EDMOND BONAN

Sur les sélections injectives du type fini

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 27, nº 2 (1986), p. 147-150

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1986__27_2_147_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

Vol. XXVII-2 (1986)

SUR LES SÉLECTIONS INJECTIVES DU TYPE FINI

par Edmond BONAN

A la mémoire de Charles Ehresmann

ABSTRACT. The Wedding Lemma is extended to infinite sets.

Extension du Lemme des Mariages [1] aux ensembles infinis.

Proposition.

Soit E *et* F *deux ensembles,* G *une partie de* F, *et* Φ *une application de* E *dans l'ensemble des parties finies de* F *telle que:*

(i) pour toute partie A *de* E,

$$\mathrm{Card}(\Phi(A)) \geqq \mathrm{Card}(A), \text{ où } \quad \Phi(A) = \cup\,(\Phi(x), \quad x \in A)\,;$$

(ii) pour toute partie finie B *de* G ,

$$\mathrm{Card}(B) \leqq \mathrm{Card}(\Phi^{-1}(B)) < +\infty \quad \text{où} \quad \Phi^{-1}(B) = \{x, \ \Phi(x) \cap B = \emptyset\}\,.$$

Il existe alors une sélection injective f, *subordonnée à* Φ *telle que* $f(E)$ *contienne* G.

Preuve.

1° Soit Λ l'ensemble ordonné par l'inclusion des parties X de E munies d'une sélection injective $f_X : X \to F$, subordonnée à Φ, où de plus $f_X(X)$ contient G. Soit $\boldsymbol{T}$ une partie totalement ordonnée de Λ : posons $Z = \cup\,(X, \ X \in \boldsymbol{T})$. Pour chaque $X \in \boldsymbol{T}$, soit $\tilde{f}_X$ un prolongement arbitraire de f_X à Z tout entier, subordonné à Φ. Le filet $(\tilde{f}_X, X \in \boldsymbol{T}, \supset)$ prenant ses valeurs dans l'espace produit topologique, compact par le théorème de Tychonoff, de la collection $(\Phi(z), z \in Z)$, admet une valeur d'adhérence, disons $f_Z : Z \to F$, subordonnée à Φ. Montrons que f_Z est injective: pour deux éléments distincts y et y' de Z, il existe une partie $Y \in \boldsymbol{T}$ les contenant, et il existe de plus une partie X contenant Y, $X \in \boldsymbol{T}$, telle que

$$f_Z(y) = \tilde{f}_X(y) = f_X(y) \qquad (\textit{resp. } y').$$

Mais puisque f_X est injective,

$$f_Z(y) = f_Z(y').$$

Montrons maintenant que f (Z) contient G : pour un élément γ de G, il existe une partie $Y \in \mathcal{T}$ contenant l'ensemble fini non vide

$$Z \cap \Phi^{-1}(Y) = J$$

et il existe de plus une partie X contenant Y, $X \in \mathcal{T}$ telle que

$$f_Z(J) = \tilde{f}_X(J) = f_X(J).$$

Ce dernier contenant γ, puisque $f_X(X)$ contient G. Nous venons de trouver le majorant Z de $\mathcal{T}$ dans Λ qui est donc inductif.

2° Pour une sélection injective $f : X \to F$ subordonnée à Φ et un élément z de E, n'appartenant pas à X, nous allons établir l'existence d'une sélection injective $g : X \cup \{z\} \to F$, subordonnée à Φ. Nous poserons

$$(f^{-1}\Phi)^{-1}(z) = \emptyset, \qquad (f^{-1}\Phi)^{0}(z) = \{z\},$$

$$(f^{-1}\Phi)^{\infty}(z) = \cup((f^{-1}\Phi)^{\ell}(z),\ \ell \geqq 1).$$

Pour l'entier ℓ, tant que $\Phi(f^{-1}\Phi)^{\ell}(z)$ est contenu dans $f(X)$, nous pouvons définir $(f^{-1}\Phi)^{\ell+1}(z)$: désignons, le cas échéant, par h le plus petit entier pour lequel $\Phi(f^{-1}\Phi)^{h}(z)$ n'est pas contenu dans $f(X)$. Nous prendrons h infini sinon. La suite

$$((f^{-1}\Phi)^{\ell}(z),\quad 1 \leqq \ell \leqq h)$$

est strictement croissante: en effet, pour $1 \leqq \ell < h$,

$$\mathrm{Card}((f^{-1}\Phi)^{\ell+1}(z)) = \mathrm{Card}(\Phi(f^{-1}\Phi)^{\ell}(z)).$$

