DANIEL TANRE

Dualité d'Eckmann-Hilton à travers les modèles de Chen-Quillen-Sullivan

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, nº 1 (1981), p. 53-60

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_1_53_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Vol. XXII-1 (1981)

DUALITE D'ECKMANN-HILTON A TRAVERS LES MODELES DE CHEN-QUILLEN-SULLIVAN

par Daniel TANRE)*

RESUME.

La connexion homologique formelle de Chen est reliée aux modèles d'Adams-Hilton, de Quillen, de Sullivan, à travers les foncteurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ de Quillen. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un espace est exprimée à partir de la suite spectrale de Curtis, obtenue en filtrant le modèle de Quillen par la suite centrale descendante. Dualement, la suite spectrale de Quillen est déduite de la suite spectrale obtenue en filtrant le modèle de Sullivan par la longueurs des mots.

I. RAPPELS ET NOTATIONS.

Les espaces topologiques considérés sont supposés simplement connexes, de type fini, localisés en zéro. Tous les espaces vectoriels gradués envisagés sont de dimension finie en chaque degré, sur un corps k de caractéristique zéro, à graduation positive.

Soit V un espace vectoriel gradué sur un corps k de caractéristique zéro, avec $V_0 = 0$; on note :

$\mathrm{L}(V)$ l'algèbre de Lie libre engendrée par V,

$T(V)$ l'algèbre graduée associative libre engendrée par V,

ΛV l'algèbre graduée commutative libre engendrée par V,

$\# V$ l'espace vectoriel dual,

$s V$ l'espace vectoriel suspension de V: $(sV)_n = V_{n-1}$.

Si v est un élément homogène de V, $|v|$ désigne son degré et $\bar{v}$ l'expression $(-1)^{|v|} v$.

*) E. R. A.-C. N. R. S. n° 07590.

Définissons maintenant les éléments du diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
HDGC \arrow[rr, leftrightarrow, "\#"] \arrow[d, shift right, "\mathcal{G}"'] & & HDGCO \arrow[d, shift right, "\mathcal{P}"'] & \\
ADGC \arrow[r, leftrightarrow, "\#"] \arrow[u, shift right, "B"'] & CDGCO \arrow[r, shift left, "\mathcal{L}"] & LDG \arrow[l, shift left, "\mathcal{C}"] \arrow[u, shift right, "\mathcal{U}"'] & ADG \\
& Top_1 \arrow[ul, dashed, "A_{PL}"] \arrow[ur, dashed, "\lambda"'] \arrow[urr, dashed, "C_*(\Omega -)"'] \arrow[uul, dashed, bend left=60, "f"] & &
\end{tikzcd}$$

Top_1 est la catégorie des espaces topologiques 1-connexes de type fini ; les foncteurs de source Top_1 , ne donnant généralement pas des éléments algébriques de type fini, sont indiqués en pointillés ;

λ est le foncteur construit par Quillen [DQ], A_{PL} le foncteur formes de Sullivan [DS], f le complexe des intégrales itérées [KTC] , $C_*(\Omega -)$ le complexe des chaînes singulières de l'espace des lacets.

Les catégories utilisées ont pour classe d'objets :

ADGC, les algèbres différentielles graduées commutatives 1-connexes, avec différentielle homogène de degré $+1$;

LDG, les algèbres de Lie différentielles graduées connexes, avec différentielle homogène de degré -1 ;

CDGCO, les coalgèbres différentielles graduées cocommutatives, avec différentielle homogène de degré -1 ;

HDGC, les algèbres de Hopf différentielles graduées commutatives, avec différentielle homogène de degré $+1$;

HDGCO, les algèbres de Hopf différentielles graduées cocommutatives, avec différentielle homogène de degré -1 ;

ADG, les algèbres différentielles graduées avec différentielle homogène de degré -1.

est un foncteur de dualisation. Le lecteur se reportera au texte indiqué pour la définition de :

la cobar construction F , [JFA] ; l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}$, [DQ] ; le foncteur primitif $\mathcal{P}$, [DQ] ; la bar construction B, [H-S]. Les foncteurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$ sont construits par Quillen [DQ] ; $\mathcal{G}$ est le composé $\# \mathcal{C} \mathcal{P} \#$.

