CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PAUL VER EECKE

Sur le groupe fondamental d'un feuilletage défini par une suspension

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 27, n° 4 (1986), p. 145-160

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1986__27_4_145_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

Vol. XXVII-4 (1986)

SUR LE GROUPE FONDAMENTAL D'UN FEUILLETAGE DÉFINI PAR UNE SUSPENSION

par Paul VER EECKE

ABSTRACT. This paper is devoted to the fundamental group $\pi(\mathbf{F})$ of a foliation $\mathbf{F}$ - already studied in its general features [6, 7] - but here in the particular case where $\mathbf{F}$ is a suspension defined by $\delta: \pi(W) \to \mathrm{Diff}\ \Sigma$. It is natural to ask how $\pi(\mathbf{F})$ may be described from δ. In fact, $\pi(\mathbf{F})$ is nothing else than the fundamental group $\pi(\Sigma, \mathrm{Im}\delta)$ of the manifold scheme defined by $\mathrm{Im}\delta$ on Σ [4]. In order to see this, the essential point, proved in Lemmas and Proposition (2.2), is that the fundamental group $\pi(\mathbf{V}, G)$ of a transitive groupoid G of diffeomorphisms of a set $\mathbf{V}$ of manifolds reduces to $\pi(V, G \cap \mathrm{Diff}\ V)$, for any $V \in \mathbf{V}$.

INTRODUCTION.

L'article présent concerne le groupe fondamental $\pi(\mathbf{F})$ d'un feuilletage, déjà étudié ailleurs dans ses aspects généraux [6, 7], mais ici dans le cas particulier où $\mathbf{F}$ est défini par une suspension $\delta: \pi(W) \to \mathrm{Diff}\ \Sigma$. Il est naturel de se demander comment $\pi(\mathbf{F})$ est décrit à partir de δ. En fait, $\pi(\mathbf{F})$ n'est rien d'autre que le groupe fondamental $\pi(\Sigma, \mathrm{Im}\delta)$ du schéma de variété [4] défini par $\mathrm{Im}\delta$ sur Σ. Le point essentiel, démontré dans les lemmes et la Proposition (2.2), réside dans le fait que le groupe fondamental $\pi(\mathbf{V},G)$ d'un groupoïde transitif G de difféomorphismes d'un ensemble $\mathbf{V}$ de variétés, les objets de G, n'est autre chose que $\pi(V, G) \cap \mathrm{Diff}\ V)$ pour tout $V \in \mathbf{V}$.

1. LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL ASSOCIÉ A UN GROUPOÏDE DE DIFFÉOMORPHISMES.

1.1. Etant donné un ensemble $\mathbf{V}$ de variétés C^∞, séparées et difféomorphes, on posera

$$\mathrm{Diff}\ \mathbf{V} = \cup_{V,W \in \mathbf{V}} \mathrm{Diff}(V, W),$$

où $\mathrm{Diff}(V, W)$, avec $\mathrm{Diff}\ V = \mathrm{Diff}(V, V)$, est l'ensemble des difféomorphismes de V sur W. La loi de composition évidente

$$\mathrm{Diff}(U, V) \times \mathrm{Diff}(V, W) \to \mathrm{Diff}(U, W)$$

munit $\mathrm{Diff}\ \mathbf{V}$ d'une structure de groupoïde transitif sur $\mathbf{V}$.

On appellera *groupoïde de difféomorphismes sur* $\mathbf{V}$ tout sous-groupoïde G de $\mathrm{Diff}\ \mathbf{V}$ transitif sur $\mathbf{V}$. On observe que G opère au sens de [1] sur $\mathbf{V}^{\wedge} = \Sigma_{V\in\mathbf{V}} V$, muni de sa projection canonique sur $\mathbf{V}$. Pour V, W dans $\mathbf{V}$, on posera

$$G_{VW} = G \cap \mathrm{Diff}(V, W), \quad \text{avec} \quad G_V = G_{VV}.$$

On supposera que $\mathbf{V}$ admet un domaine fondamental [4] pour G, c'est-à-dire un ouvert connexe $U \subset \mathbf{V}^{\wedge}$ tel que $\mathbf{V}^{\wedge} = GU$, ce qui équivaut à $V = G_V$, avec $V \in \mathbf{V}$ défini par $V \supset U$.

Pour V, $W \in \mathbf{V}$, on désignera par $\Pi(V, W)$ l'ensemble des germes locaux inversibles de morphismes de V dans W, muni de l'application source-but (α, β): $\Pi(V, W) \to V\times W$, et par $J(G_{VW})$ le sous-ensemble de $\Pi(V, W)$ formé des $j_x(f)$, avec $f \in G_{VW}$, $x \in V$. On posera:

$$\mathrm{Hol}(\mathbf{V}, G) = \bigcup_{V,W\in\mathbf{V}} J(G_{VW})$$

et $$\mathrm{Hol}_{U,U'}(\mathbf{V}, G) = \{ \phi \in \mathrm{Hol}(\mathbf{V}, G) \mid \alpha(\phi) \in U,\ \beta(\phi) \in U' \},$$

pour U, U' contenus dans $\mathbf{V}^{\wedge}$. Soit $\mathbf{S}(\mathbf{V})$, ou plus simplement $\mathbf{S}$, l'ensemble des ouverts connexes et simplement connexes de $\mathbf{V}^{\wedge}$.

On appellera *chaîne d'holonomie* de $(\mathbf{V}, G)$ tout système

$$\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0, \ldots, \phi_{n-1}, \Sigma_n),$$

avec $$\Sigma_i \in \mathbf{S},\ i = 0,\ldots, n$$

et $$\phi_i \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_i\Sigma_{i+1}}(\mathbf{V}, G),\ i = 0,\ldots, n-1.$$

On dira que Σ_0 et Σ_n sont l'origine et l'extrémité de Γ. On désignera par $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$ l'ensemble des chaînes d'holonomie de $(\mathbf{V}, G)$ d'origine Σ et d'extrémité T. Du fait que $(\mathbf{V}, G)$ admet un système fondamental, on observe aisément comme en [6] que $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$ n'est pas vide. Sur

$$\overline{\mathrm{Hol}}(\mathbf{V}, G) = \bigcup_{\Sigma,T\in\mathbf{S}} \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$$

on a une loi de composition partielle associative évidente $(\Gamma, \Gamma') \to \Gamma \bullet \Gamma'$ définie lorsque l'origine de Γ' est l'extrémité de Γ.

Pour $\phi \in \mathrm{Hol}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$ avec Σ, $T \in \mathbf{S}$, on désignera par $C_{\Sigma T}(\phi)$ la composante connexe de ϕ dans l'ouvert $\mathrm{Hol}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$ de $\Pi(V, W)$ muni de sa topologie usuelle d'espace étalé sur V par α: $\Pi(V, W) \to V$, avec V et W dans $\mathbf{V}$ tels que $V \supset \Sigma$, $W \supset T$.

