \lambda_{\mathbf{P}'} \cdot h$)

- Si (t_2, t_1, t_0) est un n -chemin d'ordre $n + 1$ de $T(\mathbf{P})$, alors, dans $(T(\mathbf{P}), \mu)$ on a : $a(t_2, t_1, t_0) = A(t_2, t_1, t_0)$, car

$$\begin{aligned} \mu_{n+2}A(\hat{\lambda}_{n+1}(t_2), \hat{\lambda}_{n+1}(t_1), \hat{\lambda}_{n+1}(t_0)) &= \\ = A(\mu_{n+1}\hat{\lambda}_{n+1}(t_2), \mu_{n+1}\hat{\lambda}_{n+1}(t_1), \mu_{n+1}\hat{\lambda}_{n+1}(t_0)) &= A(t_2, t_1, t_0) \end{aligned}$$
 (puisque μ "est" un morphisme d'étirements catégoriques et que $\mu \cdot \hat{\lambda} = \mu_{\mathbf{P}} \cdot \lambda_{T(\mathbf{P})} = Id$)
 - soit (a, b, c, d) un n -chemin d'ordre $n + 1$ dans $\mathbf{P}$. Alors $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ est un n -chemin d'ordre $n + 1$ dans $T(\mathbf{P})$ (où pour simplifier $\bar{x} = \lambda_{n+1}(x)$, si $x \in \mathbf{P}_{n+1}$).
- On peut donc poser :

$$a(a, b, c, d) = v_{n+3}A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$$

$a(a, b, c, d)$ est une cellule de cohérence et :

$$\begin{aligned} s_{n+2}a(a, b, c, d) &= s_{n+2}v_{n+3}A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) \\ &= v_{n+2}s_{n+2}A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) \\ &= v_{n+2}s_{n+2}([\bar{a}_1, \bar{a}_0]_{n+2}) = v_{n+2}(\bar{a}_0) \\ &= v_{n+2}((\iota_{n+1}(\bar{a}) \circ_n^{n+2} A(\bar{b}, \bar{c}, \bar{d})) \circ_{n+1}^{n+2} \\ &\quad (A(\bar{a}, \bar{b} \circ_n^{n+1} \bar{c}, \bar{d}) \circ_{n+1}^{n+2} (A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \circ_n^{n+2} \iota_{n+1}(\bar{d})))) \\ &= (\iota_{n+1}(a) \circ_n^{n+2} a(b, c, d)) \circ_{n+1}^{n+2} \\ &\quad (a(a, b \circ_n^{n+1} c, d) \circ_{n+1}^{n+2} (a(a, b, c) \circ_n^{n+2} \iota_{n+1}(d))) \end{aligned}$$

où

$$\bar{a}_1 = A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \circ_n^{n+1} \bar{d}) \circ_{n+1}^{n+2} A(\bar{a} \circ_n^{n+1} \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$$

et

$$\bar{a}_0 = (\iota_{n+1}(\bar{a}) \circ_n^{n+2} A(\bar{b}, \bar{c}, \bar{d})) \circ_{n+1}^{n+2} (A(\bar{a}, \bar{b} \circ_n^{n+1} \bar{c}, \bar{d}) \circ_{n+1}^{n+2} (A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \circ_n^{n+2} \iota_{n+1}(\bar{d})))$$

puisque $v : (T(\mathbf{P}), \mu) \rightarrow (\mathbf{P}, v)$ est un morphisme de prolixes, que " $A = a$ " dans $(T(\mathbf{P}), \mu)$ et que $v \cdot \lambda = Id$.

On a une formule du même genre pour $b_{n+2}a(a, b, c, d)$ que l'on résume par le dessin suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 (a \circ b) \circ (c \circ d) & \xleftarrow{a(a \circ b, c, d)} & ((a \circ b) \circ c) \circ d & & \\
 \downarrow a(a, b, c \circ d) & & \downarrow & \searrow a(a, b, c) \circ I_d & \\
 & \Uparrow a(a, b, c, d) & & & (a \circ (b \circ c)) \circ d \\
 a \circ (b \circ (c \circ d)) & \xleftarrow{I_a \circ a(b, c, d)} & a \circ ((b \circ c) \circ d) & \swarrow a(a, b \circ c, d) & \\
 & & & &
 \end{array}$$

(où $\circ = \circ_n^{n+1}$ ou bien $\circ_n^{n+2}$ et $I_x = \iota_{n+1}(x)$)

. On vérifie de même que :

$$h_{n+3}a(a, b, c, d) = a(h_{n+1}(a), h_{n+1}(b), h_{n+1}(c), h_{n+1}(d))$$

. On a aussi dans $(T(\mathbf{P}), \mu)$:

$$a(t_3, t_2, t_1, t_0) = A(t_3, t_2, t_1, t_0)$$

- Soit (a, b, c) un n -chemin d'ordre $n + 2$ dans $\mathbf{P}$.

Alors $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ est un n -chemin d'ordre $n + 2$ dans $T(\mathbf{P})$ (où $\bar{x} = \lambda_{n+2}(x)$, pour $x \in \mathbf{P}_{n+2}$).

Posons $a^2(a, b, c) = v_{n+3}A^2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

On vérifie comme précédemment que $a^2(a, b, c)$ est la cellule de cohérence dont le domaine et le codomaine sont représentés par le dessin :

$$\begin{array}{ccccc}
 s(a) \circ (s(b) \circ s(c)) & \xleftarrow{a(s(a), s(b), s(c))} & (s(a) \circ s(b)) \circ s(c) & & \\
 \downarrow a \circ (b \circ c) & & \downarrow & \searrow (a \circ b) \circ c & \\
 & \Uparrow a^2(a, b, c) & & & \\
 b(a) \circ (b(b) \circ b(c)) & \xleftarrow{a(b(a), b(b), b(c))} & (b(a) \circ b(b)) \circ b(c) & &
 \end{array}$$

(où $\circ = \circ_n^{n+1}$ ou $\circ_n^{n+2}$, $s = s_{n+1}$, $b = b_{n+1}$)

. On a aussi $h_{n+3}a^2(a, b, c) = a^2(h_{n+2}(a), h_{n+2}(b), h_{n+2}(c))$

et encore, dans $(T(\mathbf{P}), \mu)$:

$$a^2(t_2, t_1, t_0) = A^2(t_2, t_1, t_0)$$

Les unités : Soit $a \in \mathbf{P}_{n+1}$,

on pose $u(a) = v_{n+2}U(\lambda_{n+1}(a))$ et $u'(a) = v_{n+2}U'(\lambda_{n+1}(a))$.

$u(a)$ et $u'(a)$ sont des cellules de cohérence et :

$$a \xleftarrow{u(a)} a \circ_n^{n+1} \imath_n s_n(a) \quad a \xleftarrow{u'(a)} \imath_n b_n(a) \circ_n^{n+1} a$$

. On a $h_{n+2}u(a) = uh_{n+1}(a)$, $h_{n+2}u'(a) = u'h_{n+1}(a)$.

On a aussi, pour $t \in T(\mathbf{P})$, $u(t) = U(t)$, $u'(t) = U'(t)$,

de plus pour $a \in \mathbf{P}_n$, $u(\imath_n(a)) = u'(\imath_n(a))$.

- Pour $a \in \mathbf{P}_{n+2}$, posons $u^2(a) = v_{n+3}U^2\lambda_{n+2}(a)$ et $u'^2(a) = v_{n+3}U'^2\lambda_{n+2}(a)$, alors $u^2(a)$ et $u'^2(a)$ sont des cellules de cohérence dont les domaines et codomaines sont représentés par :

$$\begin{array}{ccccc} s_{n+1}(a) & \xleftarrow{us_{n+1}(a)} & s_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} \imath_n s_n s_{n+1}(a) & & \\ a \downarrow & \uparrow u^2(a) & \downarrow & & a \circ_n^{n+2} \imath_{n+2n} s_{nn+2}(a) \\ b_{n+1}(a) & \xleftarrow{ub_{n+1}(a)} & b_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} \imath_n s_n b_{n+1}(a) & & \\ s_{n+1}(a) & \xleftarrow{u's_{n+1}(a)} & \imath_n b_n s_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} s_{n+1}(a) & & \\ a \downarrow & \uparrow u'^2(a) & \downarrow & & \imath_{n+2n} b_{nn+2}(a) \circ_n^{n+2} a \\ b_{n+1}(a) & \xleftarrow{u'b_{n+1}(a)} & \imath_n b_n b_{n+1}(a) \circ_n^{n+1} b_{n+1}(a) & & \end{array}$$

. On a $h_{n+3}u^2(a) = u^2h_{n+2}(a)$, $h_{n+3}u'^2(a) = u'^2h_{n+2}(a)$.

