CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JACQUES PENON

Infinitésimaux et intuitionnisme

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, nº 1 (1981), p. 67-72

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_1_67_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Vol. XXII-1 (1981)

INFINITESIMAUX ET INTUITIONNISME

par Jacques PENON

Une des propriétés les plus étonnantes du topos de Zariski est que, si on considère l'anneau local générique R, l'objet

$$D = [\![d \in R \mid d^2 = 0]\!]$$

apparait comme un «ensemble» d'éléments infiniment petits de R. Cette particularité a été mise en évidence par Lawvere-Kock quand ils ont constaté que dans ce topos $R \times R \tilde{\to} R^D$. Mais D n'est pas le seul objet du topos qui ait cette particularité. Les objets

$$D_n = [\![d \in R \mid d^{n+1} = 0]\!]$$

sont aussi constitués d'infinitésimaux.

Mais qu'est-ce au juste qu'un infinitésimal?

Pour la Géométrie algébrique, la réponse paraît claire:

$$\text{infinitésimal} = \text{nilpotent}.$$

Mais la Géométrie différentielle, elle, va nous obliger à réviser notre jugement. En effet, depuis trois-quatre ans maintenant on a cherché à montrer que la géométrie différentielle synthétique pouvait aussi s'appliquer à la géométrie différentielle classique. C'est principalement E. Dubuc qui s'est fixé ce programme. Plus précisément, il a cherché un topos $\underline{E}$ tel que la catégorie des variétés se plonge dans $\underline{E}$ et où plus particulièrement l'image de R devienne un anneau de type-ligne (en fait il demande plus). Il a réalisé ainsi plusieurs topos de mieux en mieux «adaptés» à (l'idée qu'on se fait de) la géométrie différentielle. Or, dans certains de ces topos, Dubuc constate la présence d'infinitésimaux qui ne sont pas nilpotents. Par exemple si $\theta : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ est une fonction (usuelle) plate en zéro ne s'annulant qu'en zéro et si on considère le produit fibré suivant dans le topos

$$\begin{tikzcd} D_\theta \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "0"] \\ R \arrow[r, "\theta"] & R \end{tikzcd}$$

on s'aperçoit que

$$\{0\} \subsetneqq D \subsetneqq \cdots \subsetneqq D_n \subsetneqq \cdots \subsetneqq D_\theta$$

et pourtant

$$Hom(1, D_\theta) = \{0\}.$$

Ainsi donc il existe des infinitésimaux non-nilpotents. E. Dubuc se demande alors s'il est possible de définir ce qu'est un infiniment petit à l'aide du langage de la théorie des topos. Le but de cet article est de tenter d'apporter une réponse à cette question.

Il semble que, si infiniment petits il y a, ceux-ci n'aient rien à voir avec la structure algébrique de l'anneau R, mais qu'ils dépendent de la structure du topos lui-même dans son ensemble. D'une certaine façon un infiniment petit x est un élément qu'on *ne peut pas distinguer* de zéro. C'est pourquoi la formule

$$\neg\neg\,(x = 0)$$

semble convenable pour définir les infinitésimaux. Il reste donc à tester cette formule dans les topos de la géométrie différentielle synthétique, or:

1° Si on considère le topos de Zariski, ou le topos étale, alors

PROPOSITION (Kock).

$$\neg\neg\{0\} = [\![\, x \in R \mid \neg\neg(x = 0)\,]\!] = D_\infty$$

où $D_\infty = \bigcup_n Dn$.

Dans ce cas on retrouve bien l'identité infinitésimal = nilpotent, mentionnée plus haut.

2° Considérons maintenant le topos suivant (suggéré par E. Dubuc) $E = \widetilde{B^{op}}$, où

a) B est la catégorie des anneaux C^∞ de la forme $C^\infty(R^n)/I$ où I est un idéal de caractère local, c'est-à-dire

$$f \in I \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{R}^n \; (f|x \in I|x)$$

$$\text{pour tout } f \in C^{\infty}(\mathrm{R}^n) = C^{\infty}(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}),$$

en notant $f|x$ le germe de la fonction f au point $x \in \mathrm{R}^n$ et $I|x$ l'idéal engendré par les germes en x des fonctions de I dans l'anneau $C_x^{\infty}(\mathrm{R}^n)$ des germes en x des fonctions lisses $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$.

b) La topologie de Grothendieck dont B^{op} est muni est la topologie des recouvrements ouverts (i.e. la topologie engendrée par les familles

$$(C^{\infty}(U) \to C^{\infty}(U_i))_{i \in I}, \text{ où } \bigcup_{i \in I} U_i = U).$$

PROPOSITION. *Dans le topos* F,

$$\neg\neg\{0\} = \overline{C_0^{\infty}(\mathrm{R})},$$

où $\overline{(.)}$ *désigne le préfaisceau représentable associé à* $(.)$.

