

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

R. GUITART

J. RIGUET

## **Enveloppe karoubienne de catégories de Kleisli**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 33, n° 3 (1992), p. 261-266

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1992\\_\\_33\\_3\\_261\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_261_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# Enveloppe Karoubienne de Catégories de Kleisli

R. Guitart et J. Riguet<sup>1</sup>

ABSTRACT : We show that the karoubian envelope of the category of correspondances is equivalent to the category of sup-compatible mappings between complete completely distributive lattices.

On sait que l'enveloppe karoubienne permet de ramener les notions semi-fonctorielles à des notions fonctorielles, et en particulier produit des catégories cartésiennes fermées à partir de catégories faiblement cartésiennes fermées, ce qui est utilisé en théorie des domaines pour obtenir des modèles de la logique linéaire. Voir [2], [3].

On sait aussi que la modélisation et la manipulation algébrique de systèmes informatiques fait appel à des correspondances de Galois analysables et généralisables en termes de transversalité de correspondances difonctionnelles. Voir [9].

Enfin on sait que Raney a établi un lien étroit entre les "tight" correspondances de Galois et les treillis complètement distributifs, qui sont des treillis continus particuliers. Voir [5, 6, 7] et [1].

Le lien entre ces divers aspects est élucidé ici par la description concrète de l'enveloppe karoubienne de la catégorie des correspondances  $Cor \cong KIP$ .

Pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  on appelle *enveloppe karoubienne* de  $\mathcal{C}$  (voir [4]) et on note  $K\mathcal{C}$  ou  $K(\mathcal{C})$  la catégorie ayant pour objets les couples  $(C, e)$  où  $e : C \rightarrow C \in \text{ar}\mathcal{C}$  est idempotent (i.e.  $e.e = e$ ), et pour morphismes de  $(C_1, e_1)$  vers  $(C_2, e_2)$  les  $f : C_1 \rightarrow C_2 \in \text{ar}\mathcal{C}$  tels que  $f.e_1 = f = e_2.f$ . Un objet  $(C, e)$  de  $K\mathcal{C}$  est dit *scindable* s'il existe, dans  $\mathcal{C}$ ,  $r : C \rightarrow I$  et  $s : I \rightarrow C$

---

<sup>1</sup>Paris 7 et Paris 5

tels que  $s.r = e$ , et  $r.s = Id_I$ . Alors  $I \cong \ker(Id_C, e) \cong \text{coker}(Id_C, e)$  est noté  $e[C]$ . On note  $K_{sc}\mathcal{C}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  ayant pour objets les objets scindables de  $K\mathcal{C}$ . Le foncteur canonique  $can : \mathcal{C} \rightarrow K\mathcal{C}$  qui à  $C$  associe  $(C, Id_C)$  est à valeurs dans  $K_{sc}\mathcal{C}$  et détermine une équivalence entre  $\mathcal{C}$  et  $K_{sc}\mathcal{C}$ , mais en général ces deux catégories ne sont pas isomorphes. En général  $K\mathcal{C}$  n'est ni complète ni cocomplète, mais dans  $K\mathcal{C}$  tout idempotent se scinde (i.e. tout objet de  $K(K\mathcal{C})$  est scindable), et si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  est un foncteur vers une catégorie  $\mathcal{C}'$  où les idempotents se scindent, alors  $F$  se factorise à travers  $can$  en un unique  $\bar{F} : K\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  donné par  $\bar{F}(C, e) = F(e)[F(C)]$ . De plus, le foncteur  $can$  est pleinement fidèle et co-pleinement fidèle, et donc préserve et reflète toutes les limites et colimites (voir [11]). Enfin, le plongement de Yoneda  $yon : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  se factorise en  $yon = kyon \circ can$  où  $kyon : K\mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$  est donné par  $kyon(C, e) = Hom_{K\mathcal{C}}(can(-), (C, e))$ , et  $kyon$  identifie  $K\mathcal{C}$  à la sous-catégorie pleine de  $\hat{\mathcal{C}}$  ayant pour objets les rétractions de représentables.

Etant donnée une monade  $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$ , soit un foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et deux transformations naturelles  $\eta : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow T$  et  $\mu : T^2 \rightarrow T$  avec  $\mu.\eta_T = \mu.T\eta = Id_T$  et  $\mu.\mu_T = \mu.T\mu$ , on appelle catégorie de *Kleisli* de  $\mathcal{T}$  et on note  $Kl\mathcal{T}$  ou  $Kl(\mathcal{T})$  la catégorie ayant pour objets ceux de  $\mathcal{C}$ , et pour morphismes de  $C_1$  vers  $C_2$  les  $f : C_1 \rightarrow TC_2 \in ar\mathcal{C}$  (appelés  $\mathcal{T}$ -relations), et où le composé de  $f$  avec  $g : C_2 \rightarrow TC_3$  est  $\mu_{C_3}.Tg.f : C_1 \rightarrow TC_3$ .