Pour toute ADGC (A, d_A), Sullivan [DS] construit une ADGC (appelée minimale) libre, à différentielle décomposable $(\Lambda V, d)$ et un quasi-isomorphisme ρ de $(\Lambda V, d)$ vers (A, d_A). Le couple $((\Lambda V, d), \rho)$ sera appelé *modèle de Sullivan de* (A, d_A). Le modèle de Sullivan d'un espace X est le modèle associé à $A_{PL}(X)$; il sera noté $Su(X)$.

Baues et Lemaire [B-L] définissent également une notion d'algèbre minimale dans *LDG* et *ADG* ; nous les appellerons *modèle de Quillen d'une algèbre de Lie différentielle* et *modèle d'Adams-Hilton d'une algèbre différentielle*. Par extension, si (A, d_A) est une ADGC à modèle de Sullivan $(\Lambda V, d)$ 1-connexe de type fini, le modèle de Quillen de (A, d_A) est le modèle de Quillen de $\mathfrak{L}\#(\Lambda V, d)$. Le modèle de Quillen d'un espace X est l'algèbre minimale associée à $\lambda(X)$; elle coïncide avec celle associée à $\mathfrak{L}\# Su(X)$, d'après un résultat de J.M. Lemaire [JML]. Enfin, Adams et Hilton [A-H] ont construit à partir d'un espace 1-connexe X, une ADG libre dont l'algèbre d'homologie est l'algèbre de Pontryagin de l'espace des lacets ΩX ; appelons modèle d'Adams-Hilton de X le modèle minimal de cette algèbre tensorisée par k. Les générateurs, augmentés d'un degré, correspondent aux cellules et la différentielle est donnée par les applications d'attachement. Baues et Lemaire [B-L] ont montré que l'algèbre enveloppante du modèle de Quillen de X est le modèle d'Adams-Hilton [B-L] ; ce résultat permet d'obtenir des interprétations cellulaires de divers modèles algébriques.

II. MODELE DE QUILLEN ET CONNEXION DE CHEN.

Le modèle de Quillen d'un wedge de sphères 1-connexes, $\bigvee_i S^{n_i}$, d'homologie H, est $(\mathrm{L}(s^{-1}H), 0)$. L'algèbre $\#\mathcal{C}(\mathrm{L}(s^{-1}H), 0)$ est libre à différentielle décomposable; c'est le modèle de Sullivan de $\bigvee_i S^{n_i}$. Elle est canoniquement munie d'une graduation correspondant à la suite centrale descendante de l'algèbre de Lie libre (on vérifie d'ailleurs aisément qu'elle coïncide avec celle du modèle bigradué d'Halperin-Stasheff [H-S]); nous appellerons *filtration-colonne* la filtration qui s'en déduit.

Nous commençons par établir un théorème d'unicité pour les modèles libres à différentielle linéaire + quadratique, qui nous permettra de relier les modèles algébriques de Quillen et de Chen :

THEOREME 1. *Soit* (A, d_A) *une ADGC admettant un modèle de Sullivan 1-connexe de type fini. Soit* $(\Lambda Z, d_1 + d_2)$ *une algèbre libre sur l'espace vectoriel* Z, *munie d'une différentielle* $D = d_1 + d_2$, *où* d_1 *est linéaire et* d_2 *quadratique. Soit* $\rho : (\Lambda Z, D) \to (A, d_A)$ *un homomorphisme d'ADGC vérifiant:*

(i) $\rho' : (\Lambda Z, d_2) \to (H(A, d_A), 0)$ *est le modèle minimal du wedge de sphères d'homologie* $H(A, d_A)$, *où* $\rho'(z)$ *est la classe de* $\rho(z)$ *si* z *est un* d_2*-cocycle et* ρ' *est nulle ailleurs.*

(ii) d_1 *baisse la filtration-colonne de* $(\Lambda Z, d_2)$ *d'au moins une unité. Alors* $(\Lambda Z, d_1 + d_2)$ *est l'algèbre des cochaînes sur le modèle de Quillen de* (A, d_A).

Introduisons maintenant la connexion homologique formelle (c.h.f.) de Chen.

Soit M une variété C^∞, simplement connexe, paracompacte. Pour la fin de ce paragraphe, le corps de référence est le corps R des réels.