Pour tout $t \in T(\mathbf{P})$, $u^2(t) = U^2(t)$, $u'^2(t) = U'^2(t)$.

- Dans le cas d'un n -chemin (a, c) d'ordre $n+1$, comme $(\lambda_{n+1}(a), \lambda_{n+1}(c))$ est un n -chemin d'ordre $n+1$ dans $T(\mathbf{P})$, on peut poser :

$$au_i(a, c) = v_{n+3}AU_i(\lambda_{n+1}(a), \lambda_{n+1}(c))$$

alors ce sont des cellules de cohérence qui sont positionnées comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 a \circ (\iota_n s_n(a) \circ c) & & \iota_n b_n(a) \circ (a \circ c) \\
 \swarrow \iota_{n+1}(a) \circ u'(c) \quad \Downarrow au_0(a,c) & \swarrow a(a, \iota_n s_n(a), c) & \swarrow u'(a \circ c) \quad \Downarrow au_1(a,c) \\
 a \circ c & \xleftarrow{u(a) \circ \iota_{n+1}(c)} & (a \circ \iota_n s_n(a)) \circ c \quad a \circ c \xleftarrow{u'(a) \circ \iota_{n+1}(c)} (\iota_n b_n(a) \circ a) \circ c
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a \circ (c \circ \iota_n s_n(c)) & & \\
 \swarrow \iota_{n+1}(a) \circ u(c) \quad \Downarrow au_2(a,c) & \swarrow a(a, c, \iota_n s_n(c)) & \\
 a \circ c & \xleftarrow{u(a \circ c)} & (a \circ c) \circ \iota_n s_n(c)
 \end{array}$$

(où $\circ = \circ_n^{n+1}$ ou bien $\circ_n^{n+2}$)

On a $h_{n+3} au_i(a, c) = au_i(h_{n+1}(a), h_{n+1}(c)) \quad i \in \{0, 1, 2\}$

Si (t_1, t_0) est un n -chemin d'ordre $n + 1$ dans $T(\mathbf{P})$ on a :

$$au_i(t_1, t_0) = AU_i(t_1, t_0)$$

L'échange : Soit $a, b, a', b' \in \mathbf{P}_{n+2}$, $n \geq 0$ tels que : $s_{n+1}(a) = b_{n+1}(b)$,

$s_{n+1}(a') = b_{n+1}(b')$, $s_n(a) = s_n(b) = b_n(a') = b_n(b')$,

alors $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}', \bar{b}'$ sont positionnés de la même façon dans $T(\mathbf{P})_{n+2}$.

(où $\bar{x} = \lambda_{n+2}(x)$ pour $x \in \mathbf{P}_{n+2}$).

On peut alors poser :

$$e(a, b, a', b') = v_{n+3} E(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}', \bar{b}')$$

$e(a, b, a', b')$ est une cellule de cohérence telle que :

$$(a \circ_n^{n+2} a') \circ_{n+1}^{n+2} (b \circ_n^{n+2} b') \xleftarrow{e(a, b, a', b')} (a \circ_{n+1}^{n+2} b) \circ_n^{n+2} (a' \circ_{n+1}^{n+2} b')$$

On a : $h_{n+3} e(a, b, a', b') = e(h_{n+2}(a), h_{n+2}(b), h_{n+2}(a'), h_{n+2}(b'))$

et aussi, pour $t_1, t_0, t'_1, t'_0 \in T(\mathbf{P})_{n+2}$ positionnés comme précédemment :

$$e(t_1, t_0, t'_1, t'_0) = E(t_1, t_0, t'_1, t'_0)$$

L'ascensionnalité : Soit (b, a) un p -chemin d'ordre $n + 1$ dans $\mathbf{P}$ alors :
 $(\lambda_{n+1}(b), \lambda_{n+1}(a))$ est un p -chemin d'ordre $n + 1$ dans $T(\mathbf{P})$.

On peut alors poser :

$$i_p(b, a) = v_{n+3} I_p(\lambda_{n+1}(b), \lambda_{n+1}(a))$$

$i_p(b, a)$ est une cellule de cohérence telle que :

$$\iota_{n+1}(b) \circ_p^{n+2} \iota_{n+1}(a) \xleftarrow{i_p(b, a)} \iota_{n+1}(b \circ_p^{n+1} a)$$

On a $h_{n+3} i_p(b, a) = i_p(h_{n+1}(b), h_{n+1}(a))$

et pour tout p -chemin d'ordre $n + 1$, (t_1, t_0) dans $T(\mathbf{P})$ on a :

$$i_p(t_1, t_0) = I_p(t_1, t_0)$$

Remarque : De toutes ces constructions on déduit qu'un prolix de dimension inférieure ou égale à 2 est une bicatégorie.

Deuxième partie : Calcul polygraphique.

• Le but de cette partie est de donner des constructions explicites des deux foncteurs $C : \infty\text{-Grr} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ (adjoint de U) et $\mathcal{E} : \mathbb{P}ret \rightarrow \mathbb{E}t$, (adjoint de $\mathcal{U}$). Ceci nous permettra d'avoir une description plus en profondeur de la monade $\mathbb{T}$ sur $\infty\text{-Grr}$.

Commençons par le foncteur C .

§1. Les systèmes cellulaires catégoriques.

• On se fixe au départ un langage (qu'on appelle le **langage cellulaire basique**. Il sera souvent noté par le suffixe " b ").

Il est formé :

- d'un symbole unaire: I ,
- d'une suite de symboles binaires : $(\star_q)_{q \in \mathbb{N}}$.

(Dans ce travail, ce langage ne sera pas assorti de variables. Par contre, il aura des constantes comme nous allons le voir).

On appelle **donnée cellulaire** un couple $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \dim)$ où $\mathcal{C}$ est un ensemble (ses éléments sont appelés **constantes** de $\mathbb{C}$) et où $\dim : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application ($\dim(c)$ est appelée la **dimension** de c).

A partir des constantes d'une donnée cellulaire le langage cellulaire basique produit un ensemble $\mathcal{T}^b(\mathbb{C})$ de termes (ou simplement $\mathcal{T}^b$ ou même $\mathcal{T}$) comme on le fait d'habitude en théorie des modèles.

On prolonge aux termes l'application dimension. On le fait par induction sur leur longueur.

- Si $t = I(t')$, $\dim(t) = 1 + \dim(t')$
- Si $t = t_1 \star_q t_0$, $\dim(t) = \sup(\dim(t_1), \dim(t_0), q + 1)$

Notons $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_n^b(\mathbb{C})$ l'ensemble des constantes et des termes de dimension n .

• Pour le moment, ces termes n'ont pas encore de sens géométrique. Pour ce faire on ajoute un **positionnement** à la donnée cellulaire.

Un b -positionnement sur $\mathbb{C}$ est, par définition, une suite d'applications

$\mathbb{P} = (b_p, s_p : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{T}^b(\mathbb{C}))_{p \in \mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- $\dim s_p(c) = \dim b_p(c) = p$ pour tout $c \in \mathcal{C}$
- $s_p(c) = b_p(c) = I^{p-n}(c)$ si $p \geq n = \dim(c)$ (où $I^k(t)$ est défini par

induction par $I^0(t) = t$ et $I^{k+1}(t) = I(I^k(t))$.

s_p et b_p sont les applications **source** et **but** en dimension p .

On prolonge s_p et b_p à $\mathcal{T}^b(\mathbb{C})$ tout entier, par induction sur la longueur des termes.

Pour $t \in \mathcal{T}^b(\mathbb{C})$ on pose :

- si $\dim(t) \leq p$, $s_p(t) = b_p(t) = I^{p-n}(t)$ (où $n = \dim(t)$)
- si $\dim(t) > p$,
 - . si $t = I(t')$, $s_p(t) = s_p(t')$, $b_p(t) = b_p(t')$,
 - . si $t = t_1 \star_q t_0$,
 - .. si $p \leq q$, $s_p(t) = s_p(t_0)$, $b_p(t) = b_p(t_1)$,
 - .. si $p > q$, $s_p(t) = s_p(t_1) \star_q s_p(t_0)$, $b_p(t) = b_p(t_1) \star_q b_p(t_0)$.