On appelle catégorie d'*Eilenberg-Moore* de  $\mathcal{T}$  et on note  $EM(\mathcal{T})$  la catégorie ayant pour objets les  $(C, \lambda)$  avec  $C$  objet de  $\mathcal{C}$  et  $\lambda : TC \rightarrow C \in ar\mathcal{C}$  vérifiant  $\lambda.\eta_C = Id_C$  et  $\lambda.T\lambda = \lambda.\mu_C$  (un tel objet est appelé  $\mathcal{T}$ -algèbre de support  $C$  et de loi  $\lambda$ ), et pour morphismes de  $(C_1, \lambda_1)$  vers  $(C_2, \lambda_2)$  les  $f : C_1 \rightarrow C_2 \in \mathcal{C}$  tels que  $\lambda_2.Tf = f.\lambda_1$ . On note  $\Phi : Kl(\mathcal{T}) \rightarrow EM(\mathcal{T})$  le foncteur qui à  $C$  associe  $\Phi(C) = (TC, \mu_C)$  (qui est la  $\mathcal{T}$ -algèbre libre engendrée par  $C$ ), et qui à  $f : C_1 \rightarrow TC_2 \in ar\mathcal{C}$  morphisme de  $Kl(\mathcal{T})$  de  $C_1$  vers  $C_2$  associe  $\Phi(f) = \mu_{C_2}.T(f) : TC_1 \rightarrow TC_2$  morphisme de  $\Phi(C_1)$  vers  $\Phi(C_2)$ . On désigne par  $U_{\mathcal{T}} : EM(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur d'oubli qui à  $(C, \lambda)$  associe  $C$ .

Un objet  $(C, \lambda)$  de  $EM(\mathcal{T})$  est dit  $U_{\mathcal{T}}$ -projectif si pour tout

$$g : (C_2, \lambda_2) \rightarrow (C_1, \lambda_1)$$

morphisme de  $EM(\mathcal{T})$  tel que  $U_{\mathcal{T}}(g)$  admette une section (comme morphisme de  $\mathcal{C}$ ), et pour tout  $h : (C, \lambda) \rightarrow (C_1, \lambda_1)$  morphisme de  $EM(\mathcal{T})$ , il existe

$k : (C, \lambda) \longrightarrow (C_2, \lambda_2)$  morphisme de  $EM(\mathcal{T})$  tel que  $h = g.k$ . On désigne par  $EM_{proj}(\mathcal{T})$  la sous-catégorie pleine de  $EM(\mathcal{T})$  ayant pour objets les  $U_{\mathcal{T}}$ -projectifs.

**Proposition 1** *Soit  $(C, \lambda)$  un objet de  $EM(\mathcal{T})$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $(C, \lambda)$  est  $U_{\mathcal{T}}$ -projectif ;
2. Il existe un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $(C, \lambda)$  soit une rétraction dans  $EM(\mathcal{T})$  de  $\Phi(X)$ , c'est-à-dire des morphismes dans  $EM(\mathcal{T})$ ,

$$t : (C, \lambda) \longrightarrow \Phi(X) \quad \text{et} \quad r : \Phi(X) \longrightarrow (C, \lambda)$$

tels que  $r.t = Id_{(X, \lambda)}$  (et alors  $\lambda = r.\mu_X.Tt$ ) ;

3.  $(C, \lambda)$  est une rétraction dans  $EM(\mathcal{T})$  de  $\Phi(C)$  ;
4. Il existe  $s : C \longrightarrow TC \in ar\mathcal{C}$  tel que  $\lambda.s = Id_C$  et  $s.\lambda = \mu_C.Ts$  (si on dispose de  $(t, r)$  de 2- ci-dessus, alors  $s = T(r).T(\eta_X).t$ ).