Etant donné une 1-chaîne $\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0, \Sigma_1)$ et une 2-chaîne $\Gamma' = (\Sigma_0, \phi_1, \Sigma_1, \phi_2, \Sigma_2)$ dans $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma_2}(\mathbf{V}, G)$, on définit la relation $\Gamma << \Gamma'$ par la condition suivante:

$$\text{il existe } f_1 \in G_{V_0V_1},\ f_2 \in G_{V_1V_2} \text{ tels que}$$
$$\phi_1 = j_{x_1}(f_1),\quad \phi_2 = j_{x_2}(f_2),\quad \phi_0 = j_{x_0}(f_2 \circ f_1),\quad j_{x_0}(f_1) \in C_{\Sigma_0\Sigma_1}(\phi_1),$$
$$j_{y_1}(f_2) \in C_{\Sigma_1\Sigma_2}(\phi_2),$$

avec $y_1 = f_1(x_0)$, $V_i \supset \Sigma_i$, $x_i = \alpha(\phi_i)$, $i = 0,1,2$.

Plus généralement, on définit la relation $\Gamma << \Gamma'$ par la condition suivante:

il existe une 1-chaîne Γ_2, une 2-chaîne Γ'_2 (et éventuellement des chaînes Γ_1, Γ_3) telles que

$\Gamma = \Gamma_1 \bullet \Gamma_2 \bullet \Gamma_3$, $\Gamma' = \Gamma_1 \bullet \Gamma'_2 \bullet \Gamma_3$ et $\Gamma_2 << \Gamma'_2$ au sens ci-dessus.

On dira que $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$ sont *contigües* et on notera $\Gamma \div \Gamma'$ si $\Gamma << \Gamma'$ ou $\Gamma' << \Gamma$. On a alors sur $\mathrm{Hol}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$ une relation d'équivalence $\Gamma \sim \Gamma'$ définie par la condition suivante:

$$\text{il existe } \Gamma_i \in \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G),\ i = 0,\dots, n \text{ telles que}$$
$$\Gamma = \Gamma_0 \div \Gamma_1 \div \dots \div \Gamma_{n-1} \div \Gamma_n = \Gamma'.$$

D'où une relation d'équivalence sur $\overline{\mathrm{Hol}}(V, G)$ qui n'est autre que celle compatible avec la loi de composition de $\overline{\mathrm{Hol}}(\mathbf{V}, G)$ et engendrée par $\Gamma << \Gamma'$, où Γ est une 1-chaîne.

On peut aussi définir dans $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma_0\Sigma_2}(V, G)$ une relation

$$(\Sigma_0, \phi, \Sigma_2) < (\Sigma_0, \phi_1, \Sigma_1, \phi_2, \Sigma_2)$$

par la condition:

il existe des germes $\phi'_1 \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_0\Sigma_1}(\mathbf{V}, G)$, $\phi'_2 \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_1\Sigma_2}(V, G)$ composables et tels que

(1) $\phi'_1\phi'_2 = \phi$, $C_{\Sigma_0\Sigma_1}(\phi_1) = C_{\Sigma_0\Sigma_1}(\phi'_1)$, $C_{\Sigma_1\Sigma_2}(\phi_2) = C_{\Sigma_1\Sigma_2}(\phi'_2)$.

REMARQUE. *Les relations $\Gamma < \Gamma'$ et $\Gamma << \Gamma'$ où Γ est une 1-chaîne, engendrent dans $\overline{\mathrm{Hol}}(\mathbf{V}, G)$ la même relation d'équivalence compatible avec la loi de composition.*

Il s'agit, d'une part, d'observer que

$$(\Sigma_0, \phi, \Sigma_2) << (\Sigma_0, \phi_1, \Sigma_1, \phi_2, \Sigma_2)$$

entraîne évidemment

$$(\Sigma_0,\ \phi,\ \Sigma_2) < (\Sigma_0,\ \phi_1,\ \Sigma_1,\ \phi_2,\ \Sigma_2)$$

et, d'autre part, de montrer que cette dernière relation entraîne

(2) $$(\Sigma_0,\ \phi,\ \Sigma_2) \sim (\Sigma_0,\ \phi_1,\ \Sigma_1,\ \phi_2,\ \Sigma_2).$$

Or, avec ϕ'_1, ϕ'_2 vérifiant (1), on a en particulier

$$(\Sigma_0,\ \phi,\ \Sigma_2) \sim (\Sigma_0,\ \phi'_1,\ \Sigma_1) \bullet (\Sigma_1,\ \phi'_2,\ \Sigma_2).$$

Compte tenu de ce que, d'autre part,

$$(\Sigma_0,\ \phi_1,\ \Sigma_1,\ \phi_2,\ \Sigma_2) \sim (\Sigma_0,\ \phi,\ \Sigma_1) \bullet (\Sigma_1,\ \phi_2,\ \Sigma_2),$$

il n'est donc que de vérifier

(3) $$(\Sigma_0,\ \phi_1,\ \Sigma_1) \sim (\Sigma_0,\ \phi'_1,\ \Sigma_1) \quad \text{et}$$

(4) $$(\Sigma_1,\ \phi_2,\ \Sigma_2) \sim (\Sigma_1,\ \phi'_2,\ \Sigma_2).$$

Or on a (3) (et, de façon analogue (4)) parce que $C_{\Sigma_0\Sigma_1}(\phi_1) = C_{\Sigma_0\Sigma_1}(\phi'_1)$ entraîne l'existence de $f_i \in G_{V_0V_1}$, $i = 0,\dots, n$, avec $V_0 \supset \Sigma_0$, $V_1 \supset \Sigma_1$, et d'ouverts connexes $\Omega_i \subset \Sigma_0 \cap f_i{-1}(\Sigma_1)$, $i = 0,\dots, n$, tels que

$$\phi_1 = j_{x_1}(f_1) \text{ avec } x_1 \in \Omega_1,$$

$$\{\ j_x(f_i) \mid x \in \Omega_i\} \cap \{\ j_x(f_{i+1}) \mid x \in \Omega_{i+1}\} \neq \emptyset$$

$$\text{pour } i = 0,\dots, n-1, \text{ et } \phi'_1 = j_{y_1}(f_n) \text{ avec } y_1 \in \Omega_n.$$