On montre, par induction sur la longueur d'un terme t , que :

$$\dim s_p(t) = \dim b_p(t) = p$$

• Là encore, tel quel, les termes pour la plupart n'ont pas de sens géométrique et il va falloir distinguer parmi eux ceux qui sont **bien formés**. On les définit simultanément avec la **congruence** entre termes bien formés de même dimension. On le fait par induction sur la dimension. Si $\mathbb{S} = (\mathbb{C}, \mathbb{P})$ est un couple formé d'une donnée cellulaire $\mathbb{C}$ et d'un b -positionnement $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{C}$ alors, l'ensemble des termes bien formés sur $\mathbb{S}$ de dimension n sera noté $\tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$, ou simplement $\tilde{\mathcal{T}}_n^b$, et la congruence entre deux termes bien formés t_1 et t_0 de même dimension : $t_1 \equiv t_0$.

. **En dimension** $n = 0$,

On pose : $\tilde{\mathcal{T}}_0^b = \mathcal{T}_0^b (= \mathcal{C}_0)$ et

$$t_1 \equiv t_0 \quad \text{ssi} \quad t_1 = t_0$$

. **En dimension** $n > 0$,

.. On définit $\tilde{\mathcal{T}}_n^b$ par induction sur la longueur des termes.

... si $t \in \mathcal{C}_n$ alors,

$$t \in \tilde{\mathcal{T}}_n^b \iff \forall p < n \quad s_p(t), b_p(t) \in \tilde{\mathcal{T}}_p^b$$

... si $t = I(t')$ alors,

$$t \in \tilde{\mathcal{T}}_n^b \iff t' \in \tilde{\mathcal{T}}_{n-1}^b$$

... si $t = t_1 \star_q t_0$ alors,

$$t \in \tilde{\mathcal{T}}_n^b \iff t_1, t_0 \in \tilde{\mathcal{T}}_n^b \quad \text{et} \quad s_q(t_1) \equiv b_q(t_0)$$

.. La congruence $t_1 \equiv t_0$ est obtenue en appliquant un nombre fini de fois les axiomes et règles suivantes :

$$A_1 : t \equiv t$$

$$R_1 : t_1 \equiv t_0 \Rightarrow t_0 \equiv t_1$$

$$R_2 : t_2 \equiv t_1 \text{ et } t_1 \equiv t_0 \Rightarrow t_2 \equiv t_0$$

$$R_3 : t'_1 \equiv t'_0 \Rightarrow I(t'_1) \equiv I(t'_0)$$

$$R_4 : t_1 \equiv t_0 \text{ et } t'_1 \equiv t'_0 \Rightarrow t_1 \star_q t'_1 \equiv t_0 \star_q t'_0$$

$$A_2 : t \equiv t \star_p I^{n-p} s_p(t)$$

$$A'_2 : t \equiv I^{n-p} b_p(t) \star_p t$$

$$A_3 : t_2 \star_q (t_1 \star_q t_0) \equiv (t_2 \star_q t_1) \star_q t_0$$

$$A_4 : \text{si } q \neq p, (t_1 \star_p t_0) \star_q (t'_1 \star_p t'_0) \equiv (t_1 \star_q t'_1) \star_p (t_0 \star_q t'_0)$$

$$A_5 : I(t') \star_q I(t) \equiv I(t' \star_q t)$$

• On dit que $\mathbb{S} = (\mathbb{C}, \mathbb{P})$ est un **système cellulaire catégorique** (en abrégé s.c.c.) si :

$$1. \mathcal{C}_n \subset \tilde{\mathcal{T}}_n^b, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$2. \forall c \in \mathcal{C} \forall q, p \in \mathbb{N}, q < p < \dim(c),$$

$$s_q s_p(c) \equiv s_q b_p(c) \equiv s_q(c)$$

$$b_q b_p(c) \equiv b_q s_p(c) \equiv b_q(c)$$

Pour un s.c.c. ces congruences valables sur les constantes le sont aussi sur les termes bien formés. En effet, on montre que :

Proposition

$$1. \text{ Soit } t \in \tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S}) \text{ alors :}$$

$$(a) \text{ pour } 0 \leq p < n, \text{ on a : } s_p(t), b_p(t) \in \tilde{\mathcal{T}}_p^b(\mathbb{S})$$

$$(b) \text{ pour } 0 \leq q < p < n, \text{ on a :}$$

$$s_q s_p(t) \equiv s_q b_p(t) \equiv s_q(t)$$

$$b_q b_p(t) \equiv b_q s_p(t) \equiv b_q(t)$$

2. Soit $t_1, t_0 \in \tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$ et $0 \leq p < n$ alors :

$$t_1 \equiv t_0 \Rightarrow s_p(t_1) \equiv s_p(t_0), b_p(t_1) \equiv b_p(t_0)$$

- Dans cette proposition, on montre le (1) et (2) par induction sur la dimension n où pour n fixé on montre le (a) et (b) du (1) par induction sur la longueur de t et le (2) par induction sur la longueur de la preuve des congruences.

• Si on note $K(\mathbb{S})_n = \tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})/\equiv$ (où $\mathbb{S}$ est un s.c.c.), on voit facilement que les applications $\tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S}) \rightrightarrows \tilde{\mathcal{T}}_p^b(\mathbb{S})$, $t \mapsto b_p(t), s_p(t)$, $\tilde{\mathcal{T}}_p^b(\mathbb{S}) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$, $t \mapsto I^{n-p}(t)$ passent au quotient (pour $p < n$) et que si on note $b_{pn}, s_{pn} : K(\mathbb{S})_n \rightrightarrows K(\mathbb{S})_p$, $\iota_{np} : K(\mathbb{S})_p \rightarrow K(\mathbb{S})_n$ ces passages au quotient et $b_n = b_{n(n+1)}$, $s_n = s_{n(n+1)}$, $\iota_n = \iota_{(n+1)n}$, $((K(\mathbb{S})_n)_n, (b_n, s_n, \iota_n)_n)$ forment un ∞ -graphe réflexif. En plus grâce à la règle (R_4) on peut définir des lois de composition : $\circ_p^n : \star_p K(\mathbb{S})_n \rightarrow K(\mathbb{S})_n$ (pour $p < n$) en posant :

$$q_n(\theta_1) \circ_p^n q_n(\theta_0) = q_n(\theta_1 \star_p \theta_0)$$

($q_n : \tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S}) \rightarrow K(\mathbb{S})_n$ désignant la surjection canonique) et on vérifie que : $K(\mathbb{S}) = ((K(\mathbb{S})_n)_n, (b_{pn}, s_{pn}, \iota_{pn}, \circ_p^n)_{p,n})$ est une ∞ -catégorie (stricte évidemment).

- Nous verrons plus loin que ces ∞ -catégories permettent de construire l' ∞ -catégorie libre engendrée par un ∞ -graphe réflexif.

§2. Les systèmes cellulaires stricts (s.c.s.).

• Dans toute sa généralité le concept de s.c.c. est assez lourd à mettre en place (mais c'est celui qui correspond le mieux aux polygraphes d'A.Burroni). On va lui préférer bien souvent un cas particulier qu'on va définir maintenant. Nous verrons qu'il a aussi son utilité propre. Il est aux ∞ -magmas ce que les s.c.c. sont aux ∞ -catégories.

• Considérons, à nouveau, un couple $\mathbb{S} = (\mathbb{C}, \mathbb{P})$ formé d'une donnée cellulaire $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \dim)$ et d'un b -positionnement $\mathbb{P} = ((b_p, s_p))_p$ sur $\mathbb{C}$.

Au lieu de considérer ses termes bien formés, on va s'intéresser à une sous-classe de ceux-ci qui a l'avantage d'être décrite plus facilement (sans le re-

cours des congruences); ce sont les termes **strictement bien formés**. On notera $\hat{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$ (ou simplement $\hat{\mathcal{T}}_n^b$) l'ensemble de ces termes à la dimension n . On les définit par induction sur la dimension et la longueur des termes.

