CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

LUC VAN DEN BRIL

Construction de théories d'exactitude

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 27, nº 1 (1986), p. 35-48

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1986__27_1_35_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

Vol. XXVII-1 (1986)

CONSTRUCTION DE THÉORIES D'EXACTITUDE

par Luc VAN DEN BRIL

ABSTRACT. This paper provides a formal theory of "exactness" on the base of "commutativity". For every set relation $R \subset U \times V$ we describe the "exact part" R^e of R. In fact, $R^e = (R^d)^{-1} \cap R$, where R^d is the "deductive counterpart" of R, defined by a universal property. Examples linked to lattices, topologies, essential morphisms, exact nets are given. A typical example is $E = Z^e$, where $\underline{A}$ is an abelian category, U and V are the sets of objects of the comma categories $X \downarrow \underline{A}$ and $\underline{A} \downarrow Y$, Z the set of pairs (f, g) of $U \times V$ with $fg = 0$ and E consists of those pairs which are exact.

Dans une catégorie abélienne, une suite

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est exacte si elle vérifie les deux relations :

(R) $\qquad gf = 0,$

(R^d) Pour toute suite $X \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} Y$ on a

$$(vf = 0 \text{ et } gu = 0 \Rightarrow vu = 0).$$

Cette condition (R^d) permet donc d'effectuer des déductions ou des calculs dans le cadre de la théorie des suites vérifiant (R) (en l'occurence les suites nulles).

Dans ce contexte, on remarque que :

(i) l'idée de suite nulle conduit canoniquement à l'idée de suite exacte,

(ii) une suite exacte admet la dichotomie :

suite nulle + suite déductive (i.e. vérifiant R^d).

Dans ce travail, on montre que cette situation est tout à fait générale en ce sens que *toute relation ensembliste* $R : A \longrightarrow B$ *est dotée d'un système déductif* $R^d : B \to A$ *et contient une partie exacte* R^e.

Lorsque $R = R^e$, on retrouve les relations difonctionnelles de Riguet.

On indique ci-dessous de façon schématique quelques exemples.

R	R^e
suites nulles	suites exactes
carrés commutatifs	carrés exacts de Hilton
"chemins commutatifs"	réseaux exacts de Guitart
$a \leqq b$ ($\leqq$ est un ordre)	$a = b$
m majore A	$m = sup$ A

Dans le cadre de cette théorie abstraite, on retrouve et on complète la plupart des propriétés des suites et carrés exacts.

Un résultat essentiel est le *principe de dualité* (Théorème 5) qui, dans le cas d'une catégorie abélienne, échange les carrés commutatifs (ϵ R) avec une classe de carrés déductifs (ϵ R^d) en laissant les carrés exacts inchangés.

On précise aussi la *signification de l'homologie au moyen des carrés homologiques* (Définition 7) *qui établissent un transfert d'exactitude* d'une relation R à une relation S. Ainsi, l'exactitude de

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

dans le contexte R des suites nulles équivaut à l'exactitude du couple (Im f, Ker g) dans le contexte S de la relation d'inclusion entre sous-objets de B. On obtient une *égalité Im f = Ker g car l'égalité est la partie exacte de la relation d'inclusion.* La caractérisation des suites exactes de relations dans une catégorie abélienne (Proposition 13) montre bien que l'homologie est un transfert d'exactitude. En effet, au niveau des sous-objets, on aboutit à une condition d'exactitude qui ne s'exprime plus au moyen d'une égalité.

Signalons aussi que les concepts introduits ici interviennent dans les théories déductives de Guitart et de Lambek-Scott (Remarque 11). Mais avec le système déductif R^d, l'accent est mis sur l'aspect opératoire ou loi de composition ternaire partiellement définie sur R :

$$R \times R^d \times R \longrightarrow R$$

Dans l'exemple de départ, c'est donc la structure multiplicative que possèdent les suites nulles.

