CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

LUC VAN DEN BRIL

Exactitude dans les Yoneda-structures

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, nº 2 (1982), p. 215-224

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1982__23_2_215_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
Vol. XXIII-2 (1982)

3^e COLLOQUE SUR LES CATÉGORIES
DÉDIÉ À CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

EXACTITUDE DANS LES YONEDA-STRUCTURES

par Luc Van den BRIL

1. Les carrés exacts dans *Cat* et dans les 2-catégories munies d'une Yoneda-structures sont introduits et étudiés dans Guitart [2]. Pour les définitions et propriétés des carrés exacts dans une 2-catégorie, voir Guitart [2, 3], Van den Bril [12]. Ici, on montre que, *dans une 2-catégorie représentable munie d'une Yoneda-structure, le pseudo-foncteur de Yoneda préserve et réfléchit les carrés exacts.*

Cette propriété unifie les résultats obtenus par Street [10] et subsiste dans un contexte généralisant les Yoneda-structures de Street-Walters [11] et englobant les théories algébriques de Lawvere [6] (nous appelons encore Yoneda-structure un tel contexte - cf. n° 5; nous conservons les notations de Street [10]). De ce point de vue, la propriété précédente relie l'exactitude syntaxique et l'exactitude sémantique.

Dans ce qui suit, K désignera une 2-catégorie représentable.

2. DÉFINITION. Si f et g sont deux 1-morphismes de même source, on écrira $f \ll g\ (x)$ s'il existe un carré exact [3] de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, "x"] \\ A \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & C \end{tikzcd}$$

(si g est dense, x est unique à isomorphisme près, car x est alors une extension ponctuelle de g le long de f). On dira alors que f *est g-admissible*. Cette terminologie est justifiée par le fait que, dans les Yoneda-structures de Street-Walters (ou celles plus générales introduites plus loin) on a $f \ll y_A$ (flèche de Yoneda) ssi f est admissible au sens de la Yoneda-structure.

Il est évident qu'on obtient ainsi un préordre vérifiant:

$$f \ll g \text{ entraîne } fp \ll gp \quad \text{pour tout } p: X \to A.$$

Exemples: $f \ll id_A$ ssi f a un adjoint à droite, et f pleinement fidèle entraîne $id_A \ll f$.

En utilisant essentiellement la propriété qu'une extension ponctuelle surmontée d'un carré exact est encore une extension, on obtient aisément les résultats suivants :

3. THÉORÈME. *Soit dans* K *les 1-morphismes*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "s"] & C \arrow[l, shift left, "t"] \end{tikzcd}$$

où f *est dense. Alors,* $s \dashv t$ *ssi les deux conditions suivantes sont réalisées:*

a) Il existe un carré exact

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "sf"] \arrow[d, equal] & C \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & B \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $sf \ll f$.

b) s *conserve la densité de* f, *c'est-à-dire*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "sf"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{id}"] & B \arrow[dl, "s"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est une extension ponctuelle.

4. COROLLAIRE *(Théorie des modèles). Soit dans* K *les 1-morphismes*

$$B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{m} C$$

où f *est pleinement fidèle et dense.*

1) Si $m \ll f(s)$, *alors* s *possède un adjoint à gauche* r *ssi il existe*

$r: B \to C$ qui soit une extension ponctuelle de m le long de f. Dans ce cas, $r \dashv s$.

2) Si r est une extension ponctuelle de m le long de f, alors r possède un adjoint à droite ssi $m \ll f(s)$. Dans ce cas, $r \dashv s$.

Dans CAT, f représente le plongement de Yoneda, m un foncteur modèle et $r \dashv s$ est l'adjonction

réalisation géométrique $\dashv$ foncteur singulier.

On appliquera ces adjonctions aux situations suivantes :

5. DÉFINITION. Une *Yoneda-structure sur* K est la donnée, pour certains objets A de K, dits *admissibles*, d'une flèche $y_A : A \to PA$ de sorte que :

1) y_A est pleinement fidèle et dense.

2) Si $f: A \to B$ est *admissible*, c'est-à-dire $f \ll y_A$, alors $y_B f \ll y_A$. En d'autres termes, le composé de deux admissibles est admissible.

Les objets admissibles avec les flèches admissibles déterminent donc une sous-2-catégorie $Ad(\mathrm{K})$ 2-pleine de K et P se prolonge en un pseudo-2-foncteur 2-pleinement fidèle $Ad(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}^{op}$ si on choisit Pf de manière que le carré suivant soit exact :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y_B"] & PB \arrow[d, "Pf"] \\ A \arrow[rr, "y_A"'] & & PA \arrow[u, phantom, "\nearrow", pos=0.8, shift right=4ex] \end{tikzcd}$$

Si pour tout $f: A \to B$, on choisit $\sigma f: B \to PA$ tel que le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, "\sigma f"] \\ A \arrow[r, "y_A"'] & PA \arrow[ul, phantom, "\nearrow", pos=0.3] \end{tikzcd}$$

soit exact, alors

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "y_B"] \arrow[dr, "\sigma f"'] & & PB \arrow[dl, "Pf"] \\ & PA \arrow[u, phantom, "\curvearrowright"] & \end{tikzcd}$$

est une extension ponctuelle.