1.2. On désignera par $\bar{\pi}_{\Sigma T}(G,\ \mathbf{V})$ le quotient de $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V},\ G)$ par $\Gamma \sim \Gamma'$, et on dira que $\Gamma \in \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V},\ G)$ est un représentant de son image $[\Gamma]$ par l'application canonique $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V},\ G) \to \bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V},\ G)$. Par passage au quotient, on induit de $\mathrm{Hol}(\mathbf{V},\ G)$ sur

$$\pi(\mathbf{V},\ G) = \cup_{\Sigma, T \in S}\ \pi_{\Sigma T}(\mathbf{V},\ G)$$

une loi de composition partiellement définie $(A,\ B) \to A \bullet B$. Comme en [6] on observe que $\bar{\pi}(\mathbf{V},\ G)$ se trouve ainsi muni d'une structure de groupoïde transitif sur S. L'unité correspondant à $\Sigma \in S$ n'est autre que $[(\Sigma,\ x\hat{},\ \Sigma)]$, indépendant de $x \in \Sigma$, avec $x\hat{} = j_x(1_\Sigma)$. Le groupe structural du groupoïde transitif $\bar{\pi}(\mathbf{V},\ G)$ est le groupe fondamental du schéma de variété $(\mathbf{V}\hat{},\ \mathrm{Hol}(\mathbf{V},\ G))$ [4]. Pour $x,\ y \in \mathbf{V}\hat{}$, on a sur

$$\bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V},\ G) = \cup_{\Sigma, T \in S, x \in \Sigma, y \in T}\ \bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V},\ G)$$

la relation d'équivalence suivante:

on a $A \sim B$ avec $A \in \pi_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$, $B \in \bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$, si
$[(\Sigma, x^{\hat{}}, \Sigma')] \bullet B = A \bullet [(T, y^{\hat{}}, T')]$ dans $\bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$.

On désignera par $\pi_{xy}(\mathbf{V}, G)$ le quotient de $\bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V}, G)$ par cette relation d'équivalence. Pour Σ, $T \in S$ et $x \in \Sigma$, $y \in T$ fixés, la restriction $k_{(\Sigma,x)(\Sigma,y)}$ à $\bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$ de l'application canonique

$$\bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V}, G) \to \pi_{xy}(\mathbf{V}, G)$$

est une bijection, dite canonique. Par ces bijections, la loi du groupoïde $\bar{\pi}(\mathbf{V}, G)$ induit sur

$$\pi(\mathbf{V}, G) = \cup_{x,y \in V^{\hat{}}} \pi_{xy}(\mathbf{V}, G)$$

une loi de composition $(A, B) \to A \bullet B$ munissant $\pi(\mathbf{V}, G)$ d'une structure de groupoïde transitif sur $\mathbf{V}^{\hat{}}$, ayant le même groupe structural que $\bar{\pi}(\mathbf{V}, G)$.

On dira que $\pi(\mathbf{V}, G)$ et son groupe structural, noté aussi $\pi(\mathbf{V},G)$, sont le groupoïde fondamental et le groupe fondamental de $(\mathbf{V}, G)$. Dans le cas où $\mathbf{V}$ est réduit à une seule variété, c'est-à-dire dans le cas (V, G) d'une variété V munie d'un groupe $G \subset \mathrm{Diff}\, V$, on désignera le groupoïde fondamental et le groupe fondamental par $\pi(V, G)$. On observe que le groupe $\pi(V, G)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de G dans V. Dans le cas plus particulier où $G = 1_V$, ce qui entraîne que V est connexe, le groupoïde $\pi(V, 1_V)$ n'est autre que le groupoïde fondamental du feuilletage discret sur V, canoniquement isomorphe au groupoïde de Poincaré $\pi(V)$ [6]; ce qui justifie la notation adoptée.

1.3. Etant donné $(\mathbf{V}, G)$ et $(\mathbf{V}', G')$ comme ci-dessus, on écrira

$$(\mathbf{V}', G') < (\mathbf{V}, G) \quad \text{lorsque} \quad \mathbf{V}' \subset \mathbf{V} \text{ et } G' \subset G.$$

Pour Σ, $T \in S(\mathbf{V}')$, on a alors $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}', G') \subset \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$, entraînant par passage au quotient des applications canoniques

$$\bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}', G') \to \bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G) \quad \text{et} \quad \bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V}', G') \to \bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V}, G)$$

pour $x \in \Sigma$, $y \in T$. On a dès lors des foncteurs canoniques évidents

$$\bar{\pi}(\mathbf{V}', G') \to \bar{\pi}(\mathbf{V}, G) \quad \text{et} \quad \pi(\mathbf{V}', G') \to \pi(\mathbf{V}, G).$$

Pour tout $V \in \mathbf{V}$, on a en particulier un foncteur $\pi(V, G_V) \to \pi(\mathbf{V}, G)$, dont on montrera en (2.2) qu'il est pleinement fidèle.

1.4. Soit G un groupe de difféomorphismes de la variété connexe V. L'identification canonique $\pi(V) \div \pi(V, 1_V)$ du (1.2) et le foncteur canonique $\pi(V, 1_V) \to (\pi(V, G)$ de (1.3) définissent un foncteur χ: $\pi(V) \to \pi(V, G)$ dit canonique et qui peut d'ailleurs être défini aussi comme suit.

Comme dans [7], on montre d'abord que $\pi(V, G)$ est un groupoïde de Lie galoisien [3] sur V, dont la topologie est engendrée par les

$$\{\ k_{(\Sigma,x)(T,y)}([\Gamma])\ \mid\ x \in \Sigma,\ y \in T\ \},$$

où $$\Gamma \in \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G) \quad \text{et} \quad \Sigma,\ T \in \mathbf{S}.$$

Le foncteur χ ci-dessus n'est autre que le foncteur canonique [7] du groupoïde de Lie galoisien $\pi(V, G)$.

2. LE PLONGEMENT $\pi(\mathbf{V}, G_V) \to \pi(\mathbf{V}, G)$.

2.1. Pour $(\mathbf{V}, G)$ comme ci-dessus, soit $V, W \in \mathbf{V}$ et G_{VW} le sous-groupoïde plein de G sur $\{V, W\}$. Pour $\Sigma, T \in \mathbf{S}(\{V, W\})$, on posera

$$\overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G) = \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\{V,W\}, G_{VW}).$$

Comme dans le cas général, on sait que $\overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G) \neq \emptyset$.

Pour $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$, on écrira $\Gamma \sim_{\Sigma T} \Gamma'$, et on dira aussi que $\Gamma \sim \Gamma'$ dans $\overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$, si $\Gamma \sim \Gamma'$ dans $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\{\mathbf{V},\mathbf{W}\}, G_{VW})$. Ceci revient à dire qu'il existe $\Gamma_i \in \overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$, $i = 0,\dots, n$, tels que

$$\Gamma = \Gamma_0 \div \Gamma_1 \ \dots \div \Gamma_{n-1} \div \Gamma_n = \Gamma'.$$

Dans le cas particulier $V = W$, on a

$$\overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G) = \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(V, G_V).$$

