

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

FRANCIS BORCEUX

GILBERTE VAN DEN BOSSCHE

Structure des topologies d'un topos

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
25, n° 1 (1984), p. 37-39

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1984__25_1_37_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STRUCTURE DES TOPOLOGIES D'UN TOPOS

par Francis BORCEUX et Gilberte VANDEN BOSSCHE

Toute topologie $j: \Omega \rightarrow \Omega$ dans un topos élémentaire E classe un sous-objet $D_j \multimap \Omega$. L'inclusion entre sous-objets de Ω fournit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des topologies du topos E . L'objet de cette Note est démontrer que :

THÉORÈME. *Pour la relation d'ordre décrite ci-dessus, l'ensemble des topologies sur un topos élémentaire constitue une algèbre de Heyting.*

On se réfèrera à [2] où le théorème précédent est suggéré dans l'exercice 5-9. Nous en donnons ici une démonstration constructive basée sur un résultat de Joyal permettant de construire la topologie engendrée par un sous-objet de Ω (cf. [2], 3-58). En particulier (cf. [2], 3-59), étant donné un monomorphisme $u: A \multimap B$ de E , il existe toujours une plus petite topologie pour laquelle u est dense et une plus grande topologie pour laquelle u est fermé.

Rappelons tout d'abord que, si j_1, j_2 sont deux topologies sur E , $j_1 \wedge j_2: \Omega \rightarrow \Omega$ est le morphisme classifiant $D_{j_1} \cap D_{j_2}$ (cf. [2], Exercice 3-1) et $j_1 \vee j_2: \Omega \rightarrow \Omega$ est la topologie engendrée par $D_{j_1} \cup D_{j_2}$ (cf. [2], 3-59-i). Nous allons prouver que $j_1 \Rightarrow j_2: \Omega \rightarrow \Omega$ existe et est la plus grande topologie telle que $(D_{j_1} \Rightarrow D_{j_2}) \multimap \Omega$ soit fermé.

En notant $\bar{A}^j \multimap B$ la fermeture de $A \multimap B$ pour la topologie j , on a aussitôt :

LEMME 1. *Soit j_1, j_2 deux topologies sur E , alors*

$$(j_1 \leq j_2) \Leftrightarrow (\forall u: A \multimap B, \bar{A}^{j_1} \leq \bar{A}^{j_2}).$$

car D_j est la j -fermeture du *Vrai* dans Ω (cf. [2], 3-14). \square

LEMME 2. *Soit j_1, j_2, j_3 trois topologies sur E , alors*

$$(D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3} \text{ est } j_1\text{-fermé}) \Leftrightarrow (D_{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})).$$

L'implication de gauche à droite résulte de

$$1 \leq D_{j_3} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$$

et du fait que D_{j_1} est la j_1 -fermeture de 1 dans Ω .

Réciproquement, soit $D_{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$. La thèse se ramène à prouver que

$$\begin{aligned} (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3} \text{ et } j_2\text{-fermé}) &\Leftrightarrow (\overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})) \\ &\Leftrightarrow (D_{j_2} \wedge \overline{D_{j_2}}^{j_1} \Rightarrow D_{j_3} \leq D_{j_3}). \end{aligned}$$

Considérons le diagramme suivant où les carrés sont des produits fibrés

$$\begin{array}{ccccc} D_{j_2} \wedge (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}) & \xrightarrow{\quad} & D_{j_2} \wedge \overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1} & \xrightarrow{\quad} & D_{j_2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3} & \xrightarrow{\quad} & \overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1} & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

Les produits fibrés commutant avec les j_1 -fermetures, il en résulte que

$D_{j_2} \wedge \overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1}$ est la j_1 -fermeture de $D_{j_2} \wedge (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$ dans D_{j_2} .

Par ailleurs 1 étant j_2 -dense dans D_{j_2} , D_{j_2} est la j_2 -fermeture de

$$D_{j_2} \wedge (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3})$$

dans D_{j_2} . Il en résulte que $D_{j_2} \wedge \overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1}$ est la $j_1 \wedge j_2$ -fermeture de

$$D_{j_2} \wedge (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}) = D_{j_2} \wedge D_{j_3}$$

dans D_{j_2} . Comme par hypothèse $j_1 \wedge j_2 \leq j_3$ et $D_{j_2} \wedge D_{j_3}$ est j_3 -fermé dans D_{j_2} , nous concluons que

$$D_{j_2} \wedge \overline{D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}}^{j_1} = D_{j_2} \wedge D_{j_3} \leq D_{j_3}. \quad \square$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit donc j_1, j_2, j_3 trois topologies sur E . Notons j la plus grande topologie telle que $D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}$ soit fermé dans Ω . Il s'agit de prouver que $j = (j_2 \Rightarrow j_3)$, c'est-à-dire

$$j_1 \wedge j_2 \leq j_3 \Leftrightarrow j_1 \leq j.$$

En effet, grâce au Lemme 1:

$$\begin{aligned}
 j_1 \wedge j_2 \leq j_3 &\rightarrow D_{j_1} \cap D_{j_2} \leq D_{j_3} \rightarrow D_{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}) \\
 &\rightarrow (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3} \text{ est } j_1\text{-fermé}) \rightarrow j_1 \leq j.
 \end{aligned}$$

et réciproquement,

$$\begin{aligned}
 j_1 \leq j &\rightarrow D_{j_1} \leq D_j \rightarrow D_{j_1} \leq (D_{j_2} \Rightarrow D_{j_3}) \rightarrow D_{j_1} \cap D_{j_2} \leq D_{j_3} \\
 &\rightarrow j_1 \wedge j_2 \leq j_3. \quad \square
 \end{aligned}$$

Signalons pour terminer que, lorsque le topos E est de Grothendieck, l'algèbre de Heyting des topologies est en fait complète (cf. [1]).

BIBLIOGRAPHIE.

1. F. BORCEUX & G. VANDENBOSSCHE, The structure of localizations, To appear in *Revue Roum. Math. Pures Appl.*
2. P. JOHNSTONE, *Topos Theory*, Academic Press, 1977.

Institut de Mathématique Pure et Appliquée
 Université Catholique de Louvain
 Chemin du Cyclotron 2
 B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE
 BELGIQUE