**Proposition 2** *Soit  $\mathcal{C}$  à idempotents scindables et  $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$  une monade sur  $\mathcal{C}$  avec  $T$  injectif. Alors  $EM(\mathcal{T})$  est à idempotents scindables et  $\bar{\Phi} : K(Kl(\mathcal{T})) \longrightarrow EM(\mathcal{T})$  défini par  $\bar{\Phi}(C, e) = \Phi(e)[\Phi(C)]$  établit une équivalence*

$$K(Kl(\mathcal{T})) \cong EM_{proj}(\mathcal{T}).$$

**Correspondances idempotentes scindées.** Soit désormais  $\mathcal{C} = Cor \cong Kl\mathcal{P}$  avec  $\mathcal{P} = (P, \{\}, \cup)$  la monade des parties sur  $\mathcal{E}ns$ , un objet de  $Cor$  étant un ensemble  $E$  et un morphisme de  $E$  vers  $F$  étant un triplet  $(E, R, F) = r$  où  $R \subset E \times F$ . On sait qu'une  $\mathcal{P}$ -algèbre  $(E, \sigma)$  s'identifie à un ensemble ordonné complet  $(E, \leq)$  avec  $\sigma = sup_{(E, \leq)}$ . Si  $(E, r)$  est un objet de  $KCor$  avec  $r = (E, R, E)$ , alors  $\bar{\Phi}(E, r)$  est le sous-ensemble ordonné complet

$$(\Lambda(E, r), \subset)$$

de  $(P(E), \subset)$  où  $\Lambda(E, r) = \{A \subset E; \cup_{a \in A} \{x \in E; (a, x) \in R\} = A\}$ . Alors le foncteur de  $\mathcal{E}ns^{op}$  vers  $\mathcal{E}ns$  qui à  $F$  associe  $kyon(E, r)(F, Id_F)$  est représentable par  $\Lambda(E, r)$ .

**Proposition 3** Soit  $(E, r)$  un objet de  $\text{Cor}$ . Alors  $(E, r)$  est scindable si et seulement si  $\bar{\Phi}(E, r)$  est atomistique, et alors  $\bar{\Phi}(E, r) = (P(r[E]), \subset)$ , où  $r[E]$  est le scindage de  $(E, r)$ .

**Proposition 4** Une correspondance  $r = (E, R, E)$  est un idempotent scindable dans  $\text{Cor}$  si et seulement si, en écrivant  $x \xrightarrow{R} y$  pour  $(x, y) \in R$ , on a :

1.  $\forall x, u, y[(x \xrightarrow{R} u \ \& \ u \xrightarrow{R} y) \implies x \xrightarrow{R} y]$  ;
2.  $\forall x, y[x \xrightarrow{R} y \implies \exists u(x \xrightarrow{R} u \ \& \ u \xrightarrow{R} u \ \& \ u \xrightarrow{R} y)]$  ;
3.  $\forall u, v[(u \xrightarrow{R} u \ \& \ u \xrightarrow{R} v \ \& \ v \xrightarrow{R} v) \implies v \xrightarrow{R} u]$ .

Le scindage  $r[E]$  s'obtient alors comme  $r[E] = \{x \in E; x \xrightarrow{R} x\} / \sim$ , avec  $x \sim y$  si et seulement si  $x \xrightarrow{R} y \ \& \ y \xrightarrow{R} x$ .

**Proposition 5** Si  $r = (E, \leq, E)$  est un préordre, alors

$$\bar{\Phi}(E, r) = \text{Hom}_{\text{Preord}}((E, \leq)^{\text{op}}, (\{0, 1\}, \leq))$$

et  $(E, r)$  est scindable si et seulement si  $\leq$  est une équivalence sur  $E$ .

Si  $r = (E, R, F)$  est une correspondance on pose  $r^\circ = (F, R^\circ, E)$  où  $R^\circ$  est la correspondance converse de  $R$  définie par  $(y, x) \in R^\circ$  si et seulement si  $(x, y) \in R$ . Cette correspondance  $r$  est dite *difonctionnelle* (voir [8], p.131, [10], p.78) si elle vérifie  $r.r^\circ.r = r$ , ou bien, ce qui est équivalent, s'il existe une famille  $(E_i)_{i \in I}$  de parties deux à deux disjointes de  $E$  et une famille  $(F_i)_{i \in I}$  de parties deux à deux disjointes de  $F$  telles que  $R = \bigcup_{i \in I} E_i \times F_i$ .

**Proposition 6** Soit  $r = (E, R, F)$  une correspondance. Si  $r.r^\circ$  et  $r^\circ.r$  sont des idempotents, alors ils sont scindables, et alors  $r : (E, r^\circ.r) \longrightarrow (F, r.r^\circ)$  est un morphisme inversible de  $\text{KCor}$  si et seulement si  $r$  est difonctionnelle, et dans ce cas l'inverse de  $r$  est  $r^\circ : (F, r.r^\circ) \longrightarrow (E, r^\circ.r)$ .