En appliquant la théorie des modèles, on obtient:

6. THÉORÈME *(Street [10]). 1) Si les extensions ponctuelles au-dessus de* PB *le long des flèches admissibles existent, alors* Pf *a un adjoint à gauche:* $\exists f \dashv Pf$.

2) Pf *possède un adjoint à droite ssi* σf *est admissible, ssi* Pf *est admissible (lorsque* PB *est admissible).*

7. APPLICATION AUX THÉORIES ALGÉBRIQUES.

Considérons dans une 2-catégorie K de catégories, limitée au moyen d'univers choisis, les catégories A telles que les préfaisceaux d'ensembles sur A restent confinés dans K. En attachant à ces objets la restriction $y_A : A \to PA$ du plongement de Yoneda aux préfaisceaux transformant les I-colimites en I-limites (I étant un diagramme fixé), on obtient une Yoneda-structure dans laquelle les flèches admissibles sont les foncteurs conservant les I-colimites. En effet, un foncteur $f: A \to B$ conserve les I-colimites ssi le foncteur singulier $B \to [A^o, ENS]$ associé se factorise sous la forme:

$$B \xrightarrow{\sigma f} PA \hookrightarrow [A^o, ENS].$$

Comme $PA \hookrightarrow [A^o, ENS]$ est pleinement fidèle, $y_A : A \to PA$ est dense et $f << y_A\ (\sigma f)$. Réciproquement, si $f << y_A$, alors f conserve toutes les colimites préservées par y_A et y_A préserve les I-colimites en raison d'un résultat classique. Ces propriétés subsistent lorsque, au lieu de considérer les I-colimites, on considère par exemple les coproduits finis. Dans ce dernier contexte, si $f^o : A^o \to B^o$ est un morphisme de théories algébriques au sens de Lawvere, $f: A \to B$ est admissible et $Pf: PB \to PA$ est le foncteur algébrique correspondant.

Soit $N: 0, 1, 2, \ldots$ la catégorie des cardinaux finis et $j_i : 1 \to n$ les n injections du coproduit qui deviennent les projections du produit $p_i : n \to 1$ dans la duale N^{op}. $y_B(n) = B[\,.\,, n]$ s'identifie à la B-algèbre libre sur l'ensemble fini n, de support l'ensemble $B[1, n]$ des opérations n-aires.

Comme $\sigma f \approx Pf \circ y_B$, $\sigma(f)\,n$ s'identifie à la A-algèbre sous-jacente à $y_B(n)$ de sorte que

$$\begin{tikzcd} & PA \arrow[dr, "oubli"] & \\ B \arrow[ur, "\sigma f"] \arrow[rr, "{B[1,.]}"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "="] & & ENS \end{tikzcd}$$

commute. Le théorème précédent entraîne alors :

8. PROPOSITION *(Lair [5], Lawvere [6]). Soit $f^o : A^o \to B^o$ un morphisme de théories algébriques. Les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

1) Pf a un adjoint à droite $\exists f$.

2) Pf conserve les coproduits finis, i. e. est admissible.

3) σf conserve les coproduits finis, i. e. est admissible.

Ceci équivaut à dire que Pf conserve les coproduits finis des B-algèbres libres de type fini. De manière explicite, $B[1,0]$ est initial *dans* A et, pour tout $n \geq 1$, les

$$B[1,1] \xrightarrow{B[1,j_i]} B[1,n],$$

$i = 1, 2, \dots, n$, définissent un coproduit *dans* A.

9. CAS PARTICULIERS. Lorsque $A = N$, on obtient $B[1,0] = \emptyset$ (pas de constante) et toute opération n-aire avec $n \geq 1$ s'écrit de manière unique comme la composée d'une projection et d'une opération 1-aire. PB est alors équivalente à la catégorie des $B[1,1]$-ensembles.

Lorsque A^o est la théorie algébrique des groupes abéliens, on obtient $B[1,0] = 0$ (une seule constante) et toute opération n-aire v avec $n \geq 1$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$v = u_1 p_1 + \dots + u_n p_n$$

où les u_i sont des opérations 1-aires. PB est alors équivalente à la catégorie des $B[1, 1]$-modules à gauche.