Ce point de vue sera développé ultérieurement dans le contexte des distributeurs au moyen d'une théorie dont le présent travail est la version relationnelle.

1. INTRODUCTION.

Soit les relations ensemblistes

$$X \xleftarrow{S} A \xrightarrow{R} B \xleftarrow{T} Y.$$

Il existe alors une unique relation $H : X \to Y$ vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour toute relation $V : X \to Y$,

$$TVS \subset R \Longleftrightarrow V \subset H.$$

On exprimera cette situation en disant que le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S"] \arrow[d, "R"'] & X \arrow[d, "H"] \\ B \arrow[r, "T"] & Y \end{tikzcd}$$

est *fermé*.

L'existence de H traduit le fait que la 2-catégorie des relations ensemblistes est fermée. Explicitement, H est formé des couples (x, y) tels que $S^{-1}x \times Ty \subset R$, c'est-à-dire $(x, y) \in H$ ssi

$$(a, x) \in S \text{ et } (x, y) \in A \text{ et } (y, b) \in T \Longrightarrow (a, b) \in R.$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

(i) Soit

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot & \cdot \arrow[l] & \cdot \arrow[l] \end{tikzcd}$$

si le carré de gauche est fermé, alors le carré composé est fermé ssi le carré de droite est fermé.

(ii)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S"] \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, phantom, "\text{fermé}"] & X \arrow[d, "H"] \\ B & Y \arrow[l, "T"] \end{tikzcd} \quad \text{ssi} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "R^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{fermé}"] & Y \arrow[d, "H^{-1}"] \\ A & X \arrow[l, "S^{-1}"] \end{tikzcd}$$

2. DÉFINITIONS.

A toute relation $R : A \to B$ on peut associer les relations

$$B \xrightarrow{R_1} B \xrightarrow{R^d} A \xrightarrow{R_0} A$$

telles que les carrés ci-dessous soient fermés

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[d, "R"'] & B \arrow[d, "R^d"] \\ B \arrow[ur, phantom, "\nwarrow"] & A \arrow[l, "R"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "R"'] & A \arrow[d, "R_0"] \\ B \arrow[ur, phantom, "\nwarrow"] & A \arrow[l, "R"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[d, "R"'] & B \arrow[d, "R_1"] \\ B \arrow[ur, phantom, "\nwarrow"] \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

On dira que R^d est *la relation déductive associée à* R . *Donc* *$(b, a) \in R^d$ ssi*

$$(x, b) \in R \quad \textit{et} \quad (a, y) \in R \quad \Longrightarrow \quad (x, y) \in R$$

On pose

$$R^{\partial} = (R^d)^{-1} = (R^{-1})^d.$$

On dira que *(a, b) est R-exact si (a, b)* $\in R \wedge R^{\partial}$ et on pose

$$R^e = R \wedge R^{\partial} : A \longrightarrow B.$$

On remarque que R_0 est le préordre $\leqq$ sur A tel que :

$$a \leqq a' \quad \text{ou} \quad (a, a') \in R_0 \quad \Longleftrightarrow \quad Ra' \subset Ra$$

et R_1 est le préordre $\leqq$ sur B tel que

$$b \leqq b' \text{ ou } \quad (b, b') \in R_1 \quad \Longleftrightarrow \quad R^{-1}b \subset R^{-1}b' .$$

Ces définitions sont inspirées par la

3. PROPOSITION (EXEMPLE TYPIQUE).

Soit X et Y deux objets d'une catégorie abélienne, **A** (**B**) l'ensemble des spans (cospans) d'extrémités X et Y et COMM la relation de **A** vers **B** définie par l'ensemble des carrés commutatifs.