2.2. Soit $\Gamma \in \overline{\mathrm{Hol}}(\mathbf{V}, G)$ avec $\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0,\dots, \phi_{n-1}, \Sigma_n)$ et $x_i = \alpha(\phi_i)$, $i = 0,\dots, n-1$, $V_i \in \mathbf{V}$, $i = 0,\dots, n-1$ définis par $\Sigma_i \subset V_i$. On dira que

$$(f_0,\dots, f_{n-1}) \in G_{V_0V_1} \times\dots\times G_{V_{n-1}V_n}$$

est *associé à* Γ si on a $j_{xi}(f_i) = \phi_i$, $i = 0,\dots, n-1$. Soit alors $z_i \in V_0$, $z'_i \in V_n$, $i = 0,\dots, n-1$ définis par

$$z_0 = x_0,\ (f_{i-1}\circ\dots\circ f_0)(z_i) = x_i \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots, n-1$$

et

$$z'_i = (f_{n-1}\circ\dots\circ f_0)(z_i).$$

Pour $i = 0,\dots, n-1$, on définit alors $\Gamma_i(f_0,\dots, f_{n-1}) \in \mathrm{Hol}'_{\Sigma_0\Sigma_n}(V, G)$ par

$$\Gamma_i(f_0,\dots, f_{n-1}) = (\Sigma_0,\ z_0\hat{},\ f_0^{-1}(\Sigma_1),\ z_1\hat{},\dots,\ z_{i-1}\hat{},\ (f_{i-1}\circ\dots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_i),$$
$$j_{zi}(f_{n-1}\circ\dots\circ f_0),\ (f_{n-1}\circ\dots\circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}),\ z'_{i+1}\hat{},\dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}),\ z'_{n-1}\hat{},\ \Sigma_n).$$

LEMME 1. *Soit* $\Gamma \in \overline{\mathrm{Hol}}(V, G)$ *avec* $\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0,\dots, \phi_{n-1}, \Sigma_n)$. *Alors:*

i) Quel que soit $(f_0,\dots, f_{n-1})$ *associé à* Γ, *on a*

$$\Gamma \sim \Gamma_i(f_0,\dots, f_{n-1}) \quad (\textit{resp.}\ \Gamma \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} \Gamma'_i(f_0,\dots, f_{n-1})$$

si $\Gamma \in \overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma_0\Sigma_n}(V, G))$ *pour* $i = 0,\dots, n-1$.

ii) Quels que soient $(f_0,\dots, f_{n-1})$ *et* $(f'_0,\dots, f'_{n-1})$ *associés à* Γ, *on a*

$$\Gamma_j(f_0,\dots, f_{n-1}) \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} \Gamma_l(f'_0,\dots, f'_{n-1}) \quad \textit{pour} \quad j,l = 0,\dots, n-1.$$

DÉMONSTRATION. On démontrera d'abord:

(1) $$\Gamma \sim \Gamma_0(f_0,\dots, f_{n-1}) \quad (\text{resp. } \Gamma \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} \Gamma_0(f_0,\dots, f_{n-1})$$

par récurrence sur n, et ensuite

(2) $$\Gamma_i(f_0,\dots, f_{n-1}) \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} \Gamma_{i+1}(f_0,\dots, f_{n-1})$$
$$\text{pour } i = 0,\dots, n-2.$$

Or (1) étant trivial pour $n = 1$, supposons cette relation vérifiée pour $n-1 \geqslant 1$, et vérifions-la pour n. On a

$$\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0, \Sigma_1) \bullet \Gamma', \quad \text{avec} \quad \Gamma' = (\Sigma_1, \phi_1,\dots, \phi_{n-1}, \Sigma_n)$$

et, en vertu de l'hypothèse de récurrence,

$$\Gamma' \sim \Gamma'_0(f_1,\dots, f_{n-1}) \quad (\text{resp. } \Gamma' \sim_{\Sigma_1\Sigma_n} \Gamma'_0(f_1,\dots, f_{n-1}).$$

Il vient donc

(3) $$\Gamma \sim (\Sigma_0, \phi_0, \Sigma_1) \bullet \Gamma'_0(f_1,\dots, f_{n-1})$$
$$(\text{resp. dans } \overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma_0\Sigma_n}(V, G).$$

Puisque

$$\Gamma'_0(f_1,\dots, f_{n-1}) = (\Sigma_1,\ j_{x1}(f_{n-1},\dots, f_1),\ (f_{n-1},\dots, f_2)(\Sigma_2),\\ z'_2\hat{},\dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}),\ z'_{n-1}\hat{},\ \Sigma_n)$$

entraîne

$$\Gamma'_0(f_0,\dots, f_{n-1}) \sim_{\Sigma_1\Sigma_{n-1}} (\Sigma_1,\ j_{f_0(x_0)}(f_{n-1}\circ\dots\circ f_1),\ (f_{n-1}\circ\dots\circ f_1)(\Sigma_1),\\ z'_1\hat{},\ (f_{n-1}\circ\dots\circ f_2)(\Sigma_2),\dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}),\ z'_{n-1}\hat{},\ \Sigma_n),$$

il vient, compte tenu de (3),

$$\Gamma \sim (\Sigma_0,\ j_{x_0}(f_0),\ \Sigma_1) \bullet (\Sigma_1,\ j_{f_0(x_0)}(f_{n-1}\circ\dots\circ f_1),\ (f_{n-1}\circ\dots\circ f_1).(\Sigma_1),\\ z'_1\hat{},\ \dots,\ f_{n-1}(\Sigma_{n-1}),\ z'_{n-1}\hat{},\ \Sigma_n) \div \Gamma_0(f_0,\dots, f_{n-1})\\ (\text{resp. } \Gamma \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} \Gamma_0(f_0,\dots, f_{n-1})),$$

c'est-à-dire (1). En vue de démontrer (2), on observe d'abord que l'on peut écrire

$$\Gamma_i(f_0,\dots, f_n) = \Gamma' \bullet \Gamma'' \bullet \Gamma''' \quad \text{et} \quad \Gamma_{i+1}(f_0,\dots, f_n) = \Gamma' \bullet \bar{\Gamma}'' \bullet \Gamma''',$$

avec Γ', Γ'', Γ'', $\Gamma''' \in \mathrm{Hol}'_{\Sigma_0\Sigma_n}(V, G)$ définis par

$$\Gamma' = (\Sigma_0,\ z_0\hat{},\ f_0^{-1}(\Sigma_1),\ z_1\hat{},\dots,\ z_{i-1}\hat{},\ (f_{i-1}\circ\dots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_i));$$
$$\Gamma'' = ((f_{i-1}\circ\dots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_i),\ j_{zi}(f_{n-1}\circ\dots\circ f_0),\ (f_{n-1}\circ\dots\circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}),\\ z'_{i+1}\hat{},\ (f_{n-1},\dots, f_{i+2})(\Sigma_{i+2})),$$
$$\bar{\Gamma}'' = ((f_{i-1}\circ\dots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_i),\ z_i\hat{},\ (f_i\circ\dots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_{i+1}),\\ j_{z_{i+1}}(f_{n-1}\circ\dots\circ f_0),\ (f_{n-1}\circ\dots\circ f_{i+2})(\Sigma_{i+2})),$$
$$\Gamma''' = ((f_{n-1}\circ\dots\circ f_{i+2})(\Sigma_{i+2}),\ z'_{i+2}\hat{},\dots,\ f_{n-1}(\Sigma_{n-1}),\ z'_{n-1}\hat{},\ \Sigma_n).$$