10. DEFINITION (Guitart [3]). Soit dans une 2-catégorie représentable K

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow\phi"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u{\downarrow}v \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_0"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

où λ définit un carré comma; soit $k: A \to u{\downarrow}v$ tel que

$$d_0 k = s, \quad d_1 k = t \quad \text{et} \quad \lambda k = \phi .$$

On dira que $f: X \to M$ *est une réalisation de* ϕ et on écrira $f \models \phi$ lorsque pour tout $g: Y \to M$, l'application

$$(fd_0 \xrightarrow{a} gd_1) \mapsto (fs \xrightarrow{ak} gt)$$

est bijective. Si l'extension ponctuelle (r, θ) de f le long de u existe, $f \models \phi$ ssi le triangle θ surmonté du carré ϕ est une extension.

11. EXEMPLES. 1) ϕ est exact ssi $f \models \phi$ pour tout $f: X \to Z$.

2) Soit $r: C \to X$; ϕ est r-exact ssi $f \models \phi$ pour tout $f: X \to Z$ qui est une extension ponctuelle le long de r.

3) Si u est dense et si (v, ϕ) est une extension de us le long de t, alors $u \models \phi$.

Si $f << g$, on sait que tout triangle transformé en extension par g est aussi transformé en extension par f. Cette propriété est généralisée au moyen de la

12. PROPOSITION. *Si* $f << g$ *et* $g \models \phi$, *alors* $f \models \phi$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[d, "x"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow\eta"] & N \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[d, "h"] \\ M \end{tikzcd}$$

entraîne

$$\begin{tikzcd} {[fd_0, hd_1]} \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\Lambda"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {[fs, ht]} \arrow[d, "\Phi"] \\ {[gd_0, xhd_1]} \arrow[r, "\Pi"] & {[gs, xht]} \end{tikzcd}$$

où

$$\Gamma a = a k, \quad \Phi a = xa \circ \eta s, \quad \Lambda a = xa \circ \eta d_0 \quad \text{et} \quad \Pi a = a k.$$

Si η est exact et $g \models \phi$, alors Λ, Π, Γ sont bijectives.

13. COROLLAIRE *(Guitart [2]). Si* K *est munie d'une Yoneda-structure et si X est admissible, alors $y_X \models \phi$ ssi $f \models \phi$ pour toute flèche admissible f de source X.*

La proposition qui suit fournira un critère pour que ϕ soit exact dès que $y_X \models \phi$.

14. PROPOSITION. *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, phantom, "\phi"] & B \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\psi"] & C \end{tikzcd}$$

avec ψ exact. Alors, ϕ est exact ssi $u \models \phi$ et $f \models \phi$.

DÉMONSTRATION. Soit $\theta : fe_0 \to ge_1$ un carré comma et $l : A \to f{\downarrow}g$, le morphisme induit. Il existe alors

$$fd_0 \xrightarrow{a} gd_1 \ \text{tel que} \ a k = \psi \quad \text{et} \quad u e_0 \xrightarrow{\beta} v e_1 \ \text{tel que} \ \beta l = \phi.$$

On en déduit

$$u{\downarrow}v \xrightarrow{i} f{\downarrow}g \quad \text{et} \quad f{\downarrow}g \xrightarrow{j} u{\downarrow}v \quad \text{tels que} \quad \theta i = a \quad \text{et} \quad \lambda j = \beta,$$

et on obtient $ji = id$ et $ij = id$.

15. REMARQUE. On a montré en fait que

$$u \models \phi, \quad f \models \phi, \quad u \models \psi \quad \text{et} \quad f \models \psi$$

entraînent que $u{\downarrow}v$ et $f{\downarrow}g$ sont isomorphes et par suite $h \models \phi$ ssi $h \models \psi$.

16. COROLLAIRE. *S'il existe un carré exact de la forme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "y_X"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & PX \end{tikzcd}$$

et si u est admissible, alors $y_X \models \phi$ ssi ϕ est exact.

En particulier, si u et t sont admissibles, les carrés

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\phi"] \\ X \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\phi"] \\ X \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

sont exacts ssi $y_X \models \phi$.

On démontre maintenant le théorème annoncé dans l'introduction.

17. THÉORÈME. *On suppose* K *munie d'une Yoneda-structure telle que les extensions ponctuelles le long des flèches admissibles au-dessus des objets de la forme PX existent. Dans ce cas, $P: Ad(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}^{op}$ conserve et réfléchit l'exactitude. Plus précisément, soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r, "y_Y"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\phi"] & PY \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\beta(v)"] \\ X \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "y_B"'] & PB \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} PB \arrow[r, "Pu"] \arrow[d, "Pv"'] & PX \arrow[d, "Ps"] \arrow[dl, phantom, "P\phi"] \\ PY \arrow[r, "Pt"'] & PA \end{tikzcd}$$

1) Si $P\phi$ est exact, alors $y_X \models \phi$.