. **En dimension** $n = 0$,

On pose : $\hat{\mathcal{T}}_0^b = \mathcal{C}_0 (= \mathcal{T}_0^b = \tilde{\mathcal{T}}_0^b)$

. **En dimension** $n > 0$,

.. si $t \in \mathcal{C}$, alors :

$$t \in \hat{\mathcal{T}}_n^b \iff \forall p < n \quad s_p(t), b_p(t) \in \hat{\mathcal{T}}_p^b$$

.. si $t = I(t')$ alors,

$$t \in \hat{\mathcal{T}}_n^b \iff t' \in \hat{\mathcal{T}}_{n-1}^b$$

.. si $t = t_1 \star_q t_0$ alors,

$$t \in \hat{\mathcal{T}}_n^b \iff t_1, t_0 \in \hat{\mathcal{T}}_n^b \quad \text{et} \quad s_q(t_1) = b_q(t_0)$$

- On montre par induction sur $n \in \mathbb{N}$ que $\hat{\mathcal{T}}_n^b \subset \tilde{\mathcal{T}}_n^b$.

- On dit que $\mathbb{S} = (\mathbb{C}, \mathbb{P})$ est un **système cellulaire strict** (en abrégé s.c.s) si :

$$1. \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{C}_n \subset \hat{\mathcal{T}}_n^b$$

$$2. \forall n, p, q \in \mathbb{N}, \quad q < p < n, \quad \forall c \in \mathcal{C}_n,$$

$$s_q s_p(c) = s_q b_p(c) = s_q(c)$$

$$b_q b_p(c) = b_q s_p(c) = b_q(c)$$

- Les termes strictement bien formés étant des termes bien formés on en déduit qu'un s.c.s. est a fortiori un s.c.c.

- Comme pour les s.c.c. on peut prolonger les identités de la définition précédente à tous les termes strictement bien formés. On a la proposition suivante lorsque $\mathbb{S}$ est s.c.s.

Proposition

Soit $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$ alors :

$$(a) \text{ pour } 0 \leq p < n, \text{ on a : } s_p(t), b_p(t) \in \hat{\mathcal{T}}_p^b(\mathbb{S})$$

(b) pour $0 \leq q < p < n$, on a :

$$s_q s_p(t) = s_q b_p(t) = s_q(t)$$

$$b_q b_p(t) = b_q s_p(t) = b_q(t)$$

• Montrons maintenant que les ∞ -graphes réflexifs forment des exemples de s.c.s. (les ∞ -graphes en sont aussi des exemples, mais nous ne les traiterons pas ici).

- Soit $\mathbb{G} = ((\mathbb{G}_n)_n, (b_n, s_n, \iota_n)_n)$ un ∞ -graphe réflexif.

Si $x \in G_n$ posons $\partial(x) = \inf\{p \in \mathbb{N} / x = \iota_{np} s_{pn}(x)\}$.

Posons aussi $G'_n = \{x \in G_n / \partial(x) = n\}$ et $\mathcal{C} = \coprod_{n \in \mathbb{N}} G'_n$. L'application dimension est alors simplement $\dim : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}, (x, n) \mapsto n$.

On a ainsi une donnée cellulaire $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \dim)$.

On construit aussi un b -positionnement $\mathbb{P} = ((b_p, s_p))_p$ sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante :

Si $e_n : G_n \rightarrow \mathcal{C}, x \mapsto (s_p(x), p)$ où $p = \partial(x)$

alors on peut poser :

$$s_p(x, n) = I^{p-p'} e_p \bar{s}_p(x, n) \quad \text{et} \quad b_p(x, n) = I^{p-p''} e_p \bar{b}_p(x, n)$$

où $\bar{s}_p(x, n) = s_{pn}(x)$, $\bar{b}_p(x, n) = b_{pn}(x)$ si $p < n$

$$\bar{s}_p(x, n) = x = \bar{b}_p(x, n) \quad \text{si } p = n$$

$$\bar{s}_p(x, n) = \iota_{pn}(x) = \bar{b}_p(x, n) \quad \text{si } p > n$$

et $p' = \partial(\bar{s}_p(x, n))$, $p'' = \partial(\bar{b}_p(x, n))$

$\mathbb{P} = ((b_p, s_p))_p$ forme un b -positionnement sur $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \dim)$ et le couple $(\mathbb{C}, \mathbb{P})$ est un s.c.s., on le note $S(\mathbb{G})$.

• Soit $\mathbb{S}$ un s.c.s., posons $\mathcal{M}_n(\mathbb{S}) = \hat{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Posons aussi $\beta_{pn}, \sigma_{pn} : \mathcal{M}_n(\mathbb{S}) \rightrightarrows \mathcal{M}_p(\mathbb{S})$, $\iota_{np} : \mathcal{M}_p(\mathbb{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{S})$, pour $p < n$, les applications définies par :

$$\beta_{pn}(t) = b_p(t) \quad \sigma_{pn}(t) = s_p(t) \quad \iota_{np}(t) = I^{n-p}(t)$$

et

$$\beta_n = \beta_{n(n+1)} \quad \sigma_n = \sigma_{n(n+1)} \quad \iota_n = \iota_{(n+1)n}$$

On voit que : $((\mathcal{M}_n(\mathbb{S}))_n, (\beta_n, \sigma_n, \iota_n)_n)$ est un ∞ -graphe réflexif (grâce à la proposition précédente). Si on munit en plus ce graphe réflexif des lois de composition : $\circ_q^n : \star_q M_n(\mathbb{S}) \rightarrow M_n(\mathbb{S}), (t_1, t_0) \mapsto t_1 \star_q t_0$ alors :

$\mathcal{M}(\mathbb{S}) = ((\mathcal{M}_n(\mathbb{S}))_n, (\beta_n, \sigma_n, \iota_n)_n, (\circ_p^n)_{p,n})$ est un ∞ -magma.

• Nous verrons un peu plus loin que de tels ∞ -magmas vont nous permettre de construire l' ∞ -magma libre sur un ∞ -graphe réflexif.

§3. Diagramme sur un ∞ -magma

• Il nous faut maintenant faire des "liaisons" entre des s.c.c. et des ∞ -catégories ou entre des s.c.s. et des ∞ -magmas. On va appeler de telles liaisons des diagrammes. Ce sont elles qui vont permettre de montrer les différentes propriétés universelles abordées ici.

• Mais avant cela, si $\mathbb{M} = ((M_n)_n, (b_n, s_n, \iota_n)_n, (\circ_p^n)_{p,n})$ est un ∞ -magma il nous faut parler de sa globalisation, notée $\text{glob}(\mathbb{M})$. Elle est le pendant sémantique de l'utilisation des termes (généraux) dans notre approche syntaxique.

On pose :

$$\text{glob}(\mathbb{M}) = \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} M_n \right) \cup \{\omega\} \quad (\text{où } \omega = (\infty, \infty) \notin \coprod_n M_n)$$

(ω est un élément "poubelle" dont le seul rôle est d'éliminer tout ce qui est mal construit). On définit aussi $\text{dim} : \text{glob}(\mathbb{M}) \rightarrow \bar{\mathbb{N}}, (x, n) \mapsto n$.

On munit $\text{glob}(\mathbb{M})$ des applications suivantes :

- $\iota : \text{glob}(\mathbb{M}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$, défini par :

$$\iota(x, n) = (\iota_n(x), n+1) \quad \text{si } n < +\infty \quad \text{et} \quad \iota(\omega) = \omega$$

- $b_p, s_p : \text{glob}(\mathbb{M}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$ où $p \in \mathbb{N}$, définis par :

$$b_p(x, n) = (b_{pn}(x), p), \quad s_p(x, n) = (s_{pn}(x), p) \quad \text{si } p < n < +\infty$$

$$b_p(x, n) = (x, n) = s_p(x, n) \quad \text{si } p = n$$

$$b_p(x, n) = (\iota_{pn}(x), p) = s_p(x, n) \quad \text{si } p > n$$

$$b_p(\omega) = s_p(\omega) = \omega$$

- $\circ_q : \text{glob}(\mathbb{M}) \times \text{glob}(\mathbb{M}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$ où $q \in \mathbb{N}$, défini par :

$$(x_1, n_1) \circ_q (x_0, n_0) = (x_1 \circ_q^{n_0} x_0, n_0) \quad \text{si } q < n_1 = n_0 < +\infty \quad \text{et si}$$

$$s_q(x_1, n_1) = b_q(x_0, n_0)$$

$$(x_1, n_1) \circ_q (x_0, n_0) = \omega \quad \text{sinon}$$

- Enfin on va noter $\text{glob}(\mathbb{M})_n = \{X \in \text{glob}(\mathbb{M}) / \dim(X) = n\}$.

• Soit maintenant $\mathbb{S} = (\mathbb{C}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{C}$ est une donnée cellulaire et $\mathbb{P}$ un b -positionnement sur $\mathbb{C}$. Notons $\mathcal{C}(\mathbb{S})$ l'ensemble des constantes de $\mathbb{S}$.

