

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

CORRADO TANASI

Sur les feuilletages mesurés arationnels

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 25, n° 3 (1984), p. 303-310

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1984__25_3_303_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FEUILLETAGES MESURÉS ARATIONNELS (*)
par Corrado TANASI

Résumé. A measured foliation is arational if it has no smooth closed leaves and no cycle of leaves. It is proved that such a foliation does not have borelian sections.

1. Introduction.

On rappelle que dans notre travail antérieur [6] on a trouvé une large classe de feuilletages mesurés, dans le sens de Thurston [3, 7] pour lesquels il existe des sections boréliennes. On a obtenu cette classe à partir des systèmes pondérés de courbes fermées simples sur une surface fermée M de genre $g > 1$.

Dans ce travail on présente une autre grande classe de feuilletages mesurés, pour lesquels des sections boréliennes *n'existent pas*.

Soit M une surface fermée de genre $g > 1$. D'après Thurston [3, 7] on pose la définition suivante :

Définition. Un feuilletage mesuré (F, μ) sur M est dit *arationnel* si dans F

- i) il n'existe pas des feuilles lisses fermées ;
- ii) il n'existe pas de cycles de feuilles (un cycle de feuilles est une courbe fermée constituée de feuilles compactes reliant les singularités).

En fait ceci n'est pas exactement la définition de [3], mais elle lui est équivalente.

On sait [3] que pour un tel (F, μ) les choses suivantes sont vraies aussi :

(A) - On peut trouver

$$(F', \mu') \sim (F, \mu)$$

(où \sim est la relation d'équivalence au sens de Whitehead) où (F', μ') n'a plus aucune feuille compacte reliant des singularités.

Comme d'après [6] les problèmes de sections boréliennes sont les mêmes pour deux feuilletages mesurés équivalents, on supposera do-

(*) Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

rénavant que c'est (F, μ) lui-même qui n'a plus de feuilles reliant les singularités entre elles.

(B) - Toutes les demi-feuilles de (F, μ) sont denses, en particulier tous les arcs transverses à (F, μ) rencontrent toutes les demi-feuilles (en fait une infinité de fois).

Nous montrerons le

Théorème. *Un feuilletage arationnel (F, μ) n'a pas de sections boréliennes.*

En fait il n'a pas de sections mesurables dans le sens de Lebesgue non plus.

Commentaire. a) Le théorème ci-dessus et le travail [6] montrent deux situations extrêmes. Dans le travail [6] le feuilletage mesuré (F, μ) ne consiste que des i et ii, c'est-à-dire on a des feuilles de type S^1 et $[0, 1]$, tandis qu'ici nous considérons, après l'application de (A), seulement des feuilles de type \mathbf{R} ou $[0, \infty)$.

b) Dans un autre travail ultérieur on montrera que les feuilletages mesurés arationnels sont eux-mêmes denses dans MF .

c) Je rappelle que les feuilletages stables et instables d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sont arationnels (voir [3, 4]).

Je remercie V. Poénaru, ses conseils et ses encouragements ont été précieux pour l'élaboration de ce travail.

2. Préliminaires.

On note Σ_{sing} l'ensemble des points de M qui sont singuliers pour le feuilletage mesuré (F, μ) . Soit

$$\hat{M} = M - \Sigma_{sing}$$

la surface ouverte qui est munie maintenant d'un *vrai* feuilletage, $\hat{F} = F|_{\hat{M}}$ sans singularités.

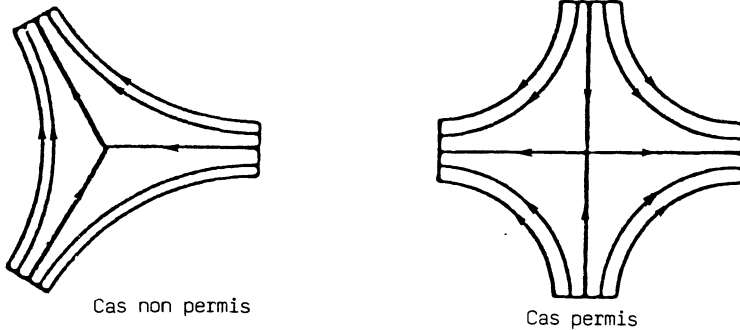
Pour la commodité du lecteur je rappelle le fait suivant Si on considère le fibré tangent $T\hat{F}$ aux feuilles de \hat{F} on obtient un fibré de dimension 1 de base \hat{M} et il est bien connu qu'on a la :

Proposition 1. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- 1) $T\hat{F}$ est *trivial* (c'est-à-dire $T\hat{F} = \hat{M} \times \mathbf{R}$) ;
- 2) $T\hat{F}$ est *orientable* (c'est-à-dire, on peut orienter toutes ses fibres d'une manière cohérente) ;
- 3) *il existe sur \hat{M} un champ de vecteurs V , partout non nul, tangent aux feuilles de \hat{F} .*

Si ces conditions, toutes équivalentes, sont vérifiées, on dira qu'on est dans le "cas orientable".