Il suffit donc d'observer $\Gamma'' \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} \bar{\Gamma}''$, ce qui résulte de

$$\Gamma'' \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} ((f_{i-1}\circ\dots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_i),\ z_i\hat{},\ (f_i\circ\dots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_{i+1}),\\ j_{zi}(f_{n-1}\circ\dots\circ f_i),\ (f_{n-1}\circ\dots\circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}),\ z'_{i+1}\hat{},\ (f_{n-1}\circ\dots\circ f_{i+2})(\Sigma_{i+2}))\\ \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} \bar{\Gamma}''.$$

ii) Il suffit de vérifier l'énoncé dans le cas particulier où il existe k tel que $f_i = f'_i$ pour $i \neq k$. Mais on a alors

$$\Gamma_k(f_0,\dots, f_{n-1}) = \Gamma_k(f'_0,\dots, f'_{n-1}),$$

ce qui, compte tenu de (2), entraîne l'énoncé.

LEMME 2. *Soit* Γ, $\Gamma' \in \overline{\mathrm{Hol}}'_{\Sigma_0\Sigma}(V, G)$ *tels que* $\Gamma << \Gamma'$ *et soit*

$$(f_0,\dots, f_{n-1}) \quad \text{et} \quad (f_0,\dots, f_{i-1},\ f'_i,\ f''_i,\ f_{i+1},\dots, f_{n-1})$$

associés respectivement à Γ, Γ' *avec* $f_i = f''_i \circ f'_i$. *On a alors*

$$\Gamma_k(f_0,\ldots, f_{n-1}) \sim_{\Sigma_0\Sigma} \Gamma_l(f_0,\ldots, f_{i-1}, f'_i, f''_i, f_{i+1},\ldots, f_{n-1})$$

quels que soient $k = 0,\ldots, n-1$, $l = 0,\ldots, n$.

Soit $\Gamma = (\Sigma_0, j_{x_0}(f_0), \Sigma_1,\ldots j_{x_{n-1}}(f_{n-1}), \Sigma_n)$ et $\Gamma' = (\Sigma_0, j_{x_0}(f_0), j_{x_{i-1}}(f_{i-1}), \Sigma_i, j_{x'_i}(f'_i), \Sigma'_i, j_{x''_i}(f''_i), \Sigma_{i+1}, j_{x_i}(f_{i+1}),\ldots, j_{x_{n-1}}(f_{n-1}), \Sigma_n)$.

Compte tenu de (2) du lemme précédent, on peut supposer $k = l = i$ et il n'est que d'observer qu'on a

$$\begin{aligned}\Gamma_i(f_0,\ldots, f_{n-1}) = {}& (\Sigma_0, z_0^\wedge, f_0^{-1}(\Sigma_1),\ldots, z_{i-1}^\wedge, (f_{i-1}\circ\ldots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_i),\\ & j_{z_i}(f_{n-1}\circ\ldots\circ f_0), (f_{n-1}\circ\ldots\circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}), z'^\wedge_{i+1},\ldots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}), z'^\wedge_{n-1}, \Sigma_n)\\ & \sim_{\Sigma_0\Sigma_n} (\Sigma_0, z_0^\wedge, f_0^{-1}(\Sigma_1), z_1^\wedge,\ldots, z_{i-1}^\wedge, (f_{i-1}\circ\ldots\circ f_0)^{-1}(\Sigma_i)),\\ & j_{z_i}(f_{n-1}\circ\ldots\circ f_0), (f_{n-1}\circ\ldots\circ f''_i)(\Sigma'_i), \bar{z}'^\wedge_i, (f_{n-1}\circ\ldots\circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}),\ldots, z'^\wedge_{n-1}, \Sigma_n)\\ & = \Gamma_i(f_0,\ldots, f_{i-1}, f'_i, f''_i, f_{i+1},\ldots, f_{n-1}),\end{aligned}$$

avec z_j, z'_j, $j = 0,\ldots, n-1$ définis par

$$z_0 = x_0, \quad (f_{j-1}\circ\ldots\circ f_0)(z_j) = x_j, \quad j > 0,$$
$$(f_{n-1}\circ\ldots\circ f_0)(z_j) = z'_j$$

et $\bar{z}_i$, $\bar{z}'_i$ par

$$(f_{i-1}\circ\ldots\circ f_0)(\bar{z}_i) = x'_i, \quad (f_{n-1}\circ\ldots\circ f_{i+1}\circ f''_i)(x''_i) = \bar{z}_i.$$

On peut dès lors démontrer le résultat annoncé en (1.3).

PROPOSITION. *Soit* **G** *un groupoïde de difféomorphismes sur* **V**. *Pour tout* $V \in \mathbf{V}$, *le foncteur canonique* $\pi(V, G_V) \to \pi(\mathbf{V},\mathbf{G})$ *est pleinement fidèle.*

Pour des sous-variétés connexes et simplement connexes Σ, T de V, il s'agit de vérifier que l'application canonique

$$\bar{\pi}_{\Sigma T}(V, G_V) \to \bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$$

est bijective. La surjectivité résulte de ce que, pour $\Gamma \in \mathrm{Hol}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ et $(f_0,\ldots, f_n)$ associé à Γ, on a

$$\Gamma_0(f_0,\ldots, f_n) \in \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(V, G_V) \text{ et } \Gamma \sim \Gamma_0(f_0,\ldots, f_n)$$

d'après le Lemme 1. Vérifions l'injectivité, c'est-à-dire que, pour $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(V, G_V)$, on a

(1) $\qquad \Gamma \sim_{\Sigma T} \Gamma'$ si $\Gamma \sim \Gamma'$ dans $\overline{\mathrm{Hol}}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$.

Il existe alors $\Gamma_i \in \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G)$, $i = 0,\dots, n$ tels que

$$\Gamma = \Gamma_0 \div \Gamma_1 \div \dots \div \Gamma_n = \Gamma'.$$

Pour $i = 0,\dots, n-1$, on a d'après le Lemme 2 des systèmes f_i, f'_i respectivement associés à Γ_i, Γ_{i+1} tels que

(2) $$\Gamma_i f_i \sim_{\Sigma T} \Gamma_{i+1} f_i'$$
où on a posé $\Gamma_i f_i = (\Gamma_i)_o f_i$, $\Gamma_{i+1} f'_i = (\Gamma_{i+1})_o f'_i$.