Toute application $D : \mathcal{C}(\mathbb{S}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$ peut être prolongée, par induction, à $\mathcal{T}^b(\mathbb{C})$ tout entier en posant :

$$D(I(\theta)) = \imath D(\theta) \quad \text{et} \quad D(\theta_1 \star_q \theta_0) = D(\theta_1) \circ_q D(\theta_0)$$

On dit que D est un diagramme $\mathbb{S} \dashrightarrow \mathbb{M}$ si D satisfait les deux conditions suivantes, pour tout $c \in \mathcal{C}(\mathbb{S})$:

$$(i) \dim D(c) = \dim(c)$$

$$(ii) \forall p < \dim(c) \quad b_p D(c) = D b_p(c) \quad s_p D(c) = D s_p(c)$$

- On montre que pour un diagramme les conditions précédentes se généralisent à $\hat{\mathcal{T}}^b(\mathbb{S})$.

De façon précise, si $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$ alors :

$$1. \dim D(t) = n$$

$$2. \text{ pour } p < n, \quad D b_p(t) = b_p D(t) \quad D s_p(t) = s_p D(t)$$

Lorsque $\mathbb{S}$ est un s.c.s. on peut considérer la suite :

$d = (d_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{S}) \rightarrow \mathcal{M}_n)_{n \geq 0}$ où d_n est le composé suivant :

$$\hat{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S}) \xrightarrow{D_n} \text{glob}(\mathbb{M})_n \xrightarrow{\sim} M_n$$

et D_n est la restriction voulue de D .

On voit immédiatement que d est un morphisme d' ∞ -magmas $\mathcal{M}_n(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{M}$. on montre alors que l'application :

$$\begin{aligned} \text{Diag}(\mathbb{S}, \mathbb{M}) &\longrightarrow \infty\text{-Mag}(\mathcal{M}(\mathbb{S}), \mathbb{M}) \\ D &\longmapsto d \end{aligned}$$

est bijective

(où $\text{Diag}(\mathbb{S}, \mathbb{M})$ désigne l'ensemble des diagrammes $\mathbb{S} \dashrightarrow \mathbb{M}$) l'antécédent d'un d est l'application $D : \mathcal{C}(\mathbb{S}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$, $c \mapsto (d_n(c), n)$ où $n = \dim(c)$.

Grâce aux diagrammes on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition : *Le foncteur d'oubli $\mathcal{V} : \infty\text{-}\mathbb{M}ag \rightarrow \infty\text{-}\mathbb{G}rr$ admet un adjoint à gauche $\mathcal{N} : \infty\text{-}\mathbb{G}rr \rightarrow \infty\text{-}\mathbb{M}ag$.*

Preuve : Il est donné par $\mathcal{N}(\mathbb{G}) = \mathcal{MS}(\mathbb{G})$.

Le morphisme universel $u : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{VN}(\mathbb{G})$ est donné par :

$$u_n(c) = I^{n-n'} e_n(c) \quad \text{où } n' = \partial(c)$$

Pour la propriété universelle, si $h : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{V}(\mathbb{M})$ est un morphisme de $\infty\text{-}\mathbb{G}rr$, où $\mathbb{M}$ est un ∞ -magma, on définit le diagramme $K : S(\mathbb{G}) \dashrightarrow \mathbb{M}$ en posant $K(c, n) = (h_n(c), n)$.

Il lui correspond alors un morphisme $k : \mathcal{N}(\mathbb{G}) \xrightarrow{Id} \mathcal{MS}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{M}$ d'après ce qui précède. on constate que c'est l'unique morphisme voulu.

• Revenons maintenant à $\mathbb{S} = ((\mathcal{C}, \dim), \mathbb{P})$ où $(\mathcal{C}, \dim)$ est une donnée cellulaire et $\mathbb{P}$ un b -positionnement sur $(\mathcal{C}, \dim)$. Soit aussi une ∞ -catégorie $\mathbb{C}$ (c'est donc, en particulier, un ∞ -magma) et $D : \mathbb{S} \dashrightarrow \mathbb{C}$ un diagramme. Alors les identités (i) et (ii) se prolongent aussi à $\tilde{\mathcal{T}}^b(\mathbb{S})$. De façon précise :

1. Si $t \in \tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$ on a :

$$(a) \dim D(t) = n$$

$$(b) \text{ pour } p < n, \quad Db_p(t) = b_p D(t), \quad Ds_p(t) = s_p D(t)$$

2. si $t_1, t_0 \in \tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})$ on a :

$$t_1 \equiv t_0 \Rightarrow D(t_1) = D(t_0)$$

- Lorsque $\mathbb{S}$ est un s.c.c. la propriété (2.) ci-dessus nous permet de passer au quotient les applications $\tilde{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S}) \xrightarrow{D_n} \text{glob}(\mathbb{C})_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_n$ (où D_n désigne la restriction voulue de D). On obtient ainsi une suite d'applications $\delta = (\delta_n : K(\mathbb{S})_n \rightarrow \mathbb{C}_n)$ et l'on vérifie qu'elle définit un morphisme $K(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{C}$. On montre, là encore, que l'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc} \text{Diag}(\mathbb{S}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \infty\text{-}\mathbb{C}at(K(\mathbb{S}), \mathbb{C}) \\ D & \longmapsto & \delta \end{array}$$

L'antécédent de δ est donné par l'application $D : \mathcal{C}(\mathbb{S}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{C}), c \mapsto (\delta_n q_n(c), n)$ où $n = \dim(c)$.

on est maintenant en mesure de montrer la proposition suivante :

Proposition : *Le foncteur d'oubli $U : \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Grr}$ admet un adjoint à gauche $C : \infty\text{-Grr} \rightarrow \infty\text{-Cat}$.*

Preuve : C est défini sur les objets par $C(\mathbb{G}) = KS(\mathbb{G})$. le morphisme universel $\eta : \mathbb{G} \rightarrow UC(\mathbb{G})$ est donné par :

$$\eta_n(c) = q_n(I^{n-n'} e_n(c)) \quad \text{où } n' = \partial(c)$$

Pour la propriété universelle on utilise les correspondances bijectives :

$$\begin{aligned} \infty\text{-Grr}(\mathbb{G}, U(\mathbb{C})) &\simeq \infty\text{-Mag}(\mathcal{MS}(\mathbb{G}), \mathbb{C}) \\ &\simeq \text{Diag}(S(\mathbb{G}), \mathbb{C}) \\ &\simeq \infty\text{-Cat}(KS(\mathbb{G}), \mathbb{C}) \end{aligned}$$

§4. Les systèmes cellulaires étirants.

• Le but maintenant est d'avoir une description du foncteur adjoint à gauche $\mathcal{E}$ au foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathbb{E}t \rightarrow \mathbb{P}ret$. Pour cela nous aurons besoin d'un autre type de langage (que le langage cellulaire basique) c'est ce que nous allons appeler le langage cellulaire étirant (il sera noté par le suffixe "e")

• On appelle langage cellulaire étirant le langage formé :

- d'un symbole binaire Δ (il correspond au $[\cdot, \cdot]_n$ des étirements),
- d'une suite de symboles binaires : $(\star_q)_{q \in \mathbb{N}}$

A toute donnée cellulaire $\mathbb{C} = (\mathcal{C}, \dim)$ (voir le §1.) on lui fait correspondre, comme pour le précédent langage, l'ensemble $\mathcal{T}^e(\mathbb{C})$ (ou simplement $\mathcal{T}^e$) de ses termes. On prolonge ensuite l'application dimension aux termes, comme précédemment. On le fait par induction sur leur longueur.

- si $t = t_1 \Delta t_0$, $\dim(t) = \sup(\dim(t_1), \dim(t_0)) + 1$
- si $t = t_1 \star_q t_0$, $\dim(t) = \sup(\dim(t_1), \dim(t_0), q + 1)$

Notons $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_n^e(\mathbb{C})$ l'ensemble des constantes et des termes de dimension n .

