

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

PAUL VER EECHE

Sur le groupe fondamental d'un feuilletage défini par une suspension

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
27, n° 4 (1986), p. 145-160

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1986__27_4_145_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LE GROUPE FONDAMENTAL D'UN FEUILLETAGE
DÉFINI PAR UNE SUSPENSION**
par Paul VER EECKE

ABSTRACT. This paper is devoted to the fundamental group $\pi(\mathbf{F})$ of a foliation \mathbf{F} - already studied in its general features [6, 7] - but here in the particular case where \mathbf{F} is a suspension defined by $\delta: \pi(W) \rightarrow \text{Diff } \Sigma$. It is natural to ask how $\pi(\mathbf{F})$ may be described from δ . In fact, $\pi(\mathbf{F})$ is nothing else than the fundamental group $\pi(\Sigma, \text{Im}\delta)$ of the manifold scheme defined by $\text{Im}\delta$ on Σ [4]. In order to see this, the essential point, proved in Lemmas and Proposition (2.2), is that the fundamental group $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ of a transitive groupoid \mathbf{G} of diffeomorphisms of a set \mathbf{V} of manifolds reduces to $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G} \cap \text{Diff } \mathbf{V})$, for any $\mathbf{V} \in \mathbf{V}$.

INTRODUCTION.

L'article présent concerne le groupe fondamental $\pi(\mathbf{F})$ d'un feuilletage, déjà étudié ailleurs dans ses aspects généraux [6, 7], mais ici dans le cas particulier où \mathbf{F} est défini par une suspension $\delta: \pi(W) \rightarrow \text{Diff } \Sigma$. Il est naturel de se demander comment $\pi(\mathbf{F})$ est décrit à partir de δ . En fait, $\pi(\mathbf{F})$ n'est rien d'autre que le groupe fondamental $\pi(\Sigma, \text{Im}\delta)$ du schéma de variété [4] défini par $\text{Im}\delta$ sur Σ . Le point essentiel, démontré dans les lemmes et la Proposition (2.2), réside dans le fait que le groupe fondamental $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ d'un groupoïde transitif \mathbf{G} de diffeomorphismes d'un ensemble \mathbf{V} de variétés, les objets de \mathbf{G} , n'est autre chose que $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G} \cap \text{Diff } \mathbf{V})$ pour tout $\mathbf{V} \in \mathbf{V}$.

1. LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL ASSOCIÉ A UN GROUPOÏDE DE DIFFÉOMORPHISMES.

1.1. Etant donné un ensemble \mathbf{V} de variétés C^∞ , séparées et diffeomorphes, on posera

$$\text{Diff } \mathbf{V} = \cup_{V, W \in \mathbf{V}} \text{Diff}(V, W),$$

où $\text{Diff}(V, W)$, avec $\text{Diff } V = \text{Diff}(V, V)$, est l'ensemble des difféomorphismes de V sur W . La loi de composition évidente

$$\text{Diff}(U, V) \times \text{Diff}(V, W) \rightarrow \text{Diff}(U, W)$$

munit $\text{Diff } V$ d'une structure de groupoïde transitif sur V .

On appellera *groupoïde de difféomorphismes sur V* tout sous-groupoïde G de $\text{Diff } V$ transitif sur V . On observe que G opère au sens de [1] sur $\hat{V} = \Sigma_{v \in V} V$, muni de sa projection canonique sur V . Pour V, W dans V , on posera

$$G_{vw} = G \cap \text{Diff}(V, W), \text{ avec } G_v = G_{vv}.$$

On supposera que V admet un domaine fondamental [4] pour G , c'est-à-dire un ouvert connexe $U \subset \hat{V}$ tel que $\hat{V} = GU$, ce qui équivaut à $V = G_v$, avec $V \in V$ défini par $V \supset U$.

Pour $V, W \in V$, on désignera par $\Pi(V, W)$ l'ensemble des germes locaux inversibles de morphismes de V dans W , muni de l'application source-but $(\alpha, \beta): \Pi(V, W) \rightarrow V \times W$, et par $J(G_{vw})$ le sous-ensemble de $\Pi(V, W)$ formé des $j_x(f)$, avec $f \in G_{vw}$, $x \in V$. On posera:

$$\text{Hol}(V, G) = \bigcup_{v, w \in V} J(G_{vw})$$

et $\text{Hol}_{U, U'}(V, G) = \{ \phi \in \text{Hol}(V, G) \mid \alpha(\phi) \in U, \beta(\phi) \in U' \},$

pour U, U' contenus dans \hat{V} . Soit $S(V)$, ou plus simplement S , l'ensemble des ouverts connexes et simplement connexes de \hat{V} .

On appellera *chaîne d'holonomie* de (V, G) tout système

$$\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0, \dots, \phi_{n-1}, \Sigma_n),$$

avec $\Sigma_i \in S, i = 0, \dots, n$

et $\phi_i \in \text{Hol}_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}}(V, G), i = 0, \dots, n-1.$

On dira que Σ_0 et Σ_n sont l'origine et l'extrémité de Γ . On désignera par $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G)$ l'ensemble des chaînes d'holonomie de (V, G) d'origine Σ et d'extrémité T . Du fait que (V, G) admet un système fondamental, on observe aisément comme en [6] que $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G)$ n'est pas vide. Sur

$$\overline{\text{Hol}}(V, G) = \bigcup_{\Sigma, T \in S} \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G)$$

on a une loi de composition partielle associative évidente $(\Gamma, \Gamma') \rightarrow \Gamma \cdot \Gamma'$ définie lorsque l'origine de Γ' est l'extrémité de Γ .

Pour $\phi \in \text{Hol}_{\Sigma T}(V, G)$ avec $\Sigma, T \in S$, on désignera par $C_{\Sigma T}(\phi)$ la composante connexe de ϕ dans l'ouvert $\text{Hol}_{\Sigma T}(V, G)$ de $\Pi(V, W)$ muni de

sa topologie usuelle d'espace étalé sur V par $\alpha: \Pi(V, W) \rightarrow V$, avec V et W dans \mathbb{V} tels que $V \supset \Sigma, W \supset T$.