Avec ces notations on a, d'après ii du Lemme 1

(3) $$\Gamma_{i+1} f'_i \sim_{\Sigma T} \Gamma_{i+1} f_{i+1} \quad \text{pour} \quad i = 0,\dots, n-2.$$

D'après i du Lemme 1, on a aussi

(4) $$\Gamma_0 \sim_{\Sigma T} \Gamma_0 f_0, \quad \Gamma_n \sim_{\Sigma T} \Gamma_n f'_{n-1}.$$

Compte tenu de (4), (2), (3), il vient alors

$$\Gamma_0 \sim_{\Sigma T} \Gamma_0 f_0 \sim_{\Sigma T} \Gamma_1 f'_0 \sim_{\Sigma T} \Gamma_1 f_1 \sim_{\Sigma T} \Gamma_2 \sim_{\Sigma T} \dots$$
$$\dots \sim_{\Sigma T} \Gamma_{n-1} f'_{n-2} \sim_{\Sigma T} \Gamma_{n-1} f_{n-1} \sim_{\Sigma T} \Gamma_n f'_{n-1} \sim_{\Sigma T} \Gamma_n,$$

c'est-à-dire (1).

COROLLAIRE. Pour tout $V \in \mathbf{V}$, *le groupe fondamental de* $(\mathbf{V}, G)$ *est celui de* (V, G_V).

3. FIBRÉS FEUILLETÉS.

3.1. La construction du groupoïde fondamental d'un groupe de difféomorphismes d'une variété connexe est analogue à la construction rappelée brièvement ci-dessus du groupoïde fondamental d'un feuilletage **F** sur une variété connexe V [6, 7]. Soit Hol(**F**) le groupoïde d'holonomie de (V, **F**). On désignera par $x^\wedge$ l'unité correspondant à $x \in V$ de ce groupoïde de Lie [7] sur V. Pour des ouverts U, U' de V, on posera
$$\mathrm{Hol}_{U,U'}(\mathbf{F}) = \{\, \phi \in \mathrm{Hol}(\mathbf{F}) \mid \alpha(\phi) \in U,\ \beta(\phi) \in U' \,\}.$$

Sauf confusion, soit **S** l'ensemble des sous-variétés de V connexes et simplement connexes, transverses à **F**.

On appellera *chaîne d'holonomie de* (V, **F**) tout système

$$\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0, \ldots, \phi_{n-1}, \Sigma_n) \quad \text{avec} \quad \Sigma_i \in S, \ \phi_i \in \mathrm{Hol}_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}}(F);$$

On dira que Σ_0 et Σ_n sont l'origine et l'extrémité de Γ.

Désignons par $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F)$ l'ensemble, non vide [6], des chaînes d'holonomie d'origine Σ et d'extrémité T. On a sur

$$\mathrm{Hol}(F) = \cup_{\Sigma, T \in S} \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F)$$

une loi de composition associative partielle $(\Gamma, \Gamma') \to \Gamma \bullet \Gamma'$.

Soit $\Gamma \sim \Gamma'$ la relation d'équivalence sur $\overline{\mathrm{Hol}}(F)$ compatible avec sa loi de composition et engendrée par $(\Sigma_0, \phi, \Sigma_2) < (\Sigma_0, \phi_1, \Sigma_1, \phi_2, \Sigma_2)$ définie comme suit:

il existe $\phi'_1, \phi'_2 \in \mathrm{Hol}(F)$ composables avec $\phi'_1 \phi'_2 = \phi$ et où ϕ_1, ϕ'_1 (resp. ϕ_2, ϕ'_2) appartiennent à la même composante connexe du sous-espace $\mathrm{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F)$ (resp. $\mathrm{Hol}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F)$)) de Hol(F).

Ceci revient encore à dire que $\theta_1(\phi_1)$, $\theta_1(\phi'_1)$ (resp. $\theta_2(\phi_2)$, $\theta_2(\phi'_2)$) appartiennent à la même composante connexe de l'image par l'injection naturelle $\theta_1 : \mathrm{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(F) \to \Pi(\Sigma_0, \Sigma_1)$ (resp. $\theta_2 : \mathrm{Hol}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(F) \to \Pi(\Sigma_1, \Sigma_2)$), où $\Pi(\Sigma_0, \Sigma_1)$ (resp. $\Pi(\Sigma_1, \Sigma_2)$) est muni de sa topologie naturelle d'espace étalé sur Σ_0 (resp. sur Σ_1) par l'application source.

On désignera par $\overline{\pi}_{\Sigma T}(F)$, où Σ, $T \in S$, le quotient par $\Gamma \sim \Gamma'$ de l'ensemble saturé $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F) \subset \overline{\mathrm{Hol}}(F)$, et par $[\Gamma]$ l'image de Γ par l'application canonique $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F) \to \overline{\pi}_{\Sigma T}(F)$. Par passage au quotient on a sur

$$\overline{\pi}(F) = \cup_{\Sigma, T \in S} \overline{\pi}_{\Sigma T}(F)$$

une loi de composition $(A, B) \to A \bullet B$ induite de celle de $\overline{\mathrm{Hol}}(F)$ et munissant $\overline{\pi}(F)$ d'une structure de groupoïde transitif sur S.

Soit enfin $\pi_{xy}(F)$, où x, $y \in V$, le quotient de

$$\cup_{\Sigma, T \in S, x \in \Sigma, y \in T} \overline{\pi}_{\Sigma T}(F)$$

par la relation d'équivalence $A \sim B$ définie par

$$A \bullet [(T, \hat{y}, T')] = [\Sigma, \hat{x}, \Sigma')] \bullet B, \text{ avec } A \in \overline{\pi}_{\Sigma T}(F), \ B \in \overline{\pi}_{\Sigma' T'}(F).$$

Muni de la loi de composition $(A, B) \to A \bullet B$ induite de celle de $\overline{\pi}(F)$ par passage au quotient, $\pi(F) = \cup_{x, y \in V} \pi_{xy}(F)$ est un groupoïde transitif sur V, qu'on appelle [7] le *groupoïde fondamental* de F; et dont le groupe structural, noté aussi $\pi(F)$, et identique à celui du groupoïde transitif $\overline{\pi}(F)$, sera appelé *groupe fondamental* de F.

On a sur $\pi(F)$ une structure naturelle de groupoïde de Lie galoisien sur V, et un foncteur plein, dit canonique, $\chi_F: \pi(V) \to \pi(F)$ (cf. [7]).

3.2. Le groupoïde fondamental $\pi(F)$ admet la description suivante dans le cas où V admet un feuilletage F^* transverse à F.

On désignera par $\overline{\mathrm{Hol}}(F, F^*)$ le sous-ensemble de Hol(F) formé des chaînes d'holonomie $(\Sigma_0, \phi_0, \dots, \phi_{n-1}, \Sigma_n)$ avec $\Sigma_i \in S^*$ où S^* est le sous-ensemble de S formé d'ouverts de feuilles de F^*.

On verrait aisément comme en [6] que l'existence en tout point de V d'un système fondamental de voisinages bitriviaux [5], ou, autrement dit, bidistingués [2], relatifs à F, F^*, entraîne, quels que soient Σ, T $\in S^*$, que

$$\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F, F^*) = \overline{\mathrm{Hol}}(F, F^*) \cap \overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F)$$

est non vide et que la restriction à $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F, F^*)$ de l'application canonique $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F) \to \bar{\pi}_{\Sigma T}(F)$ est surjective.