On choisit une base $(\hat{z}_i)_{i \in I}$ de l'espace vectoriel d'homologie $H_*(M; \mathrm{R})$ et on note $T(V)$ l'algèbre graduée associative libre engendrée par la famille $(X_i)_{i \in I}$, où le degré de X_i est celui de $\hat{z}_i$ baissé d'une unité. Soit $(A_{DR}(M), d)$ l'algèbre de de Rham de M munie de la différentielle extérieure d ; on note par $A_{DR}(M)[V]$ le produit tensoriel sur R, $A_{DR}(M) \otimes T(V)$. Si $w = \Sigma w_{i_1 \ldots i_s} X_{i_1} \ldots X_{i_s}$ appartient à $A_{DR}(M)\,[V]$, Jw désigne l'expression $\Sigma \overline{w}_{i_1 \ldots i_s} X_{i_1} \ldots X_{i_s}$; la différentielle extérieure de w est définie par:

$$dw = \Sigma\, dw_{i_1 \ldots i_s} X_{i_1} \ldots X_{i_s} .$$

Rappelons qu'une dérivation de $T(V)$ (resp. $\mathrm{L}(V)$) est un endomorphisme linéaire ∂, de degré -1, tel que :

$$\partial(uv) = (\partial u)v + \overline{u}(\partial v) \quad (\text{resp. } \partial[u, v] = [\partial u, v] + [\overline{u}, \partial v]).$$

Une dérivation ∂ de $T(V)$ s'étend à $A_{DR}(M)[V]$ par:

$$\partial w = \Sigma w_{i_1 \dots i_s} \partial(X_{i_1} \dots X_{i_s}).$$

DEFINITION [KTC]. Une *connexion homologique formelle* (c.h.f.) sur M est une paire (w, ∂) formée:

1° d'un élément

$$w = \Sigma w_i X_i + \Sigma w_{ij} X_i X_j + \dots$$

de $A_{DR}(M)[V]$ vérifiant:

1-a. w_i est une forme fermée;

1-b. les classes $([w_i])_{i \in I}$ définissent une base duale de $(\hat{z}_i)_{i \in I}$;

1-c. si p_i est le degré de w_i, on a:

$$|w_{i_1 \dots i_r}| = 1 + \sum_{j=1}^{r} (p_{i_j} - 1);$$

2° d'une dérivation ∂ de $T(V)$ vérifiant:

$$\partial w + dw - Jw \wedge w = 0.$$

Nous nous placerons ici dans un cas particulier de cette situation.

DEFINITION. Une *connexion homologique formelle de Lie sur* M est une paire (w, ∂) telle que:

1° w appartient à $A_{DR}(M) \otimes \mathrm{L}(V)$ et, considéré comme élément de $A_{DR}(M)[V]$, w vérifie les conditions 1-a, 1-b, 1-c ci-dessus;

2° ∂ est une dérivation de $\mathrm{L}(V)$ telle que:

$$\partial w + dw - \frac{1}{2}[Jw, w] = 0.$$

REMARQUE. Cette restriction ne nuit pas à la généralité, car la c.h.f. construite par Chen dans le cadre d'une décomposition de $A_{DR}(M)$, analogue à la décomposition de Hodge, est une c.h.f. de Lie.

Si (w, ∂) est une c.h.f., Chen montre que ∂ est une différentielle ($\partial^2 = 0$); nous retrouvons ce résultat en remarquant que, dans le Théorème 1, l'hypothèse $d_1^2 = 0$ est redondante.

Soit $(X_I)_{I \in K}$ une base d'espace vectoriel de l'algèbre de Lie $\mathrm{L}(V)$; une c.h.f. de Lie sera notée $w = \sum_I w_I X_I$.

THEOREME 2. *Si (w,∂) est une c. h. f. de Lie, alors :*

1° la dérivation ∂ est une différentielle ;

2° l'homomorphisme d'algèbres $\phi : \Lambda s \# \mathrm{L}(V) \to A_{DR}(M)$ défini par:

$$\phi(l) = \sum_I w_I < l,\ sX_I >, \quad si \quad l \in s\#\mathrm{L}(V),$$

est un homomorphisme d'ADGC de $\#\mathcal{C}(\mathrm{L}(V),\partial)$ dans $(A_{DR}(M),d)$ induisant un isomorphisme en cohomologie.

