

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

FRANÇOISE BERQUIER

Sur la notion d'application différentiable

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, n° 3 (1973), p. 329-338

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_3_329_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA NOTION D'APPLICATION DIFFERENTIABLE

par Françoise BERQUIER

Différentes notions de différentiabilité en un point ont été examinées dans les espaces vectoriels topologiques [1,2,3,4]. Elles sont ici généralisées au cas quasi-topologique et regroupées selon deux schémas; on étudie ensuite le lien qui existe entre ces diverses notions. Enfin, certains résultats de [3] sur la stricte différentiabilité sont étendus aux espaces quasi-topologiques. La terminologie et les notations sont celles de [6].

1. Définitions.

Soient E et E' des espaces vectoriels, et r une application de E dans E' . Pour tout réel t , nous désignerons par r_t l'application de E dans E' telle que

$$r_t(b) = r(th)/t \quad \text{si} \quad t \neq 0, \quad r_0(b) = 0.$$

Etant donnée une quasi-topologie τ sur l'ensemble $\mathcal{F}(E', E)$ de toutes les applications de E dans E' , nous dirons que r est τ -petite au sens de Lamadrid (en abrégé (L, τ) -petite) si l'application r_t tend vers 0 dans $(\mathcal{F}(E', E), \tau)$ lorsque t tend vers 0.

Etant données des quasi-topologies ρ sur E et τ sur l'ensemble $\mathcal{H}(E', E)$ des applications homogènes de E dans E' , nous dirons que r est (ρ, τ) -petite au sens de Michal (en abrégé (M, ρ, τ) -petite) s'il existe une application μ de E dans $\mathcal{H}(E', E)$, quasi-continue à l'origine, de ρ vers τ et telle que

- 1° $\mu(0) = 0,$
- 2° $\mu(b).b = r(b) \quad \text{pour tout} \quad b \in E.$

Soit maintenant $\mathcal{S}$ un ensemble de filtres sur E et (E', ρ') un espace vectoriel quasi-topologique. L'ensemble $\mathcal{F}(E', E)$ sera successivement muni des quasi-topologies $\tau(\rho', \mathcal{S})$, $\tau^*(\rho', \mathcal{S})$, $\tau^K(\rho', \mathcal{S})$, $\hat{\tau}(\rho', \mathcal{S})$ définies par

$$\begin{aligned}\phi \tau(\rho', \mathcal{S}) 0 &\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{S}, \quad \phi(F) \rho' 0, \\ \phi \tau^*(\rho', \mathcal{S}) 0 &\Leftrightarrow \exists \psi \tau(\rho', \mathcal{S}) 0 \mid \phi \supset \psi = \mathbf{V} \psi, \\ \phi \tau^K(\rho', \mathcal{S}) 0 &\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{S}, \quad \exists \xi \in F \mid \phi(\xi) \rho' 0, \\ \phi \hat{\tau}(\rho', \mathcal{S}) 0 &\Leftrightarrow \exists \psi \rho' 0 \mid \forall F \in \mathcal{S}, \quad \phi(F) \supset \psi,\end{aligned}$$

où $\mathbf{V}$ désigne le filtre des voisinages de 0 dans la droite réelle $\mathbf{R}$.

Il est clair que $\tau^*(\rho', \mathcal{S})$, $\tau^K(\rho', \mathcal{S})$ et $\hat{\tau}(\rho', \mathcal{S})$ sont plus fines que $\tau(\rho', \mathcal{S})$. L'ensemble $\mathcal{H}(E', E)$ sera muni de la quasi-topologie induite par celle de $\mathcal{F}(E', E)$, qui sera notée par le même symbole.

(E, π) et (E', π') désignent toujours des espaces vectoriels quasi-topologiques et I une quasi-bornologie [6] sur E compatible avec π (i.e. un idéal de filtres bornés pour π) telle que (E, I) soit un espace vectoriel quasi-bornologique. π^* est la quasi-topologie équable associée à π et π_I la quasi-topologie la plus fine compatible avec I (voir [6]).

DEFINITION 1. Une application f de E dans E' sera dite X -différentiable (resp. X' -différentiable) en un point x_0 de E s'il existe une application linéaire continue $f'(x_0)$ de (E, π) dans (E', π') telle que l'application r de E dans E' définie par

$$r(b) = f(x_0 + b) - f(x_0) - f'(x_0).b$$

soit (L, τ) -petite (resp. (M, π^*, τ) -petite). Le lien entre X et τ est indiqué dans le tableau 1 (pour X' on ajoute un « prime » à côté des symboles).

Dans ce tableau, $\check{\mathcal{S}}(\pi)$ est la quasi-bornologie des filtres bornés pour π , tandis que $q(\pi)$, $\check{\mathcal{B}}(\pi)$ et $\check{\mathcal{C}}(\pi)$ sont les quasi-bornologies engendrées respectivement par les filtres quasi-convergentes, strictement bornés et compacts pour π ; enfin, π'^b sera la quasi-topologie d'espace quasi-normé sur E' , associée à $\check{\mathcal{B}}(\pi)$.