Dans le cas où les feuilles de F^* sont les fibres d'une surmersion $f: V \to W$, on écrira $\overline{\mathrm{Hol}}(F, f)$ au lieu de $\overline{\mathrm{Hol}}(F, F^*)$.

3.3. Soit en particulier un fibré feuilleté [2, 5], c'est-à-dire la donnée d'une surmersion de variétés connexes $p: V \to W$ et d'un feuilletage F tel que p/F soit un revêtement pour toute feuille F de F. On sait que (V, p, W) est alors une fibration, dont les fibres, qu'on supposera connexes, sont transverses à F. Pour $\mathbf{V} = \{p^{-1}(x) \mid x \in W\}$, on a un foncteur $\lambda: \pi(W) \to \mathrm{Diff}\, \mathbf{V}$ défini comme suit [5]:

Pour $\omega \in \pi_{xy}(W)$, $\lambda(\omega): p^{-1}(x) \to p^{-1}(y)$ est tel que $\lambda(\omega)(z)$ est l'extrémité du relèvement d'origine z relatif à p/F_z d'un chemin γ tel que $[\gamma] = \omega$.

On sait [5] que Hol(F) s'identifie canoniquement à l'ensemble des germes des difféomorphismes $\phi \in G_F$, où G_F désigne le groupoïde transitif $\lambda(\pi(\mathbf{V}))$ des difféomorphismes de $\mathbf{V}$. Pour des ouverts connexes et simplement connexes Σ, T de $\mathbf{V}^\wedge = \Sigma_{x \in W}\, p^{-1}(x)$, on observe que $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, G_F)$, défini comme en (1.1), n'est autre chose que $\overline{\mathrm{Hol}}_{\Sigma T}(F, p)$. D'où, compte tenu de (3.2) et de la Remarque de (1.1), un isomorphisme canonique

$$\pi(F) \div \pi(\mathbf{V}, G_F). \tag{1}$$

Pour $x \in W$ fixé, soit $G_{F,x}$ l'image de l'homomorphisme

$$\lambda: \pi_x(W) \to \mathrm{Diff}\ p^{-1}(x).$$

L'inclusion $p^{-1}(x) \subset V$ induit, $p: V \to W$ étant une fibration, un foncteur fidèle $\pi(p^{-1}(x)) \to \pi(V)$, relativement auquel on peut énoncer avec les notations de (1.4) et (3.2):

PROPOSITION. *Soit (V, p, W) un fibré feuilleté par F et à fibres connexes. Pour tout $x \in V$, il existe un foncteur canonique pleinement fidèle $\pi(p^{-1}(x), G_{F,x}) \to \pi(F)$ tel que*

(2)
$$\begin{tikzcd} \pi(p^{-1}(x)) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & \pi(p^{-1}(x), G_{F,x}) \arrow[d] \\ \pi(V) \arrow[r, "\chi^F"] & \pi(F) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

En effet, compte tenu de (1) et de la Proposition de (2.2), $\pi(p^{-1}(x), G_{F,x})$ s'identifie canoniquement à un sous-groupoïde plein de $\pi(F)$, et la commutativité de (2) résulte alors directement de la définition des flèches horizontales.

Compte tenu des identifications dans (2) de $\pi(p^{-1}(x))$ et de $\pi(p^{-1}(x), G_{F,x})$ avec des sous-groupoïdes de $\pi(V)$ et de $\pi(F)$, on peut enfin énoncer:

COROLLAIRE. *Le groupe fondamental $\pi(F)$ du feuilletage F du fibré feuilleté (V, p, W) à fibres connexes n'est autre, quel que soit $x \in V$, que le groupe fondamental $\pi(p^{-1}(x), G_{F,x})$ et, pour $z \in p^{-1}(x)$, l'homomorphisme canonique $\chi: \pi_z(p^{-1}(x)) \to \pi_z(p^{-1}(x), G_{F,x})$ est la restriction de l'épimorphisme canonique $\chi_F: \pi_z(V) \to \pi_z(F)$.*

3.4. Soit $(W^\wedge, p, W)$ un revêtement universel de la variété connexe W, muni d'un point base $x_0^\wedge \in W^\wedge$, soit Σ une variété connexe et soit δ: $\pi_{x_0}(W) \to \mathrm{Diff}\ \Sigma$ avec $x_0 = p(x_0^\wedge)$, un homomorphisme. On a une action

$$\rho_{\delta, x_0^\wedge}: (\omega, (x^\wedge, y)) \to (\mu(\omega)^{-1}x^\wedge, \delta(\omega)y)$$

du groupe discret $\pi_{x_0}(W)$ sur la variété $W^\wedge\times\Sigma$, où $\mu(\omega)$ désigne l'unique automorphisme de $(W^\wedge, p, W)$ tel que $\mu(\omega)x_0^\wedge$ soit l'extrémité du relèvement d'origine $x_0^\wedge$ d'un chemin γ tel que $[\gamma] = \omega$. On sait [2, 5] que la variété quotient $W^\wedge\times_{\delta, x_0^\wedge}\Sigma$ de $W^\wedge\times\Sigma$ par $\rho_{\delta, x_0^\wedge}$ est définie et admet un et un seul feuilletage $F_{\delta, \hat{x}_0}$ tel que $\theta^{-1}(F_{\delta, \hat{x}_0})$, où θ: $\hat{W}\times\Sigma \to \hat{W}\times_{\delta, \hat{x}_0}\Sigma$ est la surmersion canonique, ait pour feuilles les $\hat{W}\times\{y\}$, $y \in \Sigma$. On a un fibré $(\hat{W}\times_{\delta, \hat{x}_0}\Sigma, q, W)$, où q est induit de $p\circ pr_{\hat{W}}$, feuilleté par $F_{\delta, \hat{x}_0}$ et de fibre type Σ. On dit [2, 5] que $F_{\delta, \hat{x}_0}$ est la suspension de δ à travers le revêtement universel $(\hat{W}, p, W)$ muni de $\hat{x}_0$. Il est naturel de chercher à décrire le groupe fondamental $\pi(F_{\delta, \hat{x}_0})$ à partir de δ. Or le plongement $\theta_{\hat{x}_0}$: $y \to \theta(\hat{x}_0, y)$ de Σ dans $\hat{W}\times_{\delta, \hat{x}_0}\Sigma$ induit un foncteur fidèle $(\theta_{\hat{x}_0})_*$: $\pi(\Sigma) \to \pi(\hat{W}\times_{\delta, \hat{x}_0}\Sigma)$ et on peut énoncer:

PROPOSITION. *Soit F la suspension de δ: $\pi_{x_0}(W) \to \mathrm{Diff}\,\Sigma$ à travers le revêtement universel $(\hat{W}, p, W)$ muni de $\hat{x}_0$. Il existe un foncteur pleinement fidèle de $\pi(\Sigma, \mathrm{Im}\delta) \to \pi(F)$ qui rend*

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} \pi(\Sigma) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\theta_{\hat{x}_0}"'] & \pi(\Sigma, \mathrm{Im}\delta) \arrow[d] \\ \pi(\hat{W}\times_{\delta, \hat{x}_0}\Sigma) \arrow[r, "\chi_F"] & \pi(F) \end{tikzcd}$$

commutatif.