COROLLAIRE 1.

$$Hom(1, \neg\neg\{0\}) = \{0\}.$$

COROLLAIRE 2.

$$\{0\} \subsetneqq D \subsetneqq \cdots \subsetneqq D_n \subsetneqq \cdots \subsetneqq D_\theta \subsetneqq \cdots \subsetneqq \neg\neg\{0\}.$$

COROLLAIRE 3.

$$Hom(\neg\neg\{0\}, R) = C_0^{\infty}(\mathrm{R})$$

(c'est-à-dire qu'il faut penser un germe de $C_0^{\infty}(\mathrm{R})$ comme une vraie flèche $\neg\neg\{0\} \to R$).

Ainsi donc l'écriture

$$\neg\neg\{0\} = \{\text{ Infinitésimaux }\}$$

est justifiée.

Ceci va nous permettre de voir la géométrie différentielle synthétique sous un autre jour. En effet, si X est un objet quelconque d'un topos $\underline{E}$ et $a : 1 \to X$ une section globale, on sait exprimer maintenant ce qu'est *le voisinage infinitésimal de* a :

$$\neg\neg\{a\} = [\![x \in X \mid \neg\neg(x = a)]\!].$$

C'est pourquoi un certain nombre de concepts qui étaient difficiles à décrire avant vont pouvoir s'exprimer de façon évidente :

1° Qu'est-ce qu'une variété de dimension n ? c'est (intuitivement) un objet X tel que

$$\forall x \in X, \quad \neg\neg\{x\} \approx \neg\neg\{0\}^n ;$$

traduit dans le langage des topos cela signifie exactement que les flèches

$$\# X \xrightarrow{proj_1} X \quad \text{et} \quad X \times \neg\neg\{0\}^n \xrightarrow{proj_1} X$$

sont *localement isomorphes dans* $\underline{E}/X$, où

$$\# X \rightarrowtail X \times X = \neg\neg(X \rightarrowtail X \times X)$$

et où «localement» signifie qu'il existe un épimorphisme $q: Y \to X$ tel que

$$q^*(\# X \to X) \approx q^*(X \times \neg\neg\{0\}^n \to X)$$

dans $\underline{E}/Y$. Signalons que dans le cas général *) ce concept de variété est sensiblement plus fort que celui de Kock-Reyes. Là encore il reste à le tester sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique. On montre que :

PROPOSITION . *Si M est une variété usuelle, de dimension n, alors M, plongée dans* E, *est une variété de dimension n au sens interne.*

2° Qu'est-ce qu'une fléche étale $f: X \to Y$? c'est (intuitivement) une fléche telle que

$$\forall x \in X, \quad \neg\neg\{x\} \to \neg\neg\{fx\} \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Traduit dans le langage des topos cela signifie que le carré ci-dessous est un produit fibré

$$\begin{tikzcd} \# X \arrow[r] \arrow[d] & \# Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Encore une fois, si on teste sur le modèle E défini précédemment, on a :

PROPOSITION. *Une application lisse entre variété lisses est étale au sens usuel si et seulement si elle est étale dans le topos.*

*) Si l'anneau R vérifie les trois premières conditions de la dernière proposition.

Signalons, là aussi, que cette notion de fléche étale est plus forte que celle introduite par Kock-Reyes *).

3° Maintenant qu'on sait dire ce qu'est un germe, il va donc être possible de formuler le théorème d'inversion locale. Il prend la forme suivante : Le carré

$$\begin{array}{ccc} \underline{Iso}_0(\Delta^n, \Delta^n) & \longrightarrow & \underline{Iso}_0(D(n), D(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Hom}_0(\Delta^n, \Delta^n) & \longrightarrow & \underline{Hom}_0(D(n), D(n)) \end{array}$$

est un produit fibré dans E , où

$$\Delta = \neg\neg\{0\}, \quad D(n) = [\![(d_1, \dots, d_n) \in R^n \mid d_i d_j = 0 \ \forall i \ \forall j]\!]$$

et

$$\underline{Hom}_0(\Delta^n, \Delta^n) = [\![f : \Delta^n \to \Delta^n \mid f0 = 0]\!]$$

Une fois encore on montre que :

PROPOSITION. *Dans le topos* E *le théorème d'inversion locale est vrai.*

Enfin signalons le rapprochement suivant entre les deux concepts de morphismes étales :

PROPOSITION. *Soit un topos $\underline{E}$ muni d'un objet anneau R tel que :*

1° R est de type-ligne,

2° R est micro-linéaire,

3° R est un corps de fractions (i. e.

$$(\neg(x = 0) \Rightarrow x \text{ inversible}) \text{ et } \neg(0 = 1)),$$

4° R vérifie le théorème d'inversion locale ;

alors si X et Y sont des variétés de dimension n, une flèche $X \to Y$ est étale si et seulement si le carré suivant est un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X^D & \longrightarrow & Y^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

*) Cf. note page précédente.

J. PENON 6

U. E. R. de Mathématiques
Université Paris VII, Tours 45-55
2 Place Jussieu
75005 PARIS