Les conditions ci-dessous sont alors équivalentes :

1. Le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"] & B \end{tikzcd}$$

appartient à $COMM^d$. Autrement dit, c'est un carré *non nécessairement commutatif* tel que

$$um = vn \text{ et } fs = gt \Longrightarrow fm = gn$$

où

$$X \xleftarrow{m} C \xrightarrow{n} Y \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{f} D \xleftarrow{g} Y.$$

2.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_o"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d, "e_1"] \\ X \arrow[r, "e_o"] & Q \end{tikzcd}$$

où

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_o"'] \arrow[dr, phantom, "\text{CARTÉS.}"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"] & B \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\text{COCARTÉS.}"] & Y \arrow[d, "e_1"] \\ X \arrow[r, "e_o"] & Q \end{tikzcd}$$

3. Il existe un carré exact au sens de Hilton

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\binom{s}{t}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{EXACT}"] & Z \arrow[d, "i"] \\ X \oplus Y \arrow[r, "(u, -v)"] & B \end{tikzcd}$$

On peut exiger que p soit un épimorphisme et i un monomorphisme.

Ces carrés que l'on appellera *déductifs sont stables par composition verticale et horizontale.*

Un carré est donc exact au sens de Hilton ssi il est commutatif et déductif.

4. REMARQUES.

- $R \subset A \times A$ est transitive ssi $R \subset R^d$;
- $R \subset A \times A$ est un préordre ssi $R = R^d$ et R^e est alors l'équivalence associée au préordre ;
- $R \subset A \times B$ est un rectangle $A' \times B'$ ssi $R^d = B \times A$. En particulier

$$\emptyset^d = B \times A \quad \text{et} \quad \emptyset^{dd} = A \times B \;;$$

- $R \subset A \times B$ est une relation difonctionnelle (Riguet) ssi $R = R^e$, c'est-à-dire ssi

$$R^{-1} \subset R^d \quad \text{ou} \quad R \subset R^\partial .$$

5. THÉORÈME.

Pour toute relation $R: A \to B$,

$$R \subset R^{dd}\ ,\quad (R^e)^{-1} = (R^{-1})^e \subset (R^e)^d \wedge (R^d)^e \quad \text{et} \quad R^{ee} = R^e\ .$$

$R \subset R^{dd}$ est un principe de dualité qui, dans le cas d'une catégorie abélienne, signifie que

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{t} & Y & & C & \xrightarrow{n} & Y & & A & \xrightarrow{t} & Y \\ s\downarrow & \text{commutatif} & \downarrow v & \text{et} & m\downarrow & \text{déductif} & \downarrow v & \text{et} & s\downarrow & \text{déductif} & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{u} & B & & X & \xrightarrow{u} & B & & X & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

entraînent

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{n} & Y \\ m\downarrow & \text{déductif} & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

Dans cet exemple, on a de plus $R = R^{dd}$ (voir Théorème 10), de sorte que les carrés déductifs caractérisent les carrés commutatifs comme ces derniers caractérisent les carrés déductifs.

6. THÉORÈME.

Pour toute relation $R: A \to B$, on a

1. $$R_0 R^d = R^d R_1 = R^d\ .$$

2. $$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{R} & B \\ R_0\downarrow & & \downarrow R^d \\ A & = & A \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} B & = & B \\ R_1\downarrow & & \downarrow R^d \\ B & \xleftarrow{R} & A \end{array}$$

sont des carrés fermés, c'est-à-dire

$$(b, a) \in R^d \quad \text{ssi} \quad b \leq Ra \quad \text{ssi} \quad R^{-1}b \leq a\ .$$

3. Si $(a, b) \in R^e$, alors

$$(a', b) \in R^e \quad \text{ssi} \quad a \leq a' \text{ et } a' \leq a\ .$$

4. Si $S: A \to A$ est compatible avec R, c'est-à-dire $RS \subset R$, alors

$$SR^d \subset R^d\ .$$

7. DÉFINITION.

On dira que le carré de relations

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "E"] \arrow[d, "R"'] & X \arrow[d, "S"] \\ B \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

est un *carré homologique* si

1. $F^{-1}SE \subset R$ et $FRE^{-1} \subset S$,
2. $E^{-1}S^{d}F \subset R^{d}$ et $ER^{d}F^{-1} \subset S^{d}$.