En effet, le fibré $(\hat{W}\times_{\delta, \hat{x}_0}\Sigma, q, W)$ feuilleté par F induit, d'après (3.3), un foncteur λ: $\pi(W) \to \mathrm{Diff}\, W$ et on observe [5] que $\theta_{\hat{x}_0}$ induit, pour tout $\omega \in \pi_{x_0}(W)$, un carré commutatif de difféomorphismes

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\theta_{\hat{x}_0}"] \arrow[d, "\delta(\omega)"'] & q^{-1}(x_0) \arrow[d, "\lambda(\omega)"] \\ \Sigma \arrow[r, "\theta_{\hat{x}_0}"] & q^{-1}(x_0) \end{tikzcd}$$

D'où un isomorphisme $\pi(\Sigma, \mathrm{Im}\delta) \div \pi(q^{-1}(x_0), G_{F, x_0})$, qui, compte tenu de la Proposition de (3.3), entraîne l'énoncé.

Les identifications dans (1) de $\pi(\Sigma)$ et $\pi(\Sigma, \mathrm{Im}\delta)$ avec des sous-groupoïdes de $\pi(\hat{W}\times_{\delta, \hat{x}_0}\Sigma)$ et $\pi(F)$ permettent enfin d'énoncer:

COROLLAIRE. *Le groupe fondamental de la suspension F de δ: $\pi_{x_0}(W)) \to \mathrm{Diff}\,\Sigma$ à travers $(\hat{W}, p, W)$ n'est autre que le groupe fondamental $\pi(\Sigma, \mathrm{Im}\delta)$ et, pour $y \in \Sigma$, l'homomorphisme canonique χ: $\pi_y(\Sigma) \to \pi_y(\Sigma, \mathrm{Im}\delta)$ est la restriction de l'épimorphisme canonique*

$$\chi_F: \pi_y(\hat{W}\times_{\delta, x_0}\Sigma) \to \pi_y(F).$$

BIBLIOGRAPHIE.

1. C. EHRESMANN, Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahres. d. Deutschen Math.* 60-2 (1957), 49-77. Reproduit dans *"Charles Ehresmann, Oeuvres complètes et commentées"* II-1, Amiens 1983, 125-153.

2. G. HECTOR & U. HIRSCH, *Introduction to the Geometry of Foliations*, Vieweg, Part A (1981), Part B (1983).

3. J. PRADINES, How to define the differentiable graph of a singular foliation? *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXVI-4 (1985), 339-380.

4. W. van EST, Rapport sur les S-atlas, *Astérisque* 116 (1984).

5. P. VER EECKE, Introduction à la théorie des variétés feuilletées, *Esquisses Math.* 31, Amiens, 1982.

6. P. VER EECKE, Sur le groupe fondamental d'un feuilletage, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXV-4 (1984), 381-428.

7. P. VER EECKE, Sur le classifiant du groupoïde d'holonomie et sur le groupoïde fondamental d'un feuilletage, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 89 (2), (1986), 179-200.

U.F.R. de Mathématiques et Info.
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS Cedex. FRANCE.

ADDENDUM

Un groupe de difféomorphismes G d'une variété connexe V opère sur le groupoïde de Poincaré $\pi(V)$ par l'application $(f, \omega) \to f_*\omega$ de $G\times\pi(V)$ dans $\pi(V)$. Ceci permet [1'] de définir le groupoïde produit semi-direct $\pi(V)\times^{\sim}G$ sur V, où

$$(\pi(V)\times^{\sim}G)_{xy} = \cup_{g\in G}\ \pi_{xg^{-1}(y)}(V) \times \{g\}$$

et où la loi de composition

$$(\pi(V)\times^{\sim}G)_{xy} \times (\pi(V)\times^{\sim}G)_{yz} \to (\pi(V)\times^{\sim}G)_{xz}$$

est définie par

$$(\omega, g) \bullet (\omega, g') = (\omega(g_*^{-1}\omega'), g'\circ g).$$

Le foncteur canonique χ: $\pi(V) \to \pi(V, G)$ est la restriction d'un foncteur plein canonique $\chi^{\sim}$: $\pi(V)\times^{\sim}G \to \pi(V, G)$ compte tenu de l'identification évidente $\omega \to (\omega, V)$ de $\pi(V)$ avec un sous-groupoïde distingué de $\pi(V)\times^{\sim}G$.

Si tout $g \in G$ est génériquement libre, c'est-à-dire que $j_x(g) = j_x(1_V)$ entraîne $g = 1_V$, alors $\chi^{\sim}$ est un isomorphisme et $\pi(V)$ s'identifie à un sous-groupoïde distingué de $\pi(V, G)$. Ceci a été remarqué par van Est [2'] dans le cas particulier où V est simplement connexe.

[Plus généralement d'ailleurs on peut raisonnablement conjecturer que le noyau de $\chi^{\sim}$ est caractérisé comme suit: pour que $\chi^{\sim}(\gamma) = \chi^{\sim}(\gamma')$, il faut et il suffit qu'il existe $\gamma_1,\ldots, \gamma_n \in \pi(V)\times^{\sim}G$ et $\delta_0,\ldots, \delta_n \in G^{\sim}$ tels que

$$\gamma = \gamma_1\bullet\ldots\bullet\gamma_n,\quad \gamma' = \delta_0\bullet\gamma_1\bullet\delta_1\bullet\ldots\bullet\delta_{n-1}\bullet\gamma_n\bullet\delta_n,$$

où compte tenu de $V \subset \pi(V)$, $G^{\sim}$ est l'ensemble des $(x, g) \in V\times G$ tels que $j_x(g) = j_x(1_V)$.]

Le Corollaire de (3.4) admet alors le complément suivant:

Si chaque $\delta(\omega)$, $\omega \in \pi_{x_0}(W)$, *est génériquement libre, alors le groupe de Poincaré* $\pi(\Sigma)$ *est un sous-groupe distingué de* $\pi(F)$.

Les démonstrations détaillées de ces résultats complémentaires seront publiées ultérieurement.

Bibliographie complémentaire.

1'. P. HIGGINS & J. TAYLOR, The fundamental groupoid and the homotopy crossed complex of an orbit space, *Lecture Notes in Math.* **962**, Springer (1982).

2'. W. van EST, Fundamental groups of manifold schemes, *Topological Structures II*, Part I, Math. Centre Tracts, Amsterdam 1979.