• Un e -positionnement sur la donnée cellulaire $\mathbb{C}$ est une suite d'applications : $\mathbb{P} = (b_p, s_p : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{T}^e(\mathbb{C}))_{p \in \mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions (habituelles) suivantes :

- $\dim s_p(c) = \dim b_p(c) = p$ pour tout $c \in \mathcal{C}$,
- $s_p(c) = b_p(c) = \hat{I}^{p-n}(c)$ si $p \geq n = \dim(c)$. (où $\hat{I}(t) = t\Delta t$ et $\hat{I}^k(t)$ est défini par $\hat{I}^0(t) = t$ et $\hat{I}^{k+1}(t) = \hat{I}(\hat{I}^k(t))$)

On prolonge s_p et b_p à $\mathcal{T}^e(\mathbb{C})$ tout entier par induction sur la longueur des termes.

Pour $t \in \mathcal{T}^e(\mathbb{C})$ on pose :

- . si $\dim(t) \leq p$, $s_p(t) = b_p(t) = \hat{I}^{p-n}(t)$ (où $n = \dim(t)$)
- . si $\dim(t) > p$,
 - .. si $t = t_1 \Delta t_0$, $s_p(t) = s_p(t_0)$, $b_p(t) = b_p(t_1)$
 - .. si $t = t_1 \star_q t_0$,
 - ... si $p \leq q$, $s_p(t) = s_p(t_0)$, $b_p(t) = b_p(t_1)$
 - ... si $p > q$, $s_p(t) = s_p(t_1) \star_q s_p(t_0)$, $b_p(t) = b_p(t_1) \star_q b_p(t_0)$
- Là encore, on montre, par induction sur la longueur de t , que

$$\dim s_p(t) = \dim b_p(t) = p$$

• Soit $\mathbb{S} = (\mathbb{C}, \mathbb{P})$ une donnée cellulaire munie d'un e -positionnement. Comme pour le langage cellulaire basique tous les termes ne sont pas bons. on construit pour cela les termes strictement bien formés de $\mathbb{C}$.

Ils forment une famille de sous-ensembles $\hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S})$ de $\mathcal{T}_n^e(\mathbb{C})$ que l'on définit par induction sur la dimension et la longueur des termes.

Soit $t \in \mathcal{T}_n^e(\mathbb{C})$,

- . pour $n = 0$, $t \in \hat{\mathcal{T}}_0^e(\mathbb{S})$ ssi $t \in \mathcal{T}_0^e(\mathbb{C})$ (c.a.d. $t \in \mathcal{C}_0(\mathbb{C})$)
- . pour $n > 0$,

$$\text{.. si } t \in \mathcal{C}, t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S}) \text{ ssi } \forall p < n \quad s_p(t), b_p(t) \in \hat{\mathcal{T}}_p^e(\mathbb{S})$$

$$\text{.. si } t = t_1 \Delta t_0, t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S}) \text{ ssi } t_1, t_0 \in \hat{\mathcal{T}}_{n-1}^e(\mathbb{S}) \text{ et } t_1 \parallel t_0$$

(où $t_1 \parallel t_0$ signifie $t_1 = t_0$ si $n - 1 = 0$ et $s_{n-2}(t_1) = s_{n-2}(t_0)$ et $b_{n-2}(t_1) = b_{n-2}(t_0)$ si $n - 1 > 0$).

$$\text{.. si } t = t_1 \star_q t_0, t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S}) \text{ ssi } t_1, t_0 \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S}) \text{ et } s_q(t_1) = b_q(t_0)$$

- On dit que $\mathbb{S} = (\mathbb{C}, \mathbb{P})$ est un **système cellulaire étirant** si :

$$1. \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{C}_n \subset \hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S})$$

$$2. \forall n, p, q \in \mathbb{N}, q < p < n, \forall c \in \mathcal{C}_n,$$

$$s_q s_p(c) = s_q b_p(c) = s_q(c)$$

$$b_q b_p(c) = b_q s_p(c) = b_q(c)$$

- Comme pour les s.c.s., on montre par induction, sur la dimension et la longueur des termes que lorsque $\mathbb{S}$ est un s.c.e., pour tout $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S})$,

$$1. \text{ si } p < n, b_p(t), s_p(t) \in \hat{\mathcal{T}}_p^e(\mathbb{S}),$$

$$2. \text{ si } q < p < n,$$

$$s_q s_p(t) = s_q b_p(t) = s_q(t)$$

$$b_q b_p(t) = b_q s_p(t) = b_q(t)$$

• Pourtant, ce ne sont pas les s.c.e. qui vont nous intéresser ici ni même les termes de $\hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S})$. Pour obtenir le résultat attendu (la construction du foncteur $\mathcal{E}$), il nous faudra considérer une sous-classe $\hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ de $\hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S}^e)$ dépendant d'un diagramme $D : \mathbb{S} \dashrightarrow \mathbb{M}$ où $\mathbb{S}$ est un s.c.s. et $\mathbb{M}$ un ∞ -magma.

• Soit $\mathbb{S} = (\mathbb{C}, \mathbb{P})$ un s.c.s., $\mathbb{P} = (s_n, b_n : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{T}_n^b(\mathbb{C}))_n$ étant son b -positionnement. On va lui faire correspondre un s.c.e. $\mathbb{S}^e$.

On le construit comme suit :

Tout d'abord, soit $\Phi : \mathcal{T}^b(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{T}^e(\mathbb{C})$ définie par induction sur la longueur des termes par :

$$\cdot \text{ si } t \in \mathcal{C}, \Phi(t) = t$$

$$\cdot \text{ si } t = I(t'), \Phi(t) = \Phi(t') \Delta \Phi(t')$$

$$\cdot \text{ si } t = t_1 \star_q t_0, \Phi(t) = \Phi(t_1) \star_q \Phi(t_0)$$

- On montre que $\forall t \in \mathcal{T}^b(\mathbb{C}), \dim \Phi(t) = \dim(t)$.

Notons alors Φ_n la restriction de Φ à $\mathcal{T}_n^b(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{T}_n^e(\mathbb{C})$.

On considère ensuite les deux applications composées :

$$\hat{s}_n = (\mathcal{C} \xrightarrow{s_n} \mathcal{T}_n^b(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi_n} \mathcal{T}_n^e(\mathbb{C}))$$

$$\hat{b}_n = (\mathcal{C} \xrightarrow{b_n} \mathcal{T}_n^b(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi_n} \mathcal{T}_n^e(\mathbb{C}))$$

La famille $\mathbb{P}^e = (\hat{s}_n, \hat{b}_n : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{T}_n^e(\mathcal{C}))$ forme un e -positionnement sur $\mathcal{C}$.
 Notons $\mathbb{S}^e = (\mathcal{C}, \mathbb{P}^e)$. On vérifie que, pour tout $t \in \mathcal{T}_n^b(\mathcal{C})$ et $p < n$ on a :

$$\hat{b}_p \Phi(t) = \Phi b_p(t) \quad , \quad \hat{s}_p \Phi(t) = \Phi s_p(t)$$

On a aussi $\Phi(\hat{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})) \subset \hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S}^e)$

De cela, on en déduit que $\mathbb{S}^e = (\mathcal{C}, \mathbb{P}^e)$ est un s.c.e.

• Soit maintenant $D : \mathbb{S} \dashrightarrow \mathbb{M}$ un diagramme où $\mathbb{S}$ est un s.c.s. et $\mathbb{M}$ un ∞ -magma. On sait que $D : \mathcal{C} \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$ est une application qui se prolonge à $\mathcal{T}^b(\mathcal{C})$. Montrons qu'elle se prolonge aussi à $\mathcal{T}^e(\mathcal{C})$.

- Pour cela on commence par munir, en plus, $\text{glob}(\mathbb{M})$ de la loi de composition interne $\Delta : \text{glob}(\mathbb{M}) \times \text{glob}(\mathbb{M}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$ définie par :

$$X \Delta Y = \iota(X) \quad \text{si} \quad X = Y \quad \text{et} \quad X \Delta Y = \omega \quad \text{si} \quad X \neq Y$$

Alors l'application $D : \mathcal{C} \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$ se prolonge aussi à $\mathcal{T}^e(\mathcal{C})$ par induction sur la longueur des termes.

Notons $\hat{D} : \mathcal{T}^e(\mathcal{C}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$ ce prolongement. Il est défini par :

$$\hat{D}(t_1 \Delta t_0) = \hat{D}(t_1) \Delta \hat{D}(t_0) \quad \text{et} \quad \hat{D}(t_1 \star_q t_0) = \hat{D}(t_1) \circ_q \hat{D}(t_0)$$

On vérifie que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^b(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{T}^e(\mathcal{C}) \\ & \searrow D \quad \swarrow \hat{D} & \\ & \text{glob}(\mathbb{M}) & \end{array}$$

Il en résulte que, pour tout $c \in \mathcal{C}$,

$$s_p \hat{D}(c) = \hat{D} \hat{s}_p(c) \quad , \quad b_p \hat{D}(c) = \hat{D} \hat{b}_p(c)$$

• Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on va construire, par induction sur la dimension et la longueur des termes, un nouveau sous-ensemble $\hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ de $\mathcal{T}_n^e(\mathcal{C})$.