Etant donné une 1-chaîne $\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0, \Sigma_1)$ et une 2-chaîne $\Gamma' = (\Sigma_0, \phi_1, \Sigma_1, \phi_2, \Sigma_2)$ dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_2}(V, G)$, on définit la relation $\Gamma \ll \Gamma'$ par la condition suivante:

il existe $f_1 \in G_{V_0 V_1}, f_2 \in G_{V_1 V_2}$ tels que
 $\phi_1 = j_{x_1}(f_1), \phi_2 = j_{x_2}(f_2), \phi_0 = j_{x_0}(f_2 \circ f_1), j_{x_0}(f_1) \in C_{\Sigma_0 \Sigma_1}(\phi_1),$
 $j_{x_1}(f_2) \in C_{\Sigma_1 \Sigma_2}(\phi_2),$
 avec $y_i = f_i(x_0), V_i \supset \Sigma_i, x_i = \alpha(\phi_i), i = 0, 1, 2.$

Plus généralement, on définit la relation $\Gamma \ll \Gamma'$ par la condition suivante:

il existe une 1-chaîne Γ_2 , une 2-chaîne Γ'_2 (et éventuellement des chaînes Γ_1, Γ_3) telles que
 $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot \Gamma_3, \Gamma' = \Gamma_1 \cdot \Gamma'_2 \cdot \Gamma_3$ et $\Gamma_2 \ll \Gamma'_2$ au sens ci-dessus.

On dira que $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G)$ sont *contigües* et on notera $\Gamma \div \Gamma'$ si $\Gamma \ll \Gamma'$ ou $\Gamma' \ll \Gamma$. On a alors sur $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G)$ une relation d'équivalence $\Gamma \sim \Gamma'$ définie par la condition suivante:

il existe $\Gamma_i \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G), i = 0, \dots, n$ telles que
 $\Gamma = \Gamma_0 \div \Gamma_1 \div \dots \div \Gamma_{n-1} \div \Gamma_n = \Gamma'.$

D'où une relation d'équivalence sur $\overline{\text{Hol}}(V, G)$ qui n'est autre que celle compatible avec la loi de composition de $\overline{\text{Hol}}(V, G)$ et engendrée par $\Gamma \ll \Gamma'$, où Γ est une 1-chaîne.

On peut aussi définir dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma_0 \Sigma_2}(V, G)$ une relation

$$(\Sigma_0, \phi, \Sigma_2) < (\Sigma_0, \phi_1, \Sigma_1, \phi_2, \Sigma_2)$$

par la condition:

il existe des germes $\phi'_1 \in \text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(V, G), \phi'_2 \in \text{Hol}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(V, G)$ composables et tels que

$$(1) \quad \phi'_1 \phi'_2 = \phi, C_{\Sigma_0 \Sigma_1}(\phi_1) = C_{\Sigma_0 \Sigma_1}(\phi'_1), C_{\Sigma_1 \Sigma_2}(\phi_2) = C_{\Sigma_1 \Sigma_2}(\phi'_2).$$

REMARQUE. Les relations $\Gamma < \Gamma'$ et $\Gamma \ll \Gamma'$ où Γ est une 1-chaîne, engendrent dans $\overline{\text{Hol}}(V, G)$ la même relation d'équivalence compatible avec la loi de composition.

Il s'agit, d'une part, d'observer que

$$(\Sigma_0, \phi, \Sigma_2) \ll (\Sigma_0, \phi_1, \Sigma_1, \phi_2, \Sigma_2)$$

entraîne évidemment

$$\langle \Sigma_0, \emptyset, \Sigma_2 \rangle < \langle \Sigma_0, \emptyset_1, \Sigma_1, \emptyset_2, \Sigma_2 \rangle$$

et, d'autre part, de montrer que cette dernière relation entraîne

$$(2) \quad \langle \Sigma_0, \emptyset, \Sigma_2 \rangle \sim \langle \Sigma_0, \emptyset_1, \Sigma_1, \emptyset_2, \Sigma_2 \rangle.$$

Or, avec $\emptyset'_1, \emptyset'_2$ vérifiant (1), on a en particulier

$$\langle \Sigma_0, \emptyset, \Sigma_2 \rangle \sim \langle \Sigma_0, \emptyset'_1, \Sigma_1 \rangle \bullet \langle \Sigma_1, \emptyset'_2, \Sigma_2 \rangle.$$

Compte tenu de ce que, d'autre part,

$$\langle \Sigma_0, \emptyset_1, \Sigma_1, \emptyset_2, \Sigma_2 \rangle \sim \langle \Sigma_0, \emptyset, \Sigma_1 \rangle \bullet \langle \Sigma_1, \emptyset_2, \Sigma_2 \rangle,$$

il n'est donc que de vérifier

$$(3) \quad \langle \Sigma_0, \emptyset_1, \Sigma_1 \rangle \sim \langle \Sigma_0, \emptyset'_1, \Sigma_1 \rangle \quad \text{et}$$

$$(4) \quad \langle \Sigma_1, \emptyset_2, \Sigma_2 \rangle \sim \langle \Sigma_1, \emptyset'_2, \Sigma_2 \rangle.$$

Or on a (3) (et, de façon analogue (4)) parce que $C_{\Sigma_0 \Sigma_1}(\emptyset_1) = C_{\Sigma_0 \Sigma_1}(\emptyset'_1)$ entraîne l'existence de $f_i \in G_{V_0 \cup V_1}$, $i = 0, \dots, n$, avec $V_0 \supset \Sigma_0$, $V_1 \supset \Sigma_1$, et d'ouverts connexes $\Omega_i \subset \Sigma_0 \cap f_{i-1}^{-1}(\Sigma_1)$, $i = 0, \dots, n$, tels que

$$\emptyset_1 = j_{x_i}(f_i) \text{ avec } x_i \in \Omega_i,$$

$$\{ j_x(f_i) \mid x \in \Omega_i \} \cap \{ j_x(f_{i+1}) \mid x \in \Omega_{i+1} \} \neq \emptyset$$

$$\text{pour } i = 0, \dots, n-1, \text{ et } \emptyset'_1 = j_{y_n}(f_n) \text{ avec } y_n \in \Omega_n.$$

1.2. On désignera par $\bar{\pi}_{\Sigma T}(V, G)$ le quotient de $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G)$ par $\Gamma \sim \Gamma'$, et on dira que $\Gamma \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G)$ est un représentant de son image $[\Gamma]$ par l'application canonique $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G) \rightarrow \bar{\pi}_{\Sigma T}(V, G)$. Par passage au quotient, on induit de $\text{Hol}(V, G)$ sur

$$\pi(V, G) = \bigcup_{\Sigma, T \in S} \pi_{\Sigma T}(V, G)$$

une loi de composition partiellement définie $(A, B) \rightarrow A \bullet B$. Comme en [6] on observe que $\bar{\pi}(V, G)$ se trouve ainsi muni d'une structure de groupoïde transitif sur S . L'unité correspondant à $\Sigma \in S$ n'est autre que $[(\Sigma, x^{\wedge}, \Sigma)]$, indépendant de $x \in \Sigma$, avec $x^{\wedge} = j_x(1_{\Sigma})$. Le groupe structural du groupoïde transitif $\bar{\pi}(V, G)$ est le groupe fondamental du schéma de variété $(V^{\wedge}, \text{Hol}(V, G))$ [4]. Pour $x, y \in V^{\wedge}$, on a sur

$$\bar{\pi}_{x y}(V, G) = \bigcup_{\Sigma, T \in S, x \in \Sigma, y \in T} \bar{\pi}_{\Sigma T}(V, G)$$

la relation d'équivalence suivante:

on a $A \sim B$ avec $A \in \pi_{\Sigma T}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$, $B \in \bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$, si
 $[(\Sigma, x', \Sigma')] \cdot B = A \cdot [(T, y', T')]$ dans $\bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$.