Dans ce cas, pour chaque $s \in \Sigma_{sing}$ il y a un nombre pair de séparatrices et le champ de vecteurs V au voisinage d'un tel s est comme dans la figure suivante, c'est-à-dire que les séparatrices rentrent et sortent alternativement.



3. Le cas orientable.

Dans ce paragraphe on va montrer le théorème pour les cas où le feuilletage mesuré (F, μ) est orientable. On peut donc disposer d'un champ de vecteurs V . On va choisir un (petit) arc transversal fermé T loin des singularités.

On va construire une "application" non univoque qu'on appellera "application du premier retour" (de Poincaré) $P : T \rightarrow T$.

Soit $v(x)$ le vecteur du champ V , appliqué au point x , nous notons par $L_{v(x)}$ la demi-feuille qui sort du point x dans la direction du vecteur $v(x)$.

Nous appellerons *exceptionnels* les points x de la transversale T tels que la demi-feuille $L_{v(x)}$ passe par une singularité s de F de façon que $(x, s] \cap T = \emptyset$. Les autres points de la transversale T sont appelés *ordinaires*. Evidemment

$$T = (\text{ensemble de points ordinaires}) \cup (\text{ensemble de points exceptionnels}).$$

L'application du premier retour P fait correspondre au point ordinaire y le premier point p_1 sur $L_{v(y)}$ qui est dans T après y .

Soit s le point singulier qui se trouve sur la demi-feuille $L_{v(x)}$ d'origine le point exceptionnel x de T , il est évident que les séparatrices S_1 et S_2 adjacentes à $L_{v(x)}$ sont sortantes du point s .

Sur S_1 , après s , il existe un premier point $q'_1 \in S_1 \cap T$ et de même sur S_2 , après s , il existe un premier point $q''_1 \in S_2 \cap T$. L' "application" P fait correspondre au point exceptionnel x les deux points q'_1 et q''_1 .

Proposition 2. L' "application" $P : T \rightarrow T$, ainsi définie, est un "échange d'intervalles" (interval-exchange) $[1, 2]$ en particulier elle est borélienne,

c'est-à-dire

$$P^{-1}(\text{borélien}) = \text{borélien}, \quad P(\text{borélien}) = \text{borélien},$$

et préserve la mesure

$$\mu B = \mu P(B) = \mu P^{-1}(B),$$

où B est un borélien.

Démonstration. Je vais considérer l'ensemble fini F_1 constitué par les points exceptionnels de T , par $P^{-1}(\partial T)$ et par ∂T . Si a_i et a_{i+1} sont des points consécutifs de F_1 , alors $P([a_i, a_{i+1}])$ est une isométrie entre $[a_i, a_{i+1}]$ et l'intervalle $P([a_i, a_{i+1}]) \subset T$ (on pourra utiliser le lemme de stabilité page 80 de [3]).

Les différents $P([a_i, a_{i+1}])$ ont leurs intérieurs disjoints et donc recouvrent exactement T . Les deux propriétés énoncées constituent la définition bien connue des "échanges d'intervalle" (voir [1, 2]) et le reste de l'énoncé en découle.

Proposition 3. *Le théorème est vrai dans le cas orientable.*

Démonstration. On adapte ici le raisonnement fait dans [6] pour les rotations irrationnelles. On considère l'ensemble dénombrable

$$F_\infty = \dots \cup P^{-2}(F_1) \cup P^{-1}(F_1) \cup P(F_1) \cup P^2(F_1) \cup \dots$$

Il est facile de voir que la restriction de P à $T - F_\infty$ est

- a) biunivoque,
- b) borélienne,
- c) préserve la mesure,

d) l'orbite de tout point $x \in T - F_\infty$ est infinie, car si y est un point de $T - F_\infty$ alors les points $\dots, P^{-1}y, y, Py, \dots$ sont tous distincts, sinon F aurait une feuille fermée.

Supposons, par absurde, qu'il existe une section borélienne $B \subset T$. Alors l'ensemble $B' = B \cap (T - F_\infty)$ est encore un ensemble borélien de T . D'autre part, on a :

$$1) \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} P^n(B') = T - F_\infty,$$

$$2) \quad P^n(B') \cap P^m(B') = \emptyset \quad \text{pour } n \neq m.$$

Si $\mu(B') = 0$, on a $\mu P^n(B') = 0$, parce que P préserve la mesure ; par conséquent :

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} P^n(B')\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu P^n(B') = 0 \neq \mu(T - F_\infty) \quad (> 0).$$

Si $\mu(B') = \varepsilon (> 0)$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} P^n(B')\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon = +\infty.$$

Donc nous avons toujours une contradiction.