Pour  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné complet (sup-treillis complet), on note  $\mathcal{J}(E, \leq)$  le sous-ensemble ordonné complet  $(J(E, \leq), \subset)$  de l'ensemble ordonné  $(P(E), \subset)$  où

$$J(E, \leq) = \{X \subset E; \forall x, y[(y \leq x \wedge x \in X) \implies y \in X]\}.$$

On dit que  $(E, \leq)$  est un treillis complet *complètement distributif* si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

- L'application croissante  $sup_{(E, \leq)} : \mathcal{J}(E, \leq) \longrightarrow (E, \leq)$  admet une adjointe à gauche  $g_{(E, \leq)}$  (qui alors commute aux *sup*s).
- L'application croissante  $sup_{(E, \leq)} : \mathcal{J}(E, \leq) \longrightarrow (E, \leq)$  (qui commute toujours aux *sup*s) commute aux *infs*.
- si  $(x_{j,k})_{j \in J, k \in K}$  est une famille double d'éléments de  $E$ , on a :

$$\bigwedge_{j \in J} \bigvee_{k \in K} x_{j,k} = \bigvee_{f \in K^J} \bigwedge_{j \in J} x_{j,f(j)}.$$

On sait aussi que  $(E, \leq)$  complet est complètement distributif si et seulement si  $(E, \leq)$  est continu et tout élément de  $E$  est un *sup* d'éléments co-premiers (voir [1]).

L'inclusion  $i_{(E, \leq)}$  de  $\mathcal{J}(E, \leq)$  dans  $(P(E), \subset)$  commute aux *sup*s; et comme elle commute aussi aux *infs* elle admet une adjointe à gauche  $r_{(E, \leq)}$ , qui commute aux *sup*s. Si  $(E, \leq)$  est complet complètement distributif on a  $sup_{(E, \leq)}.r_{(E, \leq)} = sup_{(E, \leq)}$  et on pose  $s_{(E, \leq)} = i_{(E, \leq)}.g_{(E, \leq)}$ . Pour ce  $s_{(E, \leq)}$  la dernière condition de la proposition 1 est satisfaite.

**Proposition 7** *Les ordonnés complets complètement distributifs sont identiques aux rétractions dans  $EM(\mathcal{P})$  des objets  $(P(E), \subset)$ , c'est-à-dire sont identiques aux objets  $U_{\mathcal{P}}$ -projectifs de  $EM(\mathcal{P})$ .*

**Proposition 8** *Soit  $\mathcal{CD}$  la catégorie ayant pour objets les ordonnés complets complètement distributifs, et pour morphismes les applications qui commutent aux *sup*s. Le foncteur  $\overline{\Phi}$  de la proposition 2, dans le cas  $\mathcal{T} = \mathcal{P}$ , détermine une équivalence de catégorie*

$$KCor \cong \mathcal{CD}.$$

*Ainsi  $Cor$  s'identifie à la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{CD}$  ayant pour objets les ordonnés complets complètement distributifs booléens, et le calcul des correspondances difonctionnelles est inclus dans celui des isomorphismes entre ces objets.*

## Références

- [1] G. Gierz, H.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove, D.S. Scott, *A compendium of continuous lattices*, Springer, 1980.

- [2] S. Hayashi, *Adjunctions of semi-functors : categorical structures in non-extensional lambda calculus*, Theoretical Computer Science 45, pp. 95-104, 1985.
- [3] R. Hoofman, *Linear Logic, Domain Theory and Semi-functors*, RUV-CS-90-34, nov. 1990, Utrecht University, department of Computer Science.
- [4] M. Karoubi, *Algèbres de Clifford et K-théorie*, Ann. Sc. E.N.S. 4, pp. 161-270, 1968.
- [5] G.N. Raney, *Completely distributive complete lattices*, Proceedings of the A.M.S. 3 (1952), pp. 677-680.
- [6] G.N. Raney, *A subdirect representation for completely distributive complete lattices*, Proceedings of the A.M.S. 4 (1953), pp. 518.
- [7] G.N. Raney, *Tight Galois connexions and complete distributivity*, Transactions of the A.M.S. 97 (1960), pp. 418-426.
- [8] J. Riguet, *Relations binaires, fermetures et correspondances de Galois*, Bull. S.M.F. 76, (1948), pp. 114-155.
- [9] J. Riguet, *Galois correspondences in category theory*, Sem. lotharingien de Combinatoire, Hesselberg 28-30 sept. 1989, I.r.m.a., Université de Strasbourg, 1990, 414/s-22.
- [10] G. Schmidt and T. Ströhlein, *Relationen und Graphen*, Springer, 1989.
- [11] L. Van den Bril, *Objets Kar-initiaux*, Diagrammes 9 (juil. 1983), 38 p.

**Université de Paris 7**  
**Département de mathématiques**  
**2 Place Jussieu**  
**75251 Paris Cedex 05**

**(Université de Paris 5)**  
**10 rue Jeannes d'Arc**  
**Paris**