• si $n = 0$, $\hat{\mathcal{T}}_0^e(D) = \hat{\mathcal{T}}_0^e(\mathbb{S}^e) = \mathcal{C}_0(\mathbb{S})$

• si $n > 0$, soit $t \in \mathcal{T}_n^e(\mathcal{C})$,

.. si $t \in \mathcal{C}$, alors $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$

.. si $t = t_1 \Delta t_0$, alors
 $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ ssi $t_1, t_0 \in \hat{\mathcal{T}}_{n-1}^e(D)$, $t_1 \parallel t_0$ et $\hat{D}(t_1) = \hat{D}(t_0)$
 .. si $t = t_1 \star_q t_0$, alors
 $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ ssi $t_1, t_0 \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ et $\hat{s}_q(t_1) = \hat{b}_q(t_0)$
 - On vérifie que $\Phi(\hat{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S})) \subset \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ puis que : $\hat{\mathcal{T}}_n^e(D) \subset \hat{\mathcal{T}}_n^e(\mathbb{S}^e)$.
 On montre ensuite que si $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ et $p < n$ alors $\hat{b}_p(t), \hat{s}_p(t) \in \hat{\mathcal{T}}_p^e(D)$.
 Enfin on vérifie que pour tout $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$,

$$1. \dim \hat{D}(t) = n$$

$$2. b_p \hat{D}(t) = \hat{D} \hat{b}_p(t), s_p \hat{D}(t) = \hat{D} \hat{s}_p(t) \text{ pour } p < n.$$

• On est maintenant en mesure de résoudre le problème universel suivant :

Proposition: *Etant donné un s.c.s. $\mathbb{S}$, un ∞ -magma $\mathbb{M}$ et $d : \mathcal{M}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{M}$ un morphisme d' ∞ -magma, il existe un étirement $(\mathbb{M}, \mathbb{E}, p, [,]_n)$ et un morphisme d' ∞ -magmas $\phi : \mathcal{M}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{E}$ qui fait commuter le triangle suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(\mathbb{S}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{E} \\
 & \searrow d \quad \swarrow p & \\
 & \mathbb{M} &
 \end{array} \quad (*)$$

et qui sont universels pour cette propriété. C'est à dire, si $(\mathbb{M}, \mathbb{E}', p', [,]_n)$ est une autre étirement et $\phi' : \mathcal{M}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{E}'$ est un morphisme d' ∞ -magmas tel que $p' \cdot \phi' = d$, il existe un unique morphisme d' ∞ -magmas $e : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tel que :

$(Id_{\mathbb{M}}, e) : (\mathbb{M}, \mathbb{E}, p, [,]_n) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathbb{E}', p', [,]_n)$ soit un morphisme de étirements et tel que le triangle suivant commute dans $\infty\text{-Mag}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(\mathbb{S}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{E} \\
 & \searrow \phi' \quad \swarrow e & \\
 & \mathbb{E}' &
 \end{array}$$

preuve: $D : \mathbb{S} \dashrightarrow \mathbb{M}$ désignant le diagramme correspondant à d , notons $E_n = \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ et $\beta_n, \sigma_n : E_{n+1} \rightrightarrows E_n$, $t \mapsto \hat{b}_n(t), \hat{s}_n(t)$, $\iota_n : E_n \rightarrow E_{n+1}$, $t \mapsto t \Delta t$ puis $\circ_p^n : \star E_n \rightarrow E_n$, $(t_1, t_0) \mapsto t_1 \star_p t_0$.

Alors $\mathbb{E} = ((E_n)_n, (\beta_n, \sigma_n, \iota_n)_n, (\circ_p^n)_{p,n})$ forme un ∞ -magma.

De plus si ϕ_n désigne la restriction de Φ à $\hat{\mathcal{T}}_n^b(\mathbb{S}) \rightarrow \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$ on a ainsi une suite d'applications : $(\phi_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{S}) \rightarrow E_n)_n$ qui définit un morphisme d' ∞ -magmas $\phi : \mathcal{M}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{E}$.

Appelons p_n l'application composé :

$$\hat{\mathcal{T}}_n^e(D) \xrightarrow{\hat{D}_n} \text{glob}(\mathbb{M})_n \xrightarrow{\sim} M_n$$

(où $\hat{D}_n$ est la restriction de $\hat{D}$).

On construit comme cela un morphisme d' ∞ -magmas $p : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}$. On vérifie qu'on a alors le triangle commutatif $(*)$ désiré (car $\hat{D} \cdot \Phi = D$).

On peut enfin munir p d'une structure d'étirement en posant,

pour $(t_1, t_0) \in \tilde{\mathbb{E}}_n$, $[t_1, t_0]_n = t_1 \Delta t_0$ (ce qui a un sens car $\hat{D}(t_1) = \hat{D}(t_0)$).

On vérifie facilement les trois axiomes des étirements.

Montrons maintenant que cet étirement est universel. donnons nous un nouvel étirement et un morphisme ϕ' comme dans l'énoncé.

Il nous faut construire un morphisme $e : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ dans $\infty\text{-Mag}$.

Pour cela munissons $\text{glob}(\mathbb{E}')$ d'une nouvelle loi de composition $\square$, en posant :

$(x, n) \square (y, m) = ([x, y]_n, n + 1)$ si $n = m < +\infty$, $x \parallel y$ et $p'_n(x) = p'_n(y)$ et $(x, n) \square (y, m) = \omega$ sinon.

Considérons aussi l'application $P' : \text{glob}(\mathbb{E}') \rightarrow \text{glob}(\mathbb{M})$ définie par :

$P'(x, n) = (p'_n(x), n)$ si $n < +\infty$ et $P'(\omega) = \omega$.

D'autre part au morphisme d' ∞ -magmas $\phi' : \mathcal{M}(\mathbb{S}) \rightarrow \mathbb{E}'$ correspond un diagramme $\Phi' : \mathbb{S} \dashrightarrow \mathbb{E}'$.

L'application $\Phi' : \mathcal{C} \rightarrow \text{glob}(\mathbb{E}')$ se prolonge d'un côté aux " b -termes",

$\Phi' : \mathcal{T}^b(\mathcal{C}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{E}')$ (où $\mathcal{C}$ est la donnée cellulaire de $\mathbb{S}$)

et d'un autre côté aux " e -termes", $\hat{\Phi}' : \mathcal{T}^e(\mathcal{C}) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{E}')$ en posant :

$$\hat{\Phi}'(t_1 \Delta t_0) = \hat{\Phi}'(t_1) \square \hat{\Phi}'(t_0) \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}'(t_1 \star_q t_0) = \hat{\Phi}'(t_1) \circ_q \hat{\Phi}'(t_0)$$

On vérifie que $\hat{\Phi}' \cdot \Phi = \Phi'$.

On montre ensuite que pour tout $t \in \hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$,

1. $\dim \hat{\Phi}'(t) = n$
2. $b_p \hat{\Phi}'(t) = \hat{\Phi}' b_p(t)$, $s_p \hat{\Phi}'(t) = \hat{\Phi}' s_p(t)$
3. $P' \hat{\Phi}'(t) = \hat{D}(t)$

En conséquence : $\hat{\Phi}'(\hat{\mathcal{T}}_n^e(D)) \subset \text{glob}(\mathbb{E}')_n$.

Si $\hat{\Phi}'_n$ désigne la restriction de $\hat{\Phi}'$ à $\hat{\mathcal{T}}_n^e(D) \rightarrow \text{glob}(\mathbb{E}')_n$, on pose :

$$e_n = \left(E_n \xrightarrow{\hat{\Phi}'_n} \text{glob}(\mathbb{E}')_n \xrightarrow{\sim} E'_n \right)$$

$e = (e_n)$ est un morphisme d' ∞ -magmas $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ et $p' \cdot e = p$ (car $P' \hat{\Phi}' = \hat{D}$).

Enfin on vérifie immédiatement que $(Id_{\mathbb{M}}, e)$ est un morphisme d'étirements.

On vérifie aussi que $e \cdot \phi = \phi'$ (car $\hat{\Phi}' \cdot \Phi = \Phi'$).