On désignera par $\pi_{xy}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ le quotient de $\bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ par cette relation d'équivalence. Pour $\Sigma, T \in \mathbf{S}$ et $x \in \Sigma, y \in T$ fixés, la restriction $k_{(\Sigma, x)(T, y)}$ à $\bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ de l'application canonique

$$\bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V}, \mathbf{G}) \rightarrow \pi_{xy}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$$

est une bijection, dite canonique. Par ces bijections, la loi du groupoïde $\bar{\pi}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ induit sur

$$\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G}) = \cup_{x, y \in \mathbf{V}} \pi_{xy}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$$

une loi de composition $\langle A, B \rangle \rightarrow A \cdot B$ munissant $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ d'une structure de groupoïde transitif sur \mathbf{V} , ayant le même groupe structural que $\bar{\pi}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$.

On dira que $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ et son groupe structural, noté aussi $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G})$, sont le groupoïde fondamental et le groupe fondamental de $\langle \mathbf{V}, \mathbf{G} \rangle$. Dans le cas où \mathbf{V} est réduit à une seule variété, c'est-à-dire dans le cas $\langle \mathbf{V}, \mathbf{G} \rangle$ d'une variété V munie d'un groupe $G \subset \text{Diff } V$, on désignera le groupoïde fondamental et le groupe fondamental par $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G})$. On observe que le groupe $\pi(\mathbf{V}, \mathbf{G})$ ne dépend que de la classe de conjugaison de G dans V . Dans le cas plus particulier où $G = 1_V$, ce qui entraîne que V est connexe, le groupoïde $\pi(\mathbf{V}, 1_V)$ n'est autre que le groupoïde fondamental du feuilletage discret sur V , canoniquement isomorphe au groupoïde de Poincaré $\pi(V)$ [6]; ce qui justifie la notation adoptée.

1.3. Etant donné $\langle \mathbf{V}, \mathbf{G} \rangle$ et $\langle \mathbf{V}', \mathbf{G}' \rangle$ comme ci-dessus, on écrira

$$\langle \mathbf{V}', \mathbf{G}' \rangle < \langle \mathbf{V}, \mathbf{G} \rangle \quad \text{lorsque } \mathbf{V}' \subset \mathbf{V} \text{ et } \mathbf{G}' \subset \mathbf{G}.$$

Pour $\Sigma, T \in \mathbf{S}(\mathbf{V}')$, on a alors $\bar{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}', \mathbf{G}') \subset \bar{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$, entraînant par passage au quotient des applications canoniques

$$\bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}', \mathbf{G}') \rightarrow \bar{\pi}_{\Sigma T}(\mathbf{V}, \mathbf{G}) \quad \text{et} \quad \bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V}', \mathbf{G}') \rightarrow \bar{\pi}_{xy}(\mathbf{V}, \mathbf{G})$$

pour $x \in \Sigma, y \in T$. On a dès lors des foncteurs canoniques évidents

$$\bar{\pi}(\mathbf{V}', \mathbf{G}') \rightarrow \bar{\pi}(\mathbf{V}, \mathbf{G}) \quad \text{et} \quad \pi(\mathbf{V}', \mathbf{G}') \rightarrow \pi(\mathbf{V}, \mathbf{G}).$$

Pour tout $V \in \mathbf{V}$, on a en particulier un foncteur $\pi(V, G_V) \rightarrow \pi(V, G)$, dont on montrera en (2.2) qu'il est pleinement fidèle.

1.4. Soit G un groupe de difféomorphismes de la variété connexe V . L'identification canonique $\pi(V) \div \pi(V, 1_V)$ du (1.2) et le foncteur canonique $\pi(V, 1_V) \rightarrow \pi(V, G)$ de (1.3) définissent un foncteur $\chi: \pi(V) \rightarrow \pi(V, G)$ dit canonique et qui peut d'ailleurs être défini aussi comme suit.

Comme dans [7], on montre d'abord que $\pi(V, G)$ est un groupoïde de Lie galoisien [3] sur V , dont la topologie est engendrée par les

$$\text{où } \{ K_{(x, y)}(\Gamma) \mid x \in \Sigma, y \in T \}, \\ \Gamma \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G) \text{ et } \Sigma, T \in \mathbf{S}.$$

Le foncteur χ ci-dessus n'est autre que le foncteur canonique [7] du groupoïde de Lie galoisien $\pi(V, G)$.

2. LE PLONGEMENT $\pi(V, G_V) \rightarrow \pi(V, G)$.

2.1. Pour (V, G) comme ci-dessus, soit $V, W \in \mathbf{V}$ et G_{VW} le sous-groupoïde plein de G sur (V, W) . Pour $\Sigma, T \in \mathbf{S}(\langle V, W \rangle)$, on posera

$$\overline{\text{Hol}}'_{\Sigma T}(V, G) = \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\langle V, W \rangle, G_{VW}).$$

Comme dans le cas général, on sait que $\overline{\text{Hol}}'_{\Sigma T}(V, G) \neq \emptyset$.

Pour $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\text{Hol}}'_{\Sigma T}(V, G)$, on écrira $\Gamma \sim_{\Sigma T} \Gamma'$, et on dira aussi que $\Gamma \sim \Gamma'$ dans $\overline{\text{Hol}}'_{\Sigma T}(V, G)$, si $\Gamma \sim \Gamma'$ dans $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\langle V, W \rangle, G_{VW})$. Ceci revient à dire qu'il existe $\Gamma_i \in \overline{\text{Hol}}'_{\Sigma T}(V, G)$, $i = 0, \dots, n$, tels que

$$\Gamma = \Gamma_0 \div \Gamma_1 \dots \div \Gamma_{n-1} \div \Gamma_n = \Gamma'.$$

Dans le cas particulier $V = W$, on a

$$\overline{\text{Hol}}'_{\Sigma T}(V, G) = \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G_V).$$

