CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

GONZALO E. REYES

Analyse dans les topos lisses

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, nº 2 (1981), p. 155-160

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_2_155_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XXII-2 (1981)

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

ANALYSE DANS LES TOPOS LISSES

par Gonzalo E. REYES

1. Certains développements de la Géométrie Différentielle Synthétique (GDS) ont permis d'envisager une formulation «synthétique» de l'Analyse C^∞, où l'on suppose que toutes les fonctions considérées sont lisses, c'est-à-dire, possèdent des dérivées continues de tous les ordres. La classe de ces fonctions possède, en effet, une grande stabilité: elle est fermée par rapport aux opérations algébriques (addition, multiplication, division), différentiation, intégration, fonctions implicites, ainsi que d'autres opérations telles que le «le prolongement à R^2 du quotient $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ».

Cette étude peut se faire en prenant comme base (une forme de) l'axiome de Kock-Lawvere sur l'objet des réels R (qui est un anneau commutatif unitaire):

(KL) L'application $a: R\times R \to R^D$ qui envoie (a, b) dans la fonction $[\, d \mapsto a+bd\,]$ est un isomorphisme, où $D = \{ x \in R \mid x^2 = 0 \}$.

Cet axiome exprime que toute fonction définie sur les éléments de carré nul («infiniment petits du premier ordre») est une droite. La dérivée $f'(x_0)$ peut se définir comme la pente de la droite $[\, d \mapsto f(x_0+d)\,]$ et on obtient la formule de Taylor tronquée

$$f(x_0+d) = f(x_0) + df'(x_0)$$

qui contient, en germe, tout le formalisme élémentaire du calcul différentiel (cf. [4]).

Sur cette base, A. Kock et moi [5] avons proposé un axiome d'intégration pour les fonctions définies sur des intervalles fermés. Ceci nous force à munir R d'un *préordre* $\leq$ compatible avec la structure algébrique

* Recherche subventionnée par le Conseil National de Recherches du Canada et le Research Council du Danemark.

de R et tel que

$$0 \leq n \leq 0 \quad \text{pour tout nilpotent } n \in R.$$

Cette dernière condition garantit que tout intervalle fermé $[a, b]$ (avec $a \leq b$) est un sous-objet étale (ou «infinitésimalement ouvert») de R, ce qui permet de définir la dérivée d'une fonction définie sur un tel intervalle par la formule de Taylor déjà mentionnée.

L'axiome en question se laisse formuler ainsi :

$$\text{(I)} \qquad \forall f \in R^{[0,1]} \quad \exists ! \, g \in R^{[0,1]} \quad (g' \equiv f \wedge g(0) = 0).$$

On notera

$$\int_0^x f(t)dt = g(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, 1].$$

Tout le formalisme élémentaire du calcul intégral se déduit facilement de cet axiome (en conjonction avec le précédent), mais nous ne nous y attarderons pas (cf. [5, 6]).

Dans le même article [5], nous avons montré que (I) est vérifié dans le modèle de Dubuc [1].

Le but de cette note est d'indiquer une méthode de construction de modèles pour ces deux axiomes (ainsi que pour d'autres qui s'y rattachent). L'idée de base est de construire des topos «lisses» à partir d'une classe d'idéaux d'anneaux de la forme $C^\infty(\mathrm{R}^n)$. Par passage au quotient, ces idéaux définissent une catégorie d'anneaux «lisses» (où les fonctions C^∞ sont interprétables) que l'on peut munir d'une structure de site. En choisissant convenablement cette classe d'idéaux (et le site), on réussit à contrôler des propriétés analytiques du topos ainsi défini, propriétés qui peuvent se donner *a priori*.

Plusieurs topos considérés dans le contexte de GDS [7, 1, 2] sont des cas particuliers de cette construction. Cette méthode est developpée dans [9], Exposés 5, 6, où l'on peut trouver les détails des preuves ici omises ainsi que d'autres renseignements. Dans cette note, nous nous limiterons à la construction d'un modèle des axiomes (KL) et (I), modèle basé sur la notion d'idéal *W-déterminé* (ou déterminé par ses points proches).