2) Si y_X réalise le composé horizontal de ϕ et $\beta(v)$, alors $P\phi$ est exact.

Il en résulte que $y_X \models \phi$ équivaut à $P\phi$ exact dès que σu est admissible ou $\beta(v)$ est exact, ce qui est le cas pour les théories algébriques (voir n° 19).

DÉMONSTRATION. En raison des hypothèses, $\exists s \dashv Ps$ et $\exists v \dashv Pv$. Le compagnon ϕ_1 de $P\phi$ s'insère alors dans la relation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[rr, "y_Y"] & & PY \arrow[dl, "Pt"] \arrow[dr, "\exists v"] & \\ A \arrow[rr, "y_A"] \arrow[drrr, "y_X \cdot s"'] & & PA \arrow[dr, "\exists s"] \arrow[rr, phantom, "\phi_1"] & & PB \arrow[dl, "Pu"] \\ & & & PX & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r, "y_Y"] \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\phi"] & PY \arrow[d, "Pt"] \arrow[dl, phantom, "\beta v"] \\ X \arrow[r, "u"'] \arrow[dr, "y_X"'] & B \arrow[r, "y_B"] \arrow[d, "\sigma u"] \arrow[dl, phantom, "\lambda"] & PB \arrow[dl, "Pu"] \\ & PX & \end{tikzcd}$$

Il en résulte que y_X est un isomorphisme, i.e. $P\phi$ est exact, ssi le diagramme de gauche est une extension. Ceci démontre 2 et 1 résulte alors du:

18. LEMME. *Soit dans* K *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"'] & B \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\lambda\nearrow"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\alpha"] & C \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

où le triangle composé est une extension ponctuelle, i est pleinement fidèle et α est un isomorphisme. Si l'extension ponctuelle de v le long de u existe, alors λ et α definissent des extensions ponctuelles.

19. PROPOSITION. *Pour la Yoneda-structure conduisant aux théories et catégories algébriques (Section 7) les carrés suivants sont exacts, pour tout foncteur $f: X \to Y$ conservant les coproduits finis:*

$$\begin{tikzcd} PY \arrow[r, hook] \arrow[d, "Pf"'] & {[Y^o, ENS]} \arrow[d, "{[f^o, ENS]}"] \\ PX \arrow[r, hook] \arrow[ur, phantom, "//"] & {[X^o, ENS]} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "y_X"] \arrow[d, "f"'] & PX \arrow[d, "Pf"] \\ Y \arrow[r, "y_Y"'] \arrow[ur, phantom, "\beta(f)\nearrow"] & PY \end{tikzcd}$$

En effet, l'exactitude du premier équivaut à dire que, si

$$ENS \xleftarrow{g} X^o \xrightarrow{f^o} Y^o$$

g préserve les produits finis, il en est de même pour l'extension ponctuelle de g le long de f^o (Borceux [1]). L'exactitude du second résulte de celle du premier, compte tenu du lemme précédent.

20. REMARQUES. 1) Dans la situation du Théorème 17, $P\phi$ est exact ssi $\exists\phi : \exists u\, \exists s \to \exists v\, \exists t$ est exact.

2) On peut formuler des résultats analogues en supposant l'existence d'adjoints à droite $Ps \dashv \forall s, \ldots$

3) Si $\phi: us \to vt$ est un carré exact dont les sommets sont des «petites catégories» et si C est une catégorie cocomplète, alors $C^\phi: C^s C^u \to C^t C^v$ est encore exact, i.e. l'exponentiation conserve l'exactitude.

BIBLIOGRAPHIE.

1. F. BORCEUX, Universal algebra in a closed category, *Séminaire Math. Pures* Louvain-la-Neuve, Rapport 64 (1976).
2. R. GUITART, Relations et carrés exacts, *Ann. Sc. Math. Québec* IV-2 (1980) 103-125.
3. R. GUITART, a) Qu'est-ce que la logique dans une catégorie? Ce Volume. b) Introduction à la logique exacte fibrée, en préparation.
4. G.M. KELLY & R. STREET, Review of the elements of 2-categories, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974).
5. C. LAIR, Conditions syntaxiques de plongement, *Diagrammes* 2, Paris (1979).
6. W. LAWVERE, Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Ac. Sc.* 50 (1963), 869-872.
7. W. LAWVERE, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, *Lecture Notes in Math.* 61, Springer (1968).
8. S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.
9. R. STREET, Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974).
10. R. STREET, Elementary cosmoi I, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974).
11. R. STREET & WALTERS, Yoneda structures on 2-categories, Preprint.
12. L. VAN DEN BRIL, Carrés exacts de Hilton dans des contextes non abéliens, *Ann. Sc. Math. Québec* IV-2 (1980), 153-173.

28 rue de la Sapinière
1170 BRUXELLES. Belgique