4. Le cas général.

Nous montrerons, dans ce paragraphe, comment le cas orientable implique le cas général.

Soit (F, μ) le feuilletage mesuré *non* orientable. Si x_0 est un point de \hat{M} on considère le groupe fondamental $\pi_1(\hat{M}, x_0)$. On peut considérer un lacet de \hat{M} au point x_0 comme une application continue

$$\alpha : (S^1, *) \rightarrow (\hat{M}, x_0),$$

où $*$ est un point fixé sur le cercle S^1 . Je vais prendre S^1 paramétré par $2\pi t$ avec

$$(\alpha(t=0)) = * = (\alpha(t=1)).$$

Si $\alpha^*T\hat{F}$ désigne le fibré image réciproque de $T\hat{F}$ défini sur la base S^1 deux choses peuvent arriver : ou bien

1) $\alpha^*T\hat{F}$ est orientable,

ou bien

2) $\alpha^*T\hat{F}$ est non-orientable.

Remarques. 1) Supposons que $\alpha^*T\hat{F}$ soit orientable. On note par L_t la feuille passant par $\alpha(t)$ où $t \in S^1$. Si $w(0)$ est un vecteur non nul basé au point $\alpha(0) = \alpha(*)$ et tangent à $L_0 = L_*$ on peut le suivre d'une manière *continue* avec $w(t) \neq 0$ basé en $\alpha(t)$ et tangent à L_t pour $t \in [0, 1]$; pour $t = 1$ on arrive ainsi à un vecteur $\alpha(1)$ tangent à $L_1 = L_0$ au point $\alpha(*)$.

Deux cas peuvent se présenter :

- ou bien $\alpha(1) = \lambda\alpha(0)$ avec $\lambda > 0$ (situation "O" = orientable),
- ou bien $\alpha(1) = \lambda\alpha(0)$ avec $\lambda < 0$ (situation "N" = non-orientable).

La distinction N-O ne dépend que de α et pas d'autres choix.

2) Si α est homotope au lacet α' , alors α est orientable (ou non-orientable) ssi α' est orientable (ou non-orientable).

Soit maintenant G le sous-ensemble de $\pi_1(\hat{M}, x_0)$ dont les éléments sont les classes d'homotopie des lacets ayant la propriété d'être orientables ("O"). On montre la :

Proposition 4. G est un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(\hat{M}, x_0)$.

Démonstration. Evidemment $1 \in G$. Si g_1 et g_2 sont deux classes d'homotopie des lacets ayant la propriété "O" on a de même que g_1g_2 a la propriété "O". Si g a la propriété "O" il en est de même pour g^{-1} . Donc G est un sous-groupe. Si

$$g_1 \in \pi_1 - G \quad \text{et} \quad g_2 \in \pi_1 - G$$

alors $g_1g_2 \in G$, ceci finit la démonstration.

On considère le revêtement \tilde{M} [4] canoniquement défini par G ,

$$\tilde{\Pi} : \tilde{M} \rightarrow \hat{M} .$$

Propriétés du revêtement.

- 1) Ce revêtement est à deux feuilletés.
- 2) L'image réciproque $\tilde{\Pi}^* \hat{F}$ est un feuilletage de \tilde{M} , ce feuilletage possède la propriété que l'espace fibré tangent $\tau(\tilde{\Pi}^* \hat{F})$ est orientable.
- 3) On va voir ce qui se passe au voisinage des singularités.

Soit \underline{s} une singularité avec un nombre *pair* de séparatrices, on considère un petit disque U de centre \underline{s} , ainsi que le sous-ensemble de \hat{M} , $U' = U - \{s\}$; la restriction du feuilletage \hat{F} à U' est orientable et donc l'ensemble $\Pi^{-1}U'$ est non-connexe, il est constitué de deux exemplaires de U' .

Si \underline{s} est une singularité avec un nombre *impair* de séparatrices, alors la restriction du feuilletage à U' , défini comme ci-dessus, est non-orientable et l'ensemble $\Pi^{-1}U'$ est connexe, il est un vrai revêtement à deux feuilletés de U' ; localement la situation est celle de la surface de Riemann de $u = \sqrt{z}$ (où $z \in \mathbb{C} - \{0\}$).

Soit \tilde{M} la compactification de \tilde{M} obtenue en ajoutant pour chaque $s \in \Sigma_{sing}$, dans les cas orientables deux points à $\Pi^{-1}U'$ et dans le cas non orientable, un point à $\Pi^{-1}U'$. On ajoute ainsi les centres des disques troués respectifs.