2. Un *anneau* C^∞ est un modèle de la théorie algébrique dont les opérations n-aires sont les fonctions lisses de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, notées $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, et dont les axiomes sont toutes les équations vérifiées par ces fonctions. Puisque les polynômes sont lisses, les anneaux C^∞ sont des $\mathbb{R}$-algèbres. Les *morphismes* d'anneaux C^∞ sont les homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres qui préservent la structure (lisse) additionnelle. On remarquera que $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'anneau libre à n générateurs.

EXEMPLES de tels anneaux :

i) L'algèbre $C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur une variété M ;

ii) Algèbres de Weil, c'est-à-dire, les $\mathbb{R}$-algèbres locales qui sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$ de la forme $\mathbb{R}\oplus m$ et dont l'idéal maximal m est nilpotent (i.e., $m^n = 0$ pour un certain $n > 0$);

iii) Algèbres de la forme $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$, où I est un idéal (au sens algébrique).

Un idéal $I \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est *W-déterminé* (ou déterminé par ses points proches) si les morphismes d'anneaux C^∞ de $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ dans les algèbres de Weil séparent les points (cf. [9]). Intuitivement : $F \in I$ ssi F a tous les zéros de I (avec multiplicités). On peut remarquer que cette notion peut se définir aussi pour des idéaux des k-algèbres et k-algèbres de Weil (pour k un corps). On a alors le résultat suivant

PROPOSITION *(Krull-Zariski [10]). Tout idéal $I \subset \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ est W-déterminé.*

Un argument semblable (cf. [3] *) donne :

PROPOSITION. *Tout idéal $I \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ est W-déterminé.*

Un idéal $I \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est *fermé* ssi pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$f \in I \quad \text{ssi} \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \quad T_a(f) \in T_a(I) \subset \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]],$$

où

$$T_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$$

est la « série de Taylor au point a ». (Le théorème spectral de Whitney [8]

* Je dois cette référence a G. Wraith.

affirme que I satisfait cette condition précisément quand I est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts d'une fonction et de ses dérivées.)

Tout idéal W-déterminé est clairement fermé (cf. [9], Exposé 6) et la réciproque (suggérée par A. Joyal) est aussi vraie :

PROPOSITION. *Si $I \subset C^\infty(\mathrm{R}^n)$ est un idéal, alors I est W-déterminé ssi I est fermé.*

PREUVE. Si I est fermé, les morphismes dans les algèbres de la forme $\mathrm{R}[[X_1, \dots, X_n]]/J$ séparent les points. D'autre part la proposition de Krull-Zariski montre que les morphismes de ces dernières dans les algèbres de Weil séparent les points.

Le théorème de Kojasiewicz [8] nous permet alors de conclure :

COROLLAIRE. *Si $J = (f_1, \dots, f_k) \subset C^\infty(\mathrm{R}^m)$ est engendré par des fonctions analytiques, alors J est W-déterminé.*

Dans ce qui suit, nous considèrerons la catégorie $\mathcal{F}$ des algèbres de la forme $C^\infty(\mathrm{R}^m)/J$ où J est comme dans le Corollaire. On notera que les algèbres de Weil sont de telles algèbres.

3. Pour construire le modèle, nous prenons comme (co)site de définition la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ d'anneaux C^∞ de la forme $C^\infty(M) \underset{\infty}{\otimes} X$ (où M est une variété, $X \in \mathcal{F}$ et $\underset{\infty}{\otimes}$ dénote le coproduit dans la catégorie d'anneaux C^∞) avec la topologie des recouvrements ouverts :

$$(C^\infty(M) \underset{\infty}{\otimes} X \to C^\infty(U_\alpha) \underset{\infty}{\otimes} X)$$

(co)couvre si $M = \cup U_\alpha$ et $U_\alpha \subset M$ est une sous-variété ouverte $\forall \alpha$.