2.2. Soit $\Gamma \in \overline{\text{Hol}}(V, G)$ avec $\Gamma = \langle \Sigma_0, \beta_0, \dots, \beta_{n-1}, \Sigma_n \rangle$ et $x_i = \alpha(\beta_i)$, $i = 0, \dots, n-1$, $V_i \in \mathbf{V}$, $i = 0, \dots, n-1$ définis par $\Sigma_i \subset V_i$. On dira que

$$\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle \in G_{V_0 V_1} \times \dots \times G_{V_{n-1} V_n}$$

est associé à Γ si on a $j_{x_i}(f_i) = \phi_i$, $i = 0, \dots, n-1$. Soit alors $z_i \in V_0$, $z'_i \in V_n$, $i = 0, \dots, n-1$ définis par

$$z_0 = x_0, (f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)(z_i) = x_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1$$

et
$$z'_i = (f_{n-1} \circ \dots \circ f_0)(z_i).$$

Pour $i = 0, \dots, n-1$, on définit alors $\Gamma_i(f_0, \dots, f_{n-1}) \in \text{Hol}'_{\Sigma \times \Sigma}(\mathbb{V}, \mathbb{G})$ par

$$\Gamma_i(f_0, \dots, f_{n-1}) = \langle \Sigma_0, z_0, f_0^{-1}(\Sigma_1), z_1, \dots, z_{i-1}, (f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_i), j_{z_i}(f_{n-1} \circ \dots \circ f_0), (f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}), z'_{i+1}, \dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}), z'_{n-1}, \Sigma_n \rangle.$$

LEMME 1. Soit $\Gamma \in \overline{\text{Hol}}(\mathbb{V}, \mathbb{G})$ avec $\Gamma = \langle \Sigma_0, \phi_0, \dots, \phi_{n-1}, \Sigma_n \rangle$. Alors:

i) Quel que soit (f_0, \dots, f_{n-1}) associé à Γ , on a

$$\Gamma \sim \Gamma_i(f_0, \dots, f_{n-1}) \quad (\text{resp. } \Gamma \sim_{\Sigma \times \Sigma} \Gamma_i(f_0, \dots, f_{n-1}))$$

si $\Gamma \in \overline{\text{Hol}}'_{\Sigma \times \Sigma}(\mathbb{V}, \mathbb{G})$ pour $i = 0, \dots, n-1$.

ii) Quels que soient (f_0, \dots, f_{n-1}) et (f'_0, \dots, f'_{n-1}) associés à Γ , on a

$$\Gamma_j(f_0, \dots, f_{n-1}) \sim_{\Sigma \times \Sigma} \Gamma_j(f'_0, \dots, f'_{n-1}) \text{ pour } j, l = 0, \dots, n-1.$$

DÉMONSTRATION. On démontrera d'abord:

$$(1) \quad \Gamma \sim \Gamma_0(f_0, \dots, f_{n-1}) \quad (\text{resp. } \Gamma \sim_{\Sigma \times \Sigma} \Gamma_0(f_0, \dots, f_{n-1}))$$

par récurrence sur n , et ensuite

$$(2) \quad \Gamma_i(f_0, \dots, f_{n-1}) \sim_{\Sigma \times \Sigma} \Gamma_{i+1}(f_0, \dots, f_{n-1}) \\ \text{pour } i = 0, \dots, n-2.$$

Or (1) étant trivial pour $n = 1$, supposons cette relation vérifiée pour $n-1 \geq 1$, et vérifions-la pour n . On a

$$\Gamma = \langle \Sigma_0, \phi_0, \Sigma_1 \rangle * \Gamma', \text{ avec } \Gamma' = \langle \Sigma_1, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \Sigma_n \rangle$$

et, en vertu de l'hypothèse de récurrence,

$$\Gamma' \sim \Gamma'_0(f_1, \dots, f_{n-1}) \quad (\text{resp. } \Gamma' \sim_{\Sigma \times \Sigma} \Gamma'_0(f_1, \dots, f_{n-1})).$$

Il vient donc

$$(3) \quad \Gamma \sim \langle \Sigma_0, \phi_0, \Sigma_1 \rangle * \Gamma'_0(f_1, \dots, f_{n-1}) \\ (\text{resp. dans } \overline{\text{Hol}}'_{\Sigma \times \Sigma}(\mathbb{V}, \mathbb{G})).$$

Puisque

$$\Gamma'_0(f_1, \dots, f_{n-1}) = (\Sigma_1, j_{k1}(f_{n-1}, \dots, f_1), (f_{n-1}, \dots, f_2)(\Sigma_2), \\ z'_2, \dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}), z'_{n-1}, \Sigma_n)$$

entraîne

$$\Gamma'_0(f_0, \dots, f_{n-1}) \sim_{\Sigma_1 \Sigma_{n-1}} (\Sigma_1, j_{f_0(x_0)}(f_{n-1} \circ \dots \circ f_1), (f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)(\Sigma_1), \\ z'_1, (f_{n-1} \circ \dots \circ f_2)(\Sigma_2), \dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}), z'_{n-1}, \Sigma_n),$$

il vient, compte tenu de (3),

$$\Gamma \sim (\Sigma_0, j_{x_0}(f_0), \Sigma_1) * (\Sigma_1, j_{f_0(x_0)}(f_{n-1} \circ \dots \circ f_1), (f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)(\Sigma_1), \\ z'_1, \dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}), z'_{n-1}, \Sigma_n) \div \Gamma_0(f_0, \dots, f_{n-1}) \\ (\text{resp. } \Gamma \sim_{\Sigma_0 \Sigma_n} \Gamma_0(f_0, \dots, f_{n-1})),$$

c'est-à-dire (1). En vue de démontrer (2), on observe d'abord que l'on peut écrire

$$\Gamma_i(f_0, \dots, f_n) = \Gamma' * \Gamma'' * \Gamma''' \quad \text{et} \quad \Gamma_{i+1}(f_0, \dots, f_n) = \Gamma' * \bar{\Gamma}'' * \Gamma''',$$

avec $\Gamma', \Gamma'', \Gamma''', \bar{\Gamma}'' \in \text{Hol}'_{\Sigma_0 \Sigma_n}(V, G)$ définis par

$$\Gamma' = (\Sigma_0, z_0, f_0^{-1}(\Sigma_1), z_1, \dots, z_{i-1}, (f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_i)); \\ \Gamma'' = ((f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_i), j_{z_i}(f_{n-1} \circ \dots \circ f_0), (f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}), \\ z'_{i+1}, (f_{n-1}, \dots, f_{i+2})(\Sigma_{i+2})), \\ \bar{\Gamma}'' = ((f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_i), z_i, (f_i \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_{i+1}), \\ j_{z_{i+1}}(f_{n-1} \circ \dots \circ f_0), (f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+2})(\Sigma_{i+2})), \\ \Gamma''' = ((f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+2})(\Sigma_{i+2}), z'_{i+2}, \dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}), z'_{n-1}, \Sigma_n).$$

Il suffit donc d'observer $\Gamma'' \sim_{\Sigma_0 \Sigma_n} \bar{\Gamma}''$, ce qui résulte de

$$\Gamma'' \sim_{\Sigma_0 \Sigma_n} ((f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_i), z_i, (f_i \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_{i+1}), \\ j_{z_i}(f_{n-1} \circ \dots \circ f_1), (f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}), z'_{i+1}, (f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+2})(\Sigma_{i+2})) \\ \sim_{\Sigma_0 \Sigma_n} \bar{\Gamma}''.$$

ii) Il suffit de vérifier l'énoncé dans le cas particulier où il existe k tel que $f_i = f'_i$ pour $i \neq k$. Mais on a alors

$$\Gamma_k(f_0, \dots, f_{n-1}) = \Gamma_k(f'_0, \dots, f'_{n-1}),$$

ce qui, compte tenu de (2), entraîne l'énoncé.