Ceci entraîne

$$F^{-1}S^{e}E \subset R^{e} \quad \text{et} \quad FR^{e}E^{-1} \subset S^{e}.$$

Ces carrés se composent horizontalement.
Si le carré précédent est homologique, si

$$\mathrm{dom}\, E = A \quad \text{et} \quad \mathrm{Dom}\, F = B,$$

alors

$$R^{d} = E^{-1}S^{d}F \quad \text{et} \quad R^{e} = F^{-1}S^{e}E.$$

8. PROPOSITION.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "E"] \arrow[d, "R"'] & X \arrow[d, "S"] \\ B \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

est un carré homologique si (en utilisant les notations de 2) :

1. $F^{-1}SE \subset R_0$ et $FRE^{-1} \subset S$,
2. $SER = S_1FR$ et $R_1F^{-1}S = RE^{-1}S_0$.

Ces conditions sont en particulier réalisées si

$$R = F^{-1}SE \quad \text{et} \quad S = SEE^{-1} = FF^{-1}S.$$

9. REMARQUE.

Toute relation R détermine un carré homologique

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "R"'] & \bar{A} \arrow[d, "\bar{R}"] \\ B \arrow[r, two heads, "q"] & \bar{B} \end{tikzcd}$$

où

$\bar{A}$ est l'ensemble A quotienté par l'équivalence :

$$a \sim a' \quad \text{ssi} \quad a \leqq a' \quad \text{et} \quad a' \leqq a \text{ , i.e., } Ra = Ra',$$

et $\bar{B}$ est B quotienté par l'équivalence $R^{-1}b = R^{-1}b'$.

Dans le cas d'une catégorie abélienne, ceci donne

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SPAN}(X, Y) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{COMM}"'] & \mathrm{REL}(X, Y) \arrow[d, "\leqq"] \\ \mathrm{COSPAN}(X, Y) \arrow[r, two heads] & \mathrm{REL}(X, Y) \end{tikzcd}$$

et on retrouve que $us = vt$ est exact si : $st^{-1} = u^{-1}v$.

L'existence dans une catégorie abélienne de carrés cartésiens et cocartésiens conduit à :

10. DÉFINITIONS ET THÉORÈME.

Soit deux relations R, S : $A \nrightarrow B$. On dira que S est R-*exacte* si $S \subset R^e$. Ceci étend la notion de couple R-exact.

On dira $R : A \nrightarrow B$ est *bicomplète* s'il existe deux applications

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{et} \quad B \xrightarrow{g} A$$

telles que f soit R-exacte et que g soit R^{-1}-exacte, c'est-à-dire

$$(a, fa) \in R^e \quad \text{et} \quad (gb, b) \in R^e \quad \text{pour tout } a \in A \text{ et } b \in B.$$

Dans ce cas :

$$(a, b) \in R \quad \text{ssi} \quad (fa, gb) \in R^d,$$
$$(b, a) \in R^d \quad \text{ssi} \quad (gb, fa) \in R,$$
$$(a, b) \in R^e \quad \text{ssi} \quad (gb, fa) \in R^e,$$
$$R^{dd} = R.$$

11. REMARQUES.

- Un ensemble déductif (Lambek-Scott) est un ensemble E muni d'une relation de déduction

$$\vdash \ \subset (P_{fin}E \times E)$$

vérifiant les axiomes suivants, où l'on a posé, pour $A \in P_{fin}E$,

$$X \vdash_A x \qquad \text{ssi} \qquad A \cup X \vdash x$$

1. $A \subset B$ entraîne $\vdash_A \ \subset \ \vdash_B$.
2. L'application

$$E \longrightarrow P_{fin}E\ , \quad x \longmapsto \{x\}$$

est $\vdash_A$ exacte pour tout A.
3. $\{x\} \vdash y$ et $\{y\} \vdash x$ entraînent $x = y$.