COROLLAIRE. *Si (w,∂) est une c. h. f. de Lie, $(\mathrm{L}(V),\partial)$ est le* R*-modèle de Quillen de M et $(T(V),\partial)$ le* R*-modèle d'Adams-Hilton.*

REMARQUE. Le transport d'une c.h.f. s'interprète également dans ce cadre. Si

$$a :\ \#(T(V),\partial) \to B\mathcal{G}(\#(T(V),\partial))$$

est le morphisme définissant le couple de foncteurs adjoints $(B,\mathcal{G})$, le transport d'une c.h.f. de Lie est le composé :

$$\#(T(V),\partial) \xrightarrow{a} B\mathcal{G}(\#(T(V),\partial)) \xrightarrow{B(\phi)} B(A_{DR}(M),d).$$

III. SUITES SPECTRALES D'EILENBERG-MOORE ET DE QUILLEN.

Soit (A, d_A) une ADGC 1-connexe, de type fini ; la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (ssEM) de (A, d_A) est, par définition, celle obtenue en filtrant $B(A, d_A)$ par la longueur des barres.

THEOREME 3. *L'image par $\#\mathfrak{U}$ de la suite spectrale d'algèbres de Lie, obtenue en filtrant le modèle de Quillen de (A, d_A) par la longueur des crochets est isomorphe à la ssEM de (A, d_A).*

En suivant Allday [CA], nous appellerons suite spectrale de Quillen la suite spectrale de coalgèbres obtenue avec la filtration des primitifs sur l'image par $\mathcal{C}$ du modèle de Quillen.

THEOREME 4. *L'image par le foncteur $\#$ de CDGCO dans ADGC de la suite spectrale de Quillen est isomorphe à la suite spectrale d'algèbres obtenue en filtrant le modèle de Sullivan par la longueur des mots.*

La dualité entre les modèles de Sullivan et de Quillen apparaît naturellement à travers ces deux résultats. Les produits de Massey d'ordre supérieur apparaissent comme des différentielles dans la ssEM; ils déterminent, dans une certaine mesure, la différentielle du modèle de Quillen. De même, les produits de Whitehead d'ordre supérieur déterminent la différentielle du modèle de Sullivan.

Les produits de Whitehead (resp. Massey) d'ordre supérieur peuvent s'exprimer à l'aide d'un produit universel ; la nature de ce dernier renforce cette dualité : le produit de Whitehead universel (structure d'ordre supérieur de l'homotopie) est déterminé par un espace formel (i.e. dont le type d'homotopie est entièrement caractérisé par l'algèbre de cohomologie), en l'occurence le fat wedge ; le produit de Massey universel (structure d'ordre supérieur de la cohomologie) est déterminé par un espace coformel (i.e. dont le type d'homotopie est entièrement caractérisé par l'algèbre de Lie d'homotopie).

Les démonstrations et développements de ces divers points feront l'objet d'une publication ultérieure.

JFA. J.F. ADAMS, On the Cobar construction, *Proc. N. A. S.* 42 (1956), 409- 412.

A-H. J.F. ADAMS & P. HILTON, On the chain algebra of a loop space, *Comment. Math. Helv.* 20 (1955), 305- 330.

C A. C. ALLDAY, Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen, II, *Houston J. Math.* 3 (1977), 301- 308.

B - L. H.J. BAUES & J.M. LEMAIRE, Minimal models in homotopy theory, *Math. Ann.* 225 (1977), 219- 242.

KTC. K.T. CHEN, Iterated path integrals, *Bull. A.M. S.* 83 (1977).

H-S. S. HALPERIN & J. STASHEFF, Obstructions to homotopy equivalences, *Advances in Math.* 32 (1979), 233- 279.

JML. J.M. LEMAIRE, *Modèle de Quillen*, Exposé, Louvain, 1979.

DQ. D. QUILLEN, Rational homotopy theory, *Ann. of Math.* 90 (1969).

DS. D. SULLIVAN, Infinitesimal computations in Topology, *Publ. I. H. E. S.* 47 (1977).

DT. D. TANRE, Connexion homologique de Chen et modèle de Quillen, *C. R. A. S. Paris*, 290(1980).

U. E. R. de Mathématiques
Université Lille 1, B.P. 36
59650 VILLENEUVE D'ASCQ