LEMME 2. Soit $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\text{Hol}}'_{\Sigma_0 \Sigma_n}(V, G)$ tels que $\Gamma \ll \Gamma'$ et soit

$$(f_0, \dots, f_{n-1}) \quad \text{et} \quad (f_0, \dots, f_{i-1}, f'_i, f''_i, f_{i+1}, \dots, f_{n-1})$$

associés respectivement à Γ, Γ' avec $f_i = f''_i \circ f'_i$. On a alors

$$\Gamma_k(f_0, \dots, f_{n-1}) \sim_{\text{TOT}} \Gamma_l(f_0, \dots, f_{i-1}, f'_i, f''_i, f_{i+1}, \dots, f_{n-1})$$

quels que soient $k = 0, \dots, n-1, l = 0, \dots, n$.

Soit $\Gamma = (\Sigma_0, j_{x_0}(f_0), \Sigma_1, \dots, j_{x_{n-1}}(f_{n-1}), \Sigma_n)$ et $\Gamma' = (\Sigma_0, j_{x_0}(f_0), j_{x_{i-1}}(f_{i-1}), \Sigma_i, j_{x'_i}(f'_i), \Sigma'_i, j_{x''_i}(f''_i), \Sigma_{i+1}, j_{x_i}(f_{i+1}), \dots, j_{x_{n-1}}(f_{n-1}), \Sigma_n)$.

Compte tenu de (2) du lemme précédent, on peut supposer $k = l = i$ et il n'est que d'observer qu'on a

$$\begin{aligned} \Gamma_i(f_0, \dots, f_{n-1}) &= (\Sigma_0, z_0^{\wedge}, f_0^{-1}(\Sigma_1), \dots, z_{i-1}^{\wedge}, (f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_i), \\ &\quad j_{x_i}(f_{n-1} \circ \dots \circ f_0), (f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}), z'_{i+1}^{\wedge}, \dots, f_{n-1}(\Sigma_{n-1}), z'^{n-1}_{n-1}, \Sigma_n) \\ &\sim_{\text{TOT}} (\Sigma_0, z_0^{\wedge}, f_0^{-1}(\Sigma_1), z_1^{\wedge}, \dots, z_{i-1}^{\wedge}, (f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)^{-1}(\Sigma_i)), \\ j_{x_i}(f_{n-1} \circ \dots \circ f_0), (f_{n-1} \circ \dots \circ f''_i)(\Sigma'_i), \bar{z}'_i, (f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+1})(\Sigma_{i+1}), \dots, z'^{n-1}_{n-1}, \Sigma_n) \\ &= \Gamma'_i(f_0, \dots, f_{i-1}, f'_i, f''_i, f_{i+1}, \dots, f_{n-1}), \end{aligned}$$

avec $z_j, z'_j, j = 0, \dots, n-1$ définis par

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0, & (f_{j-1} \circ \dots \circ f_0)(z_j) &= x_j, & j > 0, \\ & & (f_{n-1} \circ \dots \circ f_0)(z_j) &= z'_j \end{aligned}$$

et \bar{z}_i, \bar{z}'_i par

$$(f_{i-1} \circ \dots \circ f_0)(\bar{z}_i) = x'_i, \quad (f_{n-1} \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f''_i)(x''_i) = \bar{z}_i.$$

On peut dès lors démontrer le résultat annoncé en (1.3).

PROPOSITION. Soit G un groupoïde de difféomorphismes sur V . Pour tout $V \in V$, le foncteur canonique $\pi(V, G_V) \rightarrow \pi(V, G)$ est pleinement fidèle.

Pour des sous-variétés connexes et simplement connexes Σ, T de V , il s'agit de vérifier que l'application canonique

$$\bar{\pi}_{\Sigma T}(V, G_V) \rightarrow \bar{\pi}_{\Sigma T}(V, G)$$

est bijective. La surjectivité résulte de ce que, pour $\Gamma \in \text{Hol}_{\Sigma T}(V, G)$ et (f_0, \dots, f_n) associé à Γ , on a

$$\Gamma_0(f_0, \dots, f_n) \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G_V) \text{ et } \Gamma \sim \Gamma_0(f_0, \dots, f_n)$$

d'après le Lemme 1. Vérifions l'injectivité, c'est-à-dire que, pour $\Gamma, \Gamma' \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(V, G_V)$, on a

$$(1) \quad \Gamma \sim_{\Sigma T} \Gamma' \text{ si } \Gamma \sim \Gamma' \text{ dans } \overline{\text{Hol}}(V, G).$$

Il existe alors $\Gamma_i \in \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbb{V}, \mathbb{G})$, $i = 0, \dots, n$ tels que

$$\Gamma = \Gamma_0 \div \Gamma_1 \div \dots \div \Gamma_n = \Gamma'.$$

Pour $i = 0, \dots, n-1$, on a d'après le Lemme 2 des systèmes f_i, f'_i respectivement associés à Γ_i, Γ_{i+1} tels que

$$(2) \quad \Gamma_i f_i \sim_{\Sigma T} \Gamma_{i+1} f'_i$$

où on a posé $\Gamma_i f_i = (\Gamma_i)_o f_i$, $\Gamma_{i+1} f'_i = (\Gamma_{i+1})_o f'_i$.

Avec ces notations on a, d'après ii du Lemme 1

$$(3) \quad \Gamma_{i+1} f'_i \sim_{\Sigma T} \Gamma_{i+1} f_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n-2.$$

D'après i du Lemme 1, on a aussi

$$(4) \quad \Gamma_0 \sim_{\Sigma T} \Gamma_0 f_0, \quad \Gamma_n \sim_{\Sigma T} \Gamma_n f'_{n-1}.$$

Compte tenu de (4), (2), (3), il vient alors

$$\Gamma_0 \sim_{\Sigma T} \Gamma_0 f_0 \sim_{\Sigma T} \Gamma_1 f'_0 \sim_{\Sigma T} \Gamma_1 f_1 \sim_{\Sigma T} \Gamma_2 \sim_{\Sigma T} \dots$$

$$\dots \sim_{\Sigma T} \Gamma_{n-1} f'_{n-2} \sim_{\Sigma T} \Gamma_{n-1} f_{n-1} \sim_{\Sigma T} \Gamma_n f'_{n-1} \sim_{\Sigma T} \Gamma_n,$$

c'est-à-dire (1).