- Dans (R. Guitart [2]), une classe E de carrés dits exacts expriment l'équivalence logique $\longleftrightarrow$ dans un contexte relationnel et, à partir de cette notion première, on construit les implications logiques $\longrightarrow$ au moyen de carrés dits déductifs.

A cet effet, on introduit une relation de comparaison K entre les spans et on étend la relation E (définie a priori entre spans et cospans) en une équivalence sur l'ensemble des chemins. Ceci conduit au carré

$$\begin{array}{ccc} \text{SPANS} & \xrightarrow{\ S\ } & \text{SPANS} \\ {\scriptstyle E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K} \\ \text{COSPANS} & \xrightarrow{\ T\ } & \text{SPANS} \end{array}$$

où S et T sont les restrictions de l'équivalence précédente. La classe R des carrés déductifs est alors définie par $R = T^{-1}K\ S$.

En choisissant des relations K adaptées, on obtient des décompositions de E qui s'inscrivent dans le contexte des relations déductives. Par exemple, si $E = T^{-1}\ K^e\ S$ (un carré est dans E ssi ses composantes spans et cospans sont équivalentes à un couple de spans K-exact) et si l'équivalence est compatible avec K

$$(KSS^{-1} \subset K \quad \text{et} \quad TT^{-1}K \subset K),$$

alors

$$E = (T^{-1}KS) \cap (T^1\ K^\partial\ S).$$

Si, de plus, tout span est équivalent à un cospan et réciproquement, alors

$$E = R^e = R \wedge R^\partial\ .$$

12. EXEMPLES.

Si $R \subset (A\times B)\times C$ est considéré comme une relation $A\times B \to C$ (le parenthésage indique la partition des variables figurant dans R), alors $(a, b, c) \in R^\partial$ ssi

$$(a', b', c) \in R \quad \text{et} \quad (a, b, c') \in R \Longrightarrow (a', b', c') \in R.$$

Dans les exemples ci-dessous, $(E, \leqq)$ sera un ensemble ordonné et Maj X (Min X) désignera l'ensemble des majorants (minorants) de la partie X de E.

- Soit $R \subset (E\times E)\times E$ tel que

$$(a, b, c) \in R \quad \text{si} \quad a \leqq c \text{ et } b \leqq c.$$

Alors

$$(a, b, c) \in R^{\partial} \quad \text{ssi} \quad \text{Maj}\{a, b\} \subset \text{Maj } c$$

et

$$(a, b, c) \in R^{e} \quad \text{ssi} \quad \text{Maj}\{a, b\} = \text{Maj } c$$

c'est-à-dire

$$c = a \vee b$$

(définition du supremum au moyen de l'exactitude).

- Soit $R \subset (E\times E)\times E$ tel que

$$(a, b, c) \in R \quad \text{si} \quad x \leqq a \text{ et } x \leqq c \Rightarrow x \leqq b.$$

Alors

$$(a, b, c) \in R^{\partial} \quad \text{ssi} \quad \text{Min } a \wedge \text{Min } z \subset \text{Min } b \Rightarrow z \leqq c$$

et

$$(a, b, c) \in R^{e} \quad \text{ssi} \quad \text{Min } a \wedge \text{Min } z \subset \text{Min } b \Leftrightarrow z \leqq c$$

c'est-à-dire

$$c = a \rightarrow b$$

(définition de l'exponentielle au moyen de l'exactitude).

- Supposons de plus que E soit un treillis avec les opérations $\wedge, \vee, 0, 1$ et soit $R \subset (E\times E)\times(E\times E)$ tel que

$$(a, b, c, d) \in R \quad \text{si} \quad a \wedge c \leqq b \vee d.$$

Alors

$$(a, b, c, d) \in R^{\partial} \quad \text{ssi} \quad a \wedge x \leqq b \vee y \text{ et } c \wedge x \leqq d \vee y \Rightarrow x \leqq y$$

et

$$(a, b, c, d) \in R^{\partial} \quad \text{entraîne}$$

$$a \vee c = 1, \quad b \wedge d = 0, \quad b \leqq c \text{ et } d \leqq a,$$

La réciproque n'est pas vraie car les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) E est un treillis distributif,