L'unicité de e se montre par induction sur la longueur des termes de $\hat{\mathcal{T}}_n^e(D)$.

• Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante (énoncé au chapitre I) :

Proposition : *Le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \infty\text{-}\mathbb{E}t \rightarrow \infty\text{-}\mathbb{P}ret$ admet un adjoint à gauche (noté $\mathcal{E}$)*

Preuve :

Soit $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \gamma)$ un objet de $\mathbb{P}ret$. Construisons $\mathcal{E}(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \gamma)$. Au morphisme $\gamma : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{V}(\mathbb{M})$ dans $\infty\text{-}\mathbb{G}rr$ correspond un morphisme $\mathcal{N}(\mathbb{G}) \xrightarrow{d} \mathbb{M}$ d' ∞ -magmas, par l'adjonction $\mathcal{N} \dashv \mathcal{V} : \infty\text{-}\mathbb{M}ag \rightleftarrows \infty\text{-}\mathbb{G}rr$ tel que le triangle suivant commute dans $\infty\text{-}\mathbb{G}rr$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{G} & \\ u \swarrow & & \searrow \gamma \\ \mathcal{V}\mathcal{N}(\mathbb{G}) & \xrightarrow{\mathcal{V}(d)} & \mathcal{V}(\mathbb{M}) \end{array}$$

Grâce à ce que nous avons montré précédemment, à partir du morphisme $d : \mathcal{MS}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{M}$, il existe un étirement $\mathcal{E} = (\mathbb{M}, \mathbb{E}, p, ([,]_n))$ et un morphisme $\phi : \mathcal{MS}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{E}$ d' ∞ -magmas tel que $p \cdot \phi = d$ et qui rend $\mathcal{E}$ universelle.

Notons $a : \left(\mathbb{G} \xrightarrow{u} \mathcal{V}\mathcal{N}(\mathbb{G}) \xrightarrow{\mathcal{V}(\phi)} \mathcal{V}(\mathbb{E}) \right)$.

Alors : $\mathcal{V}(p) \cdot a = \mathcal{V}(p) \cdot \mathcal{V}(\phi) \cdot u = \mathcal{V}(d) \cdot u = \gamma$
 et donc $(Id_{\mathbb{M}}, a) : (\mathbb{M}, \mathbb{G}, \gamma) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{V}(\mathbb{E}), \mathcal{V}(p)) = \mathcal{U}(\mathcal{E})$ est un morphisme dans $\mathbb{P}ret$.

Montrons qu'il est universel.

- Soit $\mathcal{E}' = (\mathbb{M}', \mathbb{E}', p', ([,]_n))$ un autre étirement et $(m, a') : (\mathbb{M}, \mathbb{G}, \gamma) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{E}')$ un morphisme dans $\mathbb{P}ret$.

Montrons qu'il existe un unique morphisme d' ∞ -magmas $e : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tel que $(m, e) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ soit un morphisme d'étirement et tel que le triangle suivant commute dans $\mathbb{P}ret$:

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbb{M}, \mathbb{G}, \gamma) & \\ (Id_{\mathbb{M}}, a) \swarrow & & \searrow (m, a') \\ \mathcal{U}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{E}') \end{array} \quad (T)$$

Soit $\Psi' : \mathcal{N}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{E}'$ le morphisme d' ∞ -magmas correspondant au morphisme $a' : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{V}(\mathbb{E}')$ dans $\infty\text{-Grr}$, par l'adjonction $\mathcal{N} \dashv \mathcal{V} : \infty\text{-Mag} \rightleftarrows \infty\text{-Grr}$.

Alors le carré suivant commute dans $\infty\text{-Mag}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}(\mathbb{G}) & \xrightarrow{\Psi'} & \mathbb{E}' \\ d \downarrow & & \downarrow p' \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{m} & \mathbb{M}' \end{array} \quad (C)$$

(par l'unicité de la propriété universelle précédente).

Considérons le produit fibré suivant dans $\infty\text{-Mag}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}'' & \xrightarrow{e'} & \mathbb{E}' \\ p'' \downarrow & & \downarrow p' \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{m} & \mathbb{M}' \end{array}$$

On vérifie facilement qu'on peut munir p'' d'une structure d'étirement (notée $\mathcal{E}''$) telle que $(m, e') : \mathcal{E}'' \rightarrow \mathcal{E}'$ soit un morphisme d'étirements. La commutation du carré (C) entraîne donc l'existence d'une unique flèche $\phi' : \mathcal{MS}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{E}''$ dans $\infty\text{-Mag}$ telle que $p'' \cdot \phi' = d$ et $e' \cdot \phi' = \Psi'$.

On peut maintenant utiliser la propriété universelle de $\mathcal{E}$ démontrée précédemment. Il existe donc un unique morphisme $e'' : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}''$ dans $\infty\text{-Mag}$ tel que $(Id_{\mathbb{M}}, e'') : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}''$ soit un morphisme d'étirements et tel que $e'' \cdot \phi = \phi'$.

Soit $e = (\mathbb{E} \xrightarrow{e''} \mathbb{E}'' \xrightarrow{e'} \mathbb{E}')$. Alors $(m, e) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est un morphisme d'étirements (par composition). On constate que le triangle suivant commute dans $\infty\text{-Grr}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{G} & \\
 a \swarrow & & \searrow a' \\
 \mathcal{V}(\mathbb{E}) & \xrightarrow{\mathcal{V}(e)} & \mathcal{V}(\mathbb{E}')
 \end{array}$$

car :

$$\mathcal{V}(e) \cdot a = \mathcal{V}(e') \cdot \mathcal{V}(e'') \cdot \mathcal{V}(\phi) \cdot u = \mathcal{V}(e') \cdot \mathcal{V}(\phi') \cdot u = \mathcal{V}(\Psi') \cdot u = a'$$

Ainsi, en d'autres termes, le triangle (T) commute.

L'unicité de $(m, e) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ et donc de e , résulte de l'unicité de $e'' : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}''$ et de $\phi' : \mathcal{N}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{E}''$.

c.q.f.d.

Références

- [1] J. BAEZ and J. DOLAN. Higher Dimensional Algebra III: n -Categories and the Algebra of Opetopes. preprint, 1997. pp 1-59.
- [2] M.A. BATANIN. Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n -categories. (non encore publié).
- [3] M.A. BATANIN. On the definition of weak ω -category. *Macquarie University Report*, 96(207): 24, 1996.
- [4] J. BENABOU. Introduction to bicategories. *LNM*, 47: pp 1–77, 1967.
- [5] D. BOURN. Another denormalization theorem for abelian chain complexes. *J.P.A.A.*, 66: 229–249, 1990.
- [6] A. BURRONI. Le concept de multi-span a fait l'objet d'exposés oraux non-publiés par A. BURRONI. Il m'avait suggéré que les multi-spans devaient former une " ∞ -catégorie non-strict".
- [7] A. BURRONI. Esquisses des catégories à limites et des quasitopologies. Thèse de troisième cycle, 1970. Esquisses Math. 5, Paris.
- [8] A. BURRONI. Higher-dimensional word problems with applications to equational logic. *Theoretical Computer Science*, 115: 43–62, 1993.
- [9] P. CARTIER. Conférence sur les "multicatégories" donnée à l'I.H.E.S. Paris, 1994. (où il a appelé les n -spans des télescopes de hauteur n).
- [10] L. COPPEY and C. LAIR. Leçons de théorie des esquisses. *I. Diagrammes*, Vol-12, 1984.
- [11] C. EHRESMANN. Problèmes universels relatifs aux catégories n -aires. *CRAS*, t 264: pp 273–276, Paris 1967.
- [12] F. FOLTZ. Sur la catégorie des foncteurs dominés. *CTGD*, XI: 2, Paris 1969.
- [13] S. MAC LANE. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, 1971. Graduate Texts in Mathematics N°5.

- [14] J. PENON. 2-catégories non strictes et bicatégories. exposé au S.I.C., Mars 1998.
- [15] R. STREET. The algebra of oriented simplexes. *J. Pure Appl. Algebra*, 43: pp.235–242, 1986.
- [16] R. STREET. Parity complexes. *Macquarie University Report*, 88-0015, 1988.
- [17] Z. TAMSAMANI. *Sur des notions de n -catégorie et n -goupoïde non strictes via des ensembles multi-simpliciaux*. Phd. thèse, Université Paul Sabatier, 1995.

Université de Paris 7
Département de mathématiques
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05