Mais $\Phi(f^{-1}\Phi)^{\ell}(z)$ contient $\Phi(z)$ avec $z \notin (f^{-1}\Phi)^{\ell}(z)$ donc la propriété (i) se traduit ici par

$$\mathrm{Card}(\Phi(f^{-1}\Phi)^{\ell}(z)) = \mathrm{Card}(\Phi((f^{-1}\Phi)^{\ell}(z) \cup \{z\})) \geqq \mathrm{Card}((f^{-1}\Phi)^{\ell}(z)) + 1.$$

Ainsi

$$\mathrm{Card}((f^{-1}\Phi)^{\ell+1}(z)) > \mathrm{Card}((f^{-1}\Phi)^{\ell}(z)).$$

a) Supposons h fini: il existe d'abord un élément α appartenant à $\Phi(f^{-1}\Phi)^{h}(z)$ mais pas à $\Phi(f^{-1}\Phi)^{h-1}(z)$: nous pouvons définir successivement, en commençant par

$$x_h \in (f^{-1}\Phi)^{h}(z) \setminus (f^{-1}\Phi)^{h-1}(z), \qquad \alpha \in \Phi(x_h),$$

puis si $h > 0$, continuer, pour tout entier i, $0 \leqq i < h$, par

$$x_i \in (f^{-1}\Phi)^i(z)\setminus(f^{-1}\Phi)^{i-1}(z), \qquad f(x_{i+1}) \in \Phi(x_i),$$

en terminant de toute façon par $x_0 = z$.

La nouvelle fonction $g: X \cup \{z\} \to F$, définie par

$$g(z) = \alpha \text{ et si } h > 0, \text{ pour tout entier } i, 0 \leqq i < h \text{ par } g(x_i) = f(x_{i+1}),$$

coïncidant en outre avec f sur

$$X \setminus \cup(x_i, 0 < i \leqq h)$$

est une sélection injective subordonnée à Φ. Si $f(X)$ contient G, il en est de même pour $g(X \cup \{z\})$.

b) Supposons maintenant h infini: il existe pour chaque entier n une construction notée Θ_n du type précédent, soit pour tout entier i tel que $0 \leqq i \leqq n$,

$$\Theta_n(i) \in (f^{-1}\Phi)^i(z)\setminus(f^{-1}\Phi)^{i-1}(z)$$

et si $0 \leqq i < n$,

$$f(\Theta_n(i+1)) \in \Phi(\Theta_n(i)).$$

Prolongeons Θ_n à l'espace $\mathbb{N}$ tout entier par $\tilde{\Theta}_n$ en prenant cependant pour tout entier j, $j > n$, $\tilde{\Theta}_n(j)$ dans

$$(f^{-1}\Phi)^j(z)\setminus(f^{-1}\Phi)^{j-1}(z).$$

La suite $(\tilde{\Theta}_n, n \geqq 1)$ prend ses valeurs dans l'espace produit topologique compact de la collection

$$((f^{-1}\Phi)^\ell(z)\setminus(f^{-1}\Phi)^{\ell-1}(z), \ \ell \geqq 0),$$

elle admet donc une valeur d'adhérence, disons Θ: pour tout entier i, il existe un entier $n \geqq i+1$ tel que

$$\Theta(i) = \tilde{\Theta}_n(i) = \Theta_n(i) \qquad (\text{resp. } (i+1)),$$

donc

$$f(\Theta(i+1)) \in \Phi(\Theta(i))$$

avec toujours $\Theta(0) = z$. La nouvelle fonction

$$g: X \cup \{z\} \to F \qquad \text{définie par} \qquad g(\Theta(i)) = f(\Theta(i+1))$$

pour tout $i \geqq 0$, coïncidant avec f sur $X \setminus \cup(\Theta(i), i > 0)$, est une sélection injective subordonnée à Φ. Si $f(X)$ contient G, $g(X \cup \{z\})$ aussi.

3° a) Prenons d'abord $G = \emptyset$: il existe par le Lemme de Zorn une sélection injective $f : E \to F$ subordonnée à Φ, car l'élément maximal de Λ est sûrement E.

b) Lorsque G n'est pas vide, l'application Φ^{-1} de G dans l'ensemble des parties finies de E vérifie les conditions qui permettent, grâce à 3-a, d'exhiber une sélection injective $e : G \to E$ subordonnée à Φ^{-1}, et par suite $e^{-1} : e(G) \to F$ est déjà une sélection injective subordonnée à Φ telle que $e^{-1}(e(G)) = G$. Maintenant par le Lemme de Zorn, e(G) est contenu dans un élément maximal de Λ, qui est sûrement E : il existe donc une sélection injective $f : E \to F$ subordonnée à Φ, et en outre $f(E)$ contient G.

1. N. BOURBAKI, Théorie des Ensembles, Chap. III (§3, Exerc. 6). Hermann, Paris.
2. J.L. KELLEY, General Topology, Van Nostrand-Reinhold.

U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80000 AMIENS. FRANCE