(2) $(a, 0, 1, a) \in R^{\partial}$ pour tout a,

(3) $(a, b, c, d) \in R^{\partial}$ ssi

$$a \vee c = 1, \quad b \wedge d = 0, \quad b \leqq c \text{ et } d \leqq a.$$

- E étant toujours un treillis, on considère $A \subset E\times E$ et $R : A \rightarrow A$

tels que

$$(a, b) \in A \quad \text{si} \quad b \leqq a \qquad \text{et} \qquad (a, b, c, d) \in R \quad \text{si} \quad a \wedge c \leqq b \vee d.$$

Alors $(a, b, c, d) \in R^{\partial}$ si

$$(a \wedge x \leqq b \vee y \text{ et } y \leqq x) \text{ et } (c \wedge z \leqq d \vee t \text{ et } t \leqq z) \Rightarrow x \wedge z \leqq y \vee t.$$

Ceci entraîne que

$$a \vee c = 1, \qquad b \vee d \leqq a \wedge c \quad \text{et} \quad b \wedge d = 0.$$

Si le treillis est distributif, ces conditions sont aussi suffisantes.
Cet exemple intervient dans le contexte suivant.

13. PROPOSITION.

On rappelle que dans une catégorie abélienne, une relation α est *dégénérée* si elle se factorise à travers l'objet nul, ce qui équivaut à $\operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{dom} \alpha$. On dira que la suite de relations

$$X \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} Y$$

est dégénérée si $\beta\alpha$ est dégénérée (ce qui équivaut à $\alpha^{-1}\beta^{-1}$ est dégénérée).
Cette suite est alors exacte, c'est-à-dire pour tout

$$Z \xrightarrow{\varepsilon} C \xrightarrow{\eta} T$$

$\eta\alpha$ et $\beta\varepsilon$ dégénérées entraîne $\eta\varepsilon$ dégénérée ssi

$$(\operatorname{dom} \alpha^{-1}, \operatorname{Ker} \alpha^{-1}, \operatorname{dom} \beta, \ker \beta)$$

est exact au sens précédent dans le treillis des sous-objets de C, condition beaucoup plus forte que l'égalité

$$\operatorname{dom} \alpha^{-1} \wedge \operatorname{dom} \beta = \operatorname{Ker} \alpha^{-1} + \operatorname{Ker} \beta .$$

En particulier, la suite de morphismes

$$X \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} Y$$

est exacte dans la catégorie des relations ssi $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f = K$ et K est un sous-objet "distributif" de C, c'est-à-dire pour tout $M \leqq C$ et $N \leqq C$,

$$(K \vee M) \wedge N \leqq (K \wedge N) \vee M,$$

ce qui équivaut, en raison de la modularité, à

$$(K \vee M) \wedge N = (K \wedge N) \vee (M \wedge N).$$

14. REMARQUE.

La notion de monomorphisme (épimorphisme) essentiel et plus généralement de suite essentielle est décrite par le carré fermé où C est un objet d'une catégorie abélienne :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l}\text{morphismes}\\ \text{de but } C\end{array}} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "D"'] & \boxed{\begin{array}{l}\text{relations}\\ \text{de source } C\end{array}} \arrow[d, "\text{suites essentielles}"] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{morphismes}\\ \text{de source } C\end{array}} & \boxed{\begin{array}{l}\text{relations}\\ \text{de but } C\end{array}} \arrow[l, "D"]
\end{tikzcd}$$

où D indique les restrictions de la relation de dégénérescence. Ceci signifie donc que

$$X \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} Y$$

est une suite essentielle ssi

$$\beta f \quad \text{et} \quad g\alpha \quad \text{dégénérées} \quad \Rightarrow \quad gf = 0$$