COROLLAIRE. Pour tout $V \in \mathbb{V}$, le groupe fondamental de (\mathbb{V}, \mathbb{G}) est celui de (V, G_V) .

3. FIBRÉS FEUILLETÉS.

3.1. La construction du groupoïde fondamental d'un groupe de difféomorphismes d'une variété connexe est analogue à la construction rapelée brièvement ci-dessus du groupoïde fondamental d'un feuilletage \mathbb{F} sur une variété connexe V [6, 7]. Soit $\text{Hol}(\mathbb{F})$ le groupoïde d'holonomie de (V, \mathbb{F}) . On désignera par x' l'unité correspondant à $x \in V$ de ce groupoïde de Lie [7] sur V . Pour des ouverts U, U' de V , on posera

$$\text{Hol}_{U,U'}(\mathbb{F}) = \{ \phi \in \text{Hol}(\mathbb{F}) \mid \alpha(\phi) \in U, \beta(\phi) \in U' \}.$$

Sauf confusion, soit S l'ensemble des sous-variétés de V connexes et simplement connexes, transverses à \mathbb{F} .

On appellera *chaîne d'holonomie* de (V, \mathbb{F}) tout système

$$\Gamma = (\Sigma_0, \phi_0, \dots, \phi_{n-1}, \Sigma_n) \text{ avec } \Sigma_i \in \mathcal{S}, \phi_i \in \text{Hol}_{\Sigma_i \Sigma_{i+1}}(\mathbb{F});$$

On dira que Σ_0 et Σ_n sont l'origine et l'extrémité de Γ .

Désignons par $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbb{F})$ l'ensemble, non vide [6], des chaînes d'holonomie d'origine Σ et d'extrémité T . On a sur

$$\text{Hol}(\mathbb{F}) = \bigcup_{\Sigma, T \in \mathcal{S}} \overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbb{F})$$

une loi de composition associative partielle $(\Gamma, \Gamma') \rightarrow \Gamma \cdot \Gamma'$.

Soit $\Gamma \sim \Gamma'$ la relation d'équivalence sur $\overline{\text{Hol}}(\mathbb{F})$ compatible avec sa loi de composition et engendrée par $(\Sigma_0, \phi, \Sigma_2) < (\Sigma_0, \phi_1, \Sigma_1, \phi_2, \Sigma_2)$ définie comme suit:

il existe $\phi'_1, \phi'_2 \in \text{Hol}(\mathbb{F})$ composables avec $\phi'_1 \phi'_2 = \phi$ et où ϕ_1, ϕ'_1 (resp. ϕ_2, ϕ'_2) appartiennent à la même composante connexe du sous-espace $\text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(\mathbb{F})$ (resp. $\text{Hol}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(\mathbb{F})$) de $\text{Hol}(\mathbb{F})$.

Ceci revient encore à dire que $\theta_1(\phi_1), \theta_1(\phi'_1)$ (resp. $\theta_2(\phi_2), \theta_2(\phi'_2)$) appartiennent à la même composante connexe de l'image par l'injection naturelle $\theta_1: \text{Hol}_{\Sigma_0 \Sigma_1}(\mathbb{F}) \rightarrow \Pi(\Sigma_0, \Sigma_1)$ (resp. $\theta_2: \text{Hol}_{\Sigma_1 \Sigma_2}(\mathbb{F}) \rightarrow \Pi(\Sigma_1, \Sigma_2)$), où $\Pi(\Sigma_0, \Sigma_1)$ (resp. $\Pi(\Sigma_1, \Sigma_2)$) est muni de sa topologie naturelle d'espace étalé sur Σ_0 (resp. sur Σ_1) par l'application source.

On désignera par $\overline{\pi}_{\Sigma T}(\mathbb{F})$, où $\Sigma, T \in \mathcal{S}$, le quotient par $\Gamma \sim \Gamma'$ de l'ensemble saturé $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbb{F}) \subset \overline{\text{Hol}}(\mathbb{F})$, et par $[\Gamma]$ l'image de Γ par l'application canonique $\overline{\text{Hol}}_{\Sigma T}(\mathbb{F}) \rightarrow \overline{\pi}_{\Sigma T}(\mathbb{F})$. Par passage au quotient on a sur

$$\pi(\mathbb{F}) = \bigcup_{\Sigma, T \in \mathcal{S}} \overline{\pi}_{\Sigma T}(\mathbb{F})$$

une loi de composition $(A, B) \rightarrow A \cdot B$ induite de celle de $\overline{\text{Hol}}(\mathbb{F})$ et munissant $\overline{\pi}(\mathbb{F})$ d'une structure de groupoïde transitif sur \mathcal{S} .

Soit enfin $\pi_{xy}(\mathbb{F})$, où $x, y \in V$, le quotient de

$$\bigcup_{\Sigma, T \in \mathcal{S}, x \in \Sigma, y \in T} \overline{\pi}_{\Sigma T}(\mathbb{F})$$

par la relation d'équivalence $A \sim B$ définie par

$$A \cdot [(T, y', T')] = [\Sigma, x', \Sigma'] \cdot B, \text{ avec } A \in \overline{\pi}_{\Sigma T}(\mathbb{F}), B \in \overline{\pi}_{\Sigma' T'}(\mathbb{F}).$$

Muni de la loi de composition $(A, B) \rightarrow A \cdot B$ induite de celle de $\overline{\pi}(\mathbb{F})$ par passage au quotient, $\pi(\mathbb{F}) = \bigcup_{x, y \in V} \pi_{xy}(\mathbb{F})$ est un groupoïde transitif sur V , qu'on appelle [7] le *groupoïde fondamental* de \mathbb{F} ; et dont le groupe structural, noté aussi $\pi(\mathbb{F})$, et identique à celui du groupoïde transitif $\overline{\pi}(\mathbb{F})$, sera appelé *groupe fondamental* de \mathbb{F} .

On a sur $\pi(F)$ une structure naturelle de groupoïde de Lie galoisien sur V , et un foncteur plein, dit canonique, $\chi_F: \pi(V) \rightarrow \pi(F)$ (cf. [7]).

3.2. Le groupoïde fondamental $\pi(F)$ admet la description suivante dans le cas où V admet un feuilletage F^* transverse à F .

On désignera par $\overline{\text{Hol}}(F, F^*)$ le sous-ensemble de $\text{Hol}(F)$ formé des chaînes d'holonomie $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$ avec $\sigma_i \in S^*$ où S^* est le sous-ensemble de S formé d'ouverts de feuilles de F^* .