On peut montrer que $C^\infty(M) \underset{\infty}{\otimes} X = C^\infty(\mathrm{R}^k)/K$, où K est W-déterminé. Soit $\mathcal{E}$ le topos de faisceaux sur $\mathcal{C}$, $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{M}_\partial$ l'inclusion de la catégorie des variétés (lisses) dans la catégorie des variétés à bord.

THEOREME 1. *Le foncteur $\mathfrak{M}_\partial \to \mathcal{E}$ défini par*

$$B \mapsto \underline{B} = \text{foncteur « représentable de l'extérieur » par } C^\infty(B)$$

est pleinement fidèle et préserve les produits de la forme $B \times M$ (où $M \in \mathfrak{M}$).

Sa restriction à $\mathfrak{M}$ définit un modèle «pleinement bien adapté» de GDS (en particulier (KL) est vérifié). L'exponentiation par le dual d'une algèbre de $\mathcal{F}$ possède un adjoint à droite. L'axiome (I) est vérifié et le morphisme canonique $R^{[0,0]} \to R^{D_\infty}$ est un monomorphisme.

On signalera seulement que la vérification de (I) se fait en démontrant d'abord le résultat suivant (de nature «synthétique»):

THEOREME 2. *Soit R un anneau qui vérifie (KL) préordonné tel que*

$(0)\ \forall x \in R_{\geq 0}\ (x \text{ inversible} \to \exists y\,(x = y^2))$, *où*

$$R_{\geq 0} = \{ x \in R \mid x \geq 0 \};$$

$(1)\ \forall f \in R^R\ \ \exists !\, g \in R^R\ \ (g' \equiv f \wedge g(0) = 0);$

$(2)\ \forall f \in R^R\ \ (x f(x) \equiv 0 \to f(x) \equiv 0);$

$(3)\ \forall f \in R^{R_{\geq 0}}\ \ (f(x^2) \equiv 0 \to f(x) \equiv 0);$

$(4)\ \forall f \in R^R\ \ (f(x) \equiv f(-x) \to \exists g \in R^R\ \ f(x) \equiv g(x^2)).$

Alors (I) est vérifié.

D'après ce théorème, il suffit de vérifier (0)-(4) dans $\mathcal{E}$. Le seul point délicat est (3) qui requiert précisément la W-détermination des idéaux définissant le site.

REFERENCES

1. E. DUBUC, Sur les modèles de la Géométrie différentielle synthétique, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XX-3 (1979), 231-279.
2. E. DUBUC, C^∞-schemes, *Preprint Series Aarhus Universitet* 1979/80, n° 3. Cf. aussi [9], Exposé 3.
3. J. EMSALEM, Géométrie des points épais, *Bull. S.M.F.* 106 (1978), 399-416.
4. A. KOCK, A simple axiomatics for differentiation, *Math. Scand.* 40 (1977), 183-193.
5. A. KOCK & G. E. REYES, *Models for synthetic integration theory*, preprint 1980.
6. A. KOCK, G. E. REYES & B. VEIT, Forms and integration in synthetic differential geometry, *Preprint Series Aarhus Universitet* 1979/80, n° 31.
7. F. W. LAWVERE, Categorical Dynamics, *Various Publication Series, Aarhus Universitet* n° 3 (1979).
8. B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*, Oxford, 1966.
9. G. E. REYES, Editeur, Géométrie Différentielle Synthétique, Fascicules 1 et 2, *Rapports de Recherches du DMS* 80-11, 80-12, Univ. de Montréal, 1980.
10. O. ZARISKI & P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, Vol. II, GTM Springer, 1975.

Département de Mathématiques
Université de Montréal
CP 6128, MONTREAL P. Q.
CANADA H3C 3J7