pour tcut couple de morphismes

$$Z \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} T.$$

En particulier,

$$X \xrightarrow{v^{-1}} C \xrightarrow{u^{-1}} Y$$

où u et v sont des morphismes est *essentielle* , ssi (Im u, Ker v) est dans la relation H définie par le carré fermé :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}\ C \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\leqq"'] & \mathrm{Sub}\ C \arrow[d, "H"] \\
\mathrm{Sub}\ C & \mathrm{Sub}\ C \arrow[l, "T"]
\end{tikzcd}$$

avec

$$(M, N) \in S \quad \text{ssi} \quad M \wedge N = 0,$$
$$(M, N) \in T \quad \text{ssi} \quad M + N = 1 = C.$$

Ceci signifie donc que :

$$\mathrm{Im}\ u \wedge M = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\ v + N = C \quad \Rightarrow \quad M \leqq N.$$

Si $u = 0$, on obtient la condition de Nakayama

$$\mathrm{Ker}\ v + N = C \Rightarrow N = C$$

caractérisant les épimorphismes essentiels v.

On vérifie que C est un module semi-simple ssi

$$(M, N) \in H \Rightarrow M \geqq N \ ;$$

et que si Sub C est un treillis distributif, alors

$$M \geqq N \Rightarrow (M, N) \in H.$$

15. DERNIERS EXEMPLES.

Soit O l'ensemble des ouverts d'un espace topologique E et soit $R \subset O \times PE$ la relation d'inclusion, c'est-à-dire

$$(U, A) \in R \quad \text{ssi} \quad U \subset A.$$

Alors

$$(A, U) \in R^d \quad \text{ssi} \quad A^o \subset U$$

où A^o est l'intérieur de A et

$$(U, A) \in R^e \quad \text{ssi} \quad U = A^o.$$

- Soit α et β deux chemins dans une catégorie abélienne reliant les objets X et Y. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. En complétant les cospans $\rightarrow \cdot \leftarrow$ de α et les spans $\leftarrow \cdot \rightarrow$ de β par des carrés commutatifs, on obtient un carré commutatif. Par exemple :

Si

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \cdot & \cdot \arrow[d] \\
\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot & \cdot \arrow[ur, "\beta"] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & {} \\
X \arrow[rr] & & \cdot \arrow[r, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

alors

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim \alpha \arrow[r, "\mathrm{proj}"] \arrow[d, "\mathrm{proj}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d, "\mathrm{inj}"] \\
X \arrow[r, "\mathrm{inj}"'] & \varinjlim \beta
\end{tikzcd}$$

Ceci définit une relation R sur les chemins reliant X et Y et un carré homologique

$$\begin{tikzcd}
\text{Chemins } (X, Y) \arrow[r, "\varprojlim"] \arrow[d, "R"'] & \text{spans}(X, Y) \arrow[d, "\mathrm{Comm}"] \\
\text{Chemins } (X, Y) \arrow[r, "\varinjlim"] & \text{cospans } (X, Y)
\end{tikzcd}$$

On vérifie que la partie exacte de R correspond aux réseaux exacts de Guitart [2].

RÉFÉRENCES.

1. GUITART R., Relations et carrés exacts, Ann. Sc. Math. Québec **IV-2** (1980).
2. GUITART, R., Carrés exacts et déductifs, Diagrammes *6*, Paris (1981).
3. GUITART, R., Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ? Cahiers Top. et Géom. Diff. XIII-2 (1982), 115.
4. HILTON, P., Correspondences and exact squares, Proc. Conf. on Cat. Algebra La Jolla 1966, Springer.
5. RIGUET, J., Quelques propriétés des relations difonctionnelles, C.R.A.S. Paris **230** (1950), 1999.
6. VAN DEN BRIL, L. Carrés exacts de Hilton dans des contextes non-abéliens, Ann. Sc. Math. Québec **IV**-2 (1980).

Hogere Zeevaartschool
Skykensteenweg
OSTENDE. BELGIQUE