On verrait aisément comme en [6] que l'existence en tout point de V d'un système fondamental de voisinages bitriviaux [5], ou, autrement dit, bidistingués [2], relatifs à F, F^* , entraîne, quels que soient $\Gamma, T \in S^*$, que

$$\overline{\text{Hol}}_{\Gamma T}(F, F^*) = \overline{\text{Hol}}(F, F^*) \cap \overline{\text{Hol}}_{\Gamma T}(F)$$

est non vide et que la restriction à $\overline{\text{Hol}}_{\Gamma T}(F, F^*)$ de l'application canonique $\overline{\text{Hol}}_{\Gamma T}(F) \rightarrow \overline{\pi}_{\Gamma T}(F)$ est surjective.

Dans le cas où les feuilles de F^* sont les fibres d'une surmersion $f: V \rightarrow W$, on écrira $\overline{\text{Hol}}(F, f)$ au lieu de $\overline{\text{Hol}}(F, F^*)$.

3.3. Soit en particulier un fibré feuilleté [2, 5], c'est-à-dire la donnée d'une surmersion de variétés connexes $p: V \rightarrow W$ et d'un feuilletage F tel que p/F soit un revêtement pour toute feuille F de F . On sait que (V, p, W) est alors une fibration, dont les fibres, qu'on supposera connexes, sont transverses à F . Pour $W = \{p^{-1}(x) \mid x \in W\}$, on a un foncteur $\lambda: \pi(W) \rightarrow \text{Diff } W$ défini comme suit [5]:

Pour $\omega \in \pi_{x,y}(W)$, $\lambda(\omega): p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$ est tel que $\lambda(\omega)(z)$ est l'extrémité du relèvement d'origine z relatif à p/F_x d'un chemin γ tel que $[\gamma] = \omega$.

On sait [5] que $\text{Hol}(F)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des germes des difféomorphismes $\rho \in G_F$, où G_F désigne le groupoïde transitif $\lambda(\pi(W))$ des difféomorphismes de W . Pour des ouverts connexes et simplement connexes Σ, T de $W = \Sigma_{x,y} p^{-1}(x)$, on observe que $\overline{\text{Hol}}_{\Gamma T}(W, G_F)$, défini comme en (1.1), n'est autre chose que $\overline{\text{Hol}}_{\Gamma T}(F, p)$. D'où, compte tenu de (3.2) et de la Remarque de (1.1), un isomorphisme canonique

$$(1) \quad \pi(F) \div \pi(W, G_F).$$

Pour $x \in W$ fixé, soit $G_{F,x}$ l'image de l'homomorphisme

$$\lambda: \pi_x(W) \rightarrow \text{Diff } p^{-1}(x).$$

L'inclusion $p^{-1}(x) \subset V$ induit, $p: V \rightarrow W$ étant une fibration, un foncteur fidèle $\pi(p^{-1}(x)) \rightarrow \pi(V)$, relativement auquel on peut énoncer avec les notations de (1.4) et (3.2):

PROPOSITION. Soit (V, p, W) un fibré feuilleté par F et à fibres connexes. Pour tout $x \in W$, il existe un foncteur canonique pleinement fidèle $\pi(p^{-1}(x), G_{F,x}) \rightarrow \pi(F)$ tel que

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \pi(p^{-1}(x)) & \xrightarrow{\chi} & \pi(p^{-1}(x), G_{F,x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi(V) & \xrightarrow{\chi^F} & \pi(F) \end{array}$$

soit commutatif.

En effet, compte tenu de (1) et de la Proposition de (2.2), $\pi(p^{-1}(x), G_{F,x})$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe plein de $\pi(F)$, et la commutativité de (2) résulte alors directement de la définition des flèches horizontales.

Compte tenu des identifications dans (2) de $\pi(p^{-1}(x))$ et de $\pi(p^{-1}(x), G_{F,x})$ avec des sous-groupes de $\pi(V)$ et de $\pi(F)$, on peut enfin énoncer:

COROLLAIRE. Le groupe fondamental $\pi(F)$ du feuilletage F du fibré feuilleté (V, p, W) à fibres connexes n'est autre, quel que soit $x \in W$, que le groupe fondamental $\pi(p^{-1}(x), G_{F,x})$ et, pour $z \in p^{-1}(x)$, l'homomorphisme canonique $\chi: \pi_x(p^{-1}(x)) \rightarrow \pi_x(p^{-1}(x), G_{F,x})$ est la restriction de l'épimorphisme canonique $\chi_F: \pi_x(V) \rightarrow \pi_x(F)$.

3.4. Soit (W^{\wedge}, p, W) un revêtement universel de la variété connexe W , muni d'un point base $x_0^{\wedge} \in W^{\wedge}$, soit Σ une variété connexe et soit $\delta: \pi_{x_0}(W) \rightarrow \text{Diff } \Sigma$ avec $x_0 = p(x_0^{\wedge})$, un homomorphisme. On a une action

$$\rho_{\delta, x_0}: (\omega, (x^{\wedge}, y)) \rightarrow (\mu(\omega)^{-1}x^{\wedge}, \delta(\omega)y)$$

du groupe discret $\pi_{x_0}(W)$ sur la variété $W^{\wedge} \times \Sigma$, où $\mu(\omega)$ désigne l'unique automorphisme de (W^{\wedge}, p, W) tel que $\mu(\omega)x_0^{\wedge}$ soit l'extrémité du relèvement d'origine x_0^{\wedge} d'un chemin γ tel que $[\gamma] = \omega$. On sait [2, 5] que la variété quotient $W^{\wedge} \times_{\delta, x_0} \Sigma$ de $W^{\wedge} \times \Sigma$ par ρ_{δ, x_0} est définie et admet

un et un seul feuilletage F_{δ, x_0} tel que $\theta^{-1}(F_{\delta, x_0})$, où $\theta: W \times \Sigma \rightarrow W \times_{\delta, x_0} \Sigma$ est la surmersion canonique, ait pour feuilles les $W \times(y)$, $y \in \Sigma$. On a un fibré $(W \times_{\delta, x_0} \Sigma, q, W)$, où q est induit de $p \circ pr_1$, feuilleté par F_{δ, x_0} et de fibre type Σ . On dit [2, 5] que F_{δ, x_0} est la suspension de δ à travers le revêtement universel (W^*, p, W) muni de x_0 . Il est naturel de chercher à décrire le groupe fondamental $\pi(F_{\delta, x_0})$ à partir de δ . Or le plongement $\theta_{x_0}: y \rightarrow \theta(x_0, y)$ de Σ dans $W \times_{\delta, x_0} \Sigma$ induit un foncteur fidèle $(\theta_{x_0})_*: \pi(\Sigma) \rightarrow \pi(W \times_{\delta, x_0} \Sigma)$ et on peut énoncer:

PROPOSITION. Soit F la suspension de $\delta: \pi_{x_0}(W) \rightarrow \text{Diff } \Sigma$ à travers le revêtement universel (W^*, p, W) muni de x_0 . Il existe un foncteur pleinement fidèle de $\pi(\Sigma, \text{Im } \delta) \rightarrow \pi(F)$ qui rend

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \pi(\Sigma) & \xrightarrow{\chi} & \pi(\Sigma, \text{Im } \delta) \\ \theta_{x_0} \downarrow & & \downarrow \\ \pi(W \times_{\delta, x_0} \Sigma) & \xrightarrow{\chi^F} & \pi(F) \end{array}$$

commutatif.