Nous obtenons alors que \tilde{M} est une vraie surface fermée munie d'un feuilletage mesuré *orientable* $(\tilde{F}, \tilde{\mu})$ et

$$\begin{array}{c} \tilde{M} \quad (\tilde{F}, \tilde{\mu}) \\ \tilde{\Pi} \downarrow \\ M \quad (F, \mu) \end{array}$$

est un revêtement *ramifié*, compatible avec les deux feuilletages, leurs singularités et leurs mesures transverses. On a la

Proposition 5. *Si L est une feuille de (F, μ) , alors $\tilde{\Pi}^{-1}L$ consiste exactement de deux feuilles de $(\tilde{F}, \tilde{\mu})$ et la restriction de $\tilde{\Pi}$ à chacune de ces feuilles est un difféomorphisme sur L .*

Remarque. Cette proposition implique le théorème pour le feuilletage (F, μ) .

Démonstration du théorème. Soit T une *petite* transversale pour (F, μ) , petite voudra dire qu'elle est contenue dans un voisinage de \hat{M} au-dessus duquel $\tilde{M} \rightarrow \hat{M}$ est trivial. Ainsi $\tilde{\Pi}^{-1}T$ consiste de deux exemplaires de T , notés T' et T'' . Supposons, par absurde, qu'il existe une section borélienne $B \subset T$. Si $\underline{x} \in B$ et L_x est une feuille par \underline{x} alors

$$\tilde{\Pi}^{-1}\underline{x} = (x', x''),$$

les $\tilde{L}_{x'}$ et $\tilde{L}_{x''}$ sont exactement les deux feuilles au-dessus de L_x . Ainsi $\tilde{\Pi}^{-1}B$ est encore une section pour $(\tilde{F}, \tilde{\mu})$. Elle est aussi borélienne, car

elle consiste de deux exemplaires de B. Mais ceci est absurde, car $(\tilde{F}, \tilde{\mu})$ est orientable et donc sans sections boréliennes.

Démonstration de la Proposition 5. Je rappelle le fait élémentaire suivant :

(P) Si $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement à deux feuillets, et si $E \subset X$ est une partie simplement connexe, alors $\tilde{\pi}^{-1}E$ consiste de deux exemplaires de E.

Dans notre situation on a pour chaque feuille L de (F, μ) deux topologies. La topologie intrinsèque (notée L^i) pour laquelle L^i est un exemplaire de \mathbb{R} et l'inclusion $\psi_L : L^i \hookrightarrow \hat{M}$ une injection C^∞ immersive. Mais la topologie de L induite par ψ_L (notée L^{ind}) n'est pas la même que L^i : elle contient plus de suites convergentes. Ainsi notre fait élémentaire (P) ne s'applique pas directement.

On peut remédier à cet inconvénient en passant de \hat{M} à M_δ qui est " \hat{M} rendu discrète transversalement aux feuilles". Ceci veut dire la chose suivante : si (x, y) est une carte privilégiée de \hat{M} avec $(y = \text{const})$, plaque de \tilde{F} , on obtient \tilde{M}_δ en rendant la coordonnée y discrète. On a ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{M}_\delta & \xrightarrow{\quad} & \tilde{M} \\
 \tilde{\pi}_\delta \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\
 \hat{M}_\delta & \xrightarrow{\quad} & \hat{M}
 \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les applications identiques évidentes. On pourra appliquer immédiatement la propriété (P) à $\tilde{\pi}_\delta : \tilde{M}_\delta \rightarrow \hat{M}_\delta$, car L^i s'identifie à un sous-espace de \hat{M}_δ , c'est-à-dire que la topologie induite par le plongement naturel $L \subset \hat{M}_\delta$ est exactement L^i , et pas le L^{ind} ci-dessus.

Bibliographie.

1. ARNOUX P., Théorie ergodique, Les Plans-sur Bex., Ens. Math. Genève (1980).
2. CORFELD I.P., FOMIN S.V. & SINAI Y.G., Ergodic theory, Springer, 1980.
3. FATHI A., LAUDENBACH F., POENARU V. & Al., Travaux de Thurston sur les surfaces Séminaire d'Orsay, Astérisque 66-67 (1980).
4. MASSEY W., Algebraic Topology : an introduction, Harbrace College Math. Ser. 1967.
5. TANASI C., Mesures transverses et sections boréliennes dans les feuilletages, Un. Mat. Italiana (à paraître).
6. TANASI C., Sections boréliennes pour les feuilletages mesurés (à paraître).
7. THURSTON W., On the geometry and dynamics of the diffeomorphisms of surfaces, Preprint.

Istituto di Matematica (Università)
Via Archrafi, 34
I-90123 PALERMO. ITALIE