En effet, le fibré $(W \times_{\delta, x_0} \Sigma, q, W)$ feuilleté par F induit, d'après (3.3), un foncteur $\lambda: \pi(W) \rightarrow \text{Diff } W$ et on observe [5] que θ_{x_0} induit, pour tout $\omega \in \pi_{x_0}(W)$, un carré commutatif de difféomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\theta_{x_0}} & q^{-1}(x_0) \\ \delta(\omega) \downarrow & & \downarrow \lambda(\omega) \\ \Sigma & \xrightarrow{\theta_{x_0}} & q^{-1}(x_0) \end{array}$$

D'où un isomorphisme $\pi(\Sigma, \text{Im } \delta) \cong \pi(q^{-1}(x_0), G_{F, x_0})$, qui, compte tenu de la Proposition de (3.3), entraîne l'énoncé.

Les identifications dans (1) de $\pi(\Sigma)$ et $\pi(\Sigma, \text{Im } \delta)$ avec des sous-groupoides de $\pi(W \times_{\delta, x_0} \Sigma)$ et $\pi(F)$ permettent enfin d'énoncer:

COROLLAIRE. Le groupe fondamental de la suspension F de $\delta: \pi_{x_0}(W) \rightarrow \text{Diff } \Sigma$ à travers (W^*, p, W) n'est autre que le groupe fondamental $\pi(\Sigma, \text{Im } \delta)$ et, pour $y \in \Sigma$, l'homomorphisme canonique $\chi: \pi_y(\Sigma) \rightarrow \pi_y(\Sigma, \text{Im } \delta)$ est la restriction de l'épimorphisme canonique

$$\chi_F: \pi_y(W \times_{\delta, x_0} \Sigma) \rightarrow \pi_y(F).$$

BIBLIOGRAPHIE.

1. C. EHRESMANN, Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahres. d. Deutschen Math.* 60-2 (1957), 49-77, Reproduit dans "*Charles Ehresmann, Oeuvres complètes et commentées*" II-1, Amiens 1983, 125-153.
2. G. HECTOR & U. HIRSCH, *Introduction to the Geometry of Foliations*, Vieweg, Part A (1981), Part B (1983).
3. J. PRADINES, How to define the differentiable graph of a singular foliation? *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXVI-4 (1985), 339-380.
4. W. van EST, Rapport sur les S-atlas, *Astérisque* 116 (1984).
5. P. VER EECKE, Introduction à la théorie des variétés feuilletées, *Esquisses Math.* 31, Amiens, 1982.
6. P. VER EECKE, Sur le groupe fondamental d'un feuilletage, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXV-4 (1984), 381-428.
7. P. VER EECKE, Sur le classifiant du groupoïde d'holonomie et sur le groupoïde fondamental d'un feuilletage, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 89 (2), (1986), 179-200.

U.F.R. de Mathématiques et Info,
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS Cedex, FRANCE.

ADDENDUM

Un groupe de difféomorphismes G d'une variété connexe V opère sur le groupoïde de Poincaré $\pi(V)$ par l'application $(f, \omega) \rightarrow f_*\omega$ de $G \times \pi(V)$ dans $\pi(V)$. Ceci permet [1'] de définir le groupoïde produit semi-direct $\pi(V) \times^{\sim} G$ sur V , où

$$(\pi(V) \times^{\sim} G)_{xy} = \bigcup_{g \in G} \pi_{xg^{-1}(y)}(V) \times \{g\}$$

et où la loi de composition

$$(\pi(V) \times^{\sim} G)_{xy} \times (\pi(V) \times^{\sim} G)_{yz} \rightarrow (\pi(V) \times^{\sim} G)_{xz}$$

est définie par

$$(\omega, g) \circ (\omega', g') = (\omega(g_*^{-1}\omega'), g' \circ g).$$

Le foncteur canonique $\chi: \pi(V) \rightarrow \pi(V, G)$ est la restriction d'un foncteur plein canonique $\chi^-: \pi(V) \times^{\sim} G \rightarrow \pi(V, G)$ compte tenu de l'identification évidente $\omega \rightarrow (\omega, V)$ de $\pi(V)$ avec un sous-groupoïde distingué de $\pi(V) \times^{\sim} G$.

Si tout $g \in G$ est génériquement libre, c'est-à-dire que $j_*(g) = j_*(1_V)$ entraîne $g = 1_V$, alors χ^- est un isomorphisme et $\pi(V)$ s'identifie à un sous-groupoïde distingué de $\pi(V, G)$. Ceci a été remarqué par van Est [2'] dans le cas particulier où V est simplement connexe.

[Plus généralement d'ailleurs on peut raisonnablement conjecturer que le noyau de χ^- est caractérisé comme suit: pour que $\chi^-(\gamma) = \chi^-(\gamma')$, il faut et il suffit qu'il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \pi(V) \times^{\sim} G$ et $\delta_0, \dots, \delta_n \in G^{\sim}$ tels que

$$\gamma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_n, \quad \gamma' = \delta_0 \circ \gamma_1 \circ \delta_1 \circ \dots \circ \delta_{n-1} \circ \gamma_n \circ \delta_n,$$

où compte tenu de $V \subset \pi(V)$, G^{\sim} est l'ensemble des $(x, g) \in V \times G$ tels que $j_*(g) = j_*(1_V)$.]

Le Corollaire de (3.4) admet alors le complément suivant:

Si chaque $\delta(\omega)$, $\omega \in \pi_{x_0}(W)$, est génériquement libre, alors le groupe de Poincaré $\pi(\Sigma)$ est un sous-groupe distingué de $\pi(F)$.

Les démonstrations détaillées de ces résultats complémentaires seront publiées ultérieurement.

Bibliographie complémentaire.

- 1', P. HIGGINS & J. TAYLOR, The fundamental groupoid and the homotopy crossed complex of an orbit space, *Lecture Notes in Math.* 962, Springer (1982).
- 2', W. van EST, Fundamental groups of manifold schemes, *Topological Structures II*, Part I, Math. Centre Tracts, Amsterdam 1979.