Tableau 1 (*)

τ	$\tau(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi))$	$\tau(\pi', q(\pi))$	$\tau(\pi', \check{\mathfrak{B}}(\pi))$
X	FB	MB	$\mathfrak{B}$
τ	$\tau(\pi'^b, \check{\mathfrak{S}}(\pi^b))$	$\tau^\#(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi))$	$\tau^K(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi))$
X	$\mathcal{S}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$	HL	KE
τ	$\tau^K(\pi'^b, \check{\mathfrak{S}}(\pi))$	$\hat{\tau}(\pi'^b, \check{\mathfrak{S}}(\pi))$	$\hat{\tau}(\pi'^b, \check{\mathfrak{B}}(\pi))$
X	$C\mathfrak{B}$	$FB\mathfrak{B}$	$C\mathfrak{B}\mathfrak{B}$
τ	$\hat{\tau}(\pi'^b, q(\pi))$	$\hat{\tau}(\pi'^b, \check{\mathfrak{B}}(\pi) + q(\pi))$	
X	$MB\mathfrak{B}$	$\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$	

2. Lien avec les définitions classiques.

Le théorème suivant montre que, dans le cas où (E, π) et (E', π') sont des espaces vectoriels topologiques, une application est X -différentiable (resp. X' -différentiable) en $x_0 \in E$ si et seulement si elle est X -différentiable (resp. X' -différentiable) au sens de la théorie classique, développée dans [1,2,3,4,5,6].

Nous prendrons (E, π) , (E', π') et I comme précédemment, et r sera une application de E dans E' telle que $r(0) = 0$.

THEOREME 1. 1° r est $(M, \pi^\#, \tau^K(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$ -petite si et seulement si

$$(\forall \mathfrak{X} \pi^\# 0)(\exists U \in \mathfrak{X})(\exists \psi \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists U' \in \mathfrak{X})$$

$$\mid (b \in U, t \neq 0, tb \in U') \implies r_t(b) \in \eta.$$

2° r est $(L, \tau^K(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$ -petite si et seulement si

$$(\forall \mathfrak{X} \pi 0)(\exists U \in \mathfrak{X})(\exists \psi \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists \delta > 0)$$

$$\mid (0 < |t| \leq \delta, b \in U) \implies r_t(b) \in \eta.$$

Si de plus (E', π') est équilibré, alors:

3° r est $(M, \pi^\#, \tau(\pi', I))$ -petite si et seulement si

- $(\forall \mathcal{X} \pi^{\#} 0)(\forall F \in I)(\exists \psi \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists U \in \mathcal{X})(\exists \xi \in F)$
 $\quad \mid \quad (b \in \xi, \quad t \neq 0, \quad tb \in U) \Rightarrow r_t(b) \in \eta.$
- 4° r est $(M, \pi^{\#}, \tau^{\#}(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$ -petite si et seulement si
 $(\forall \mathcal{X} \pi^{\#} 0)(\exists \psi \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists U \in \mathcal{X})(\forall \varepsilon > 0)(\exists U' \in \mathcal{X})$
 $\quad \mid \quad (b \in U, \quad t \neq 0, \quad tb \in U') \Rightarrow r_t(b) \in \varepsilon \eta.$
- 5° r est $(M, \pi^{\#}, \hat{\tau}(\pi', I))$ -petite si et seulement si
 $(\forall \mathcal{X} \pi^{\#} 0)(\exists \psi \pi' 0)(\forall F \in I)(\forall \eta \in \psi)(\exists \xi \in F)(\exists U \in \mathcal{X})$
 $\quad \mid \quad (b \in \xi, \quad t \neq 0, \quad tb \in U) \Rightarrow r_t(b) \in \eta.$
- 6° r est $(L, \tau^{\#}(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$ -petite si et seulement si
 $(\forall \mathcal{X} \pi 0)(\exists \psi \pi' 0)(\forall \eta \in \psi)(\exists U \in \mathcal{X})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$
 $\quad \mid \quad (|t| \leq \delta, \quad b \in U) \Rightarrow r_t(b) \in \varepsilon \eta.$

3. Relations entre les diverses notions de différentiabilité.

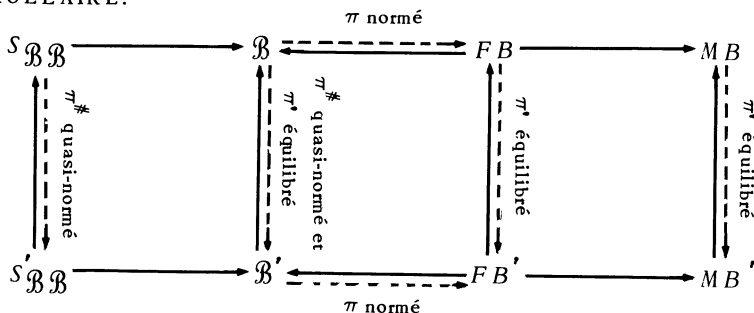
Nous noterons $X \rightarrow Y$ pour signifier que toute application X -différentiable est Y -différentiable, et l'écriture $X \xrightarrow{(C)} Y$ signifiera que la condition (C) est suffisante pour que $X \rightarrow Y$.

Reprenons les hypothèses du paragraphe 2.

THEOREME 2. a) Si r est $(M, \pi_I, \tau(\pi', I))$ -petite, alors r est $(L, \tau(\pi', I))$ -petite.

b) Si (E', π') est équilibré, et si r est $(L, \tau(\pi', I))$ -petite, alors r est $(M, \pi_I, \tau(\pi', I))$ -petite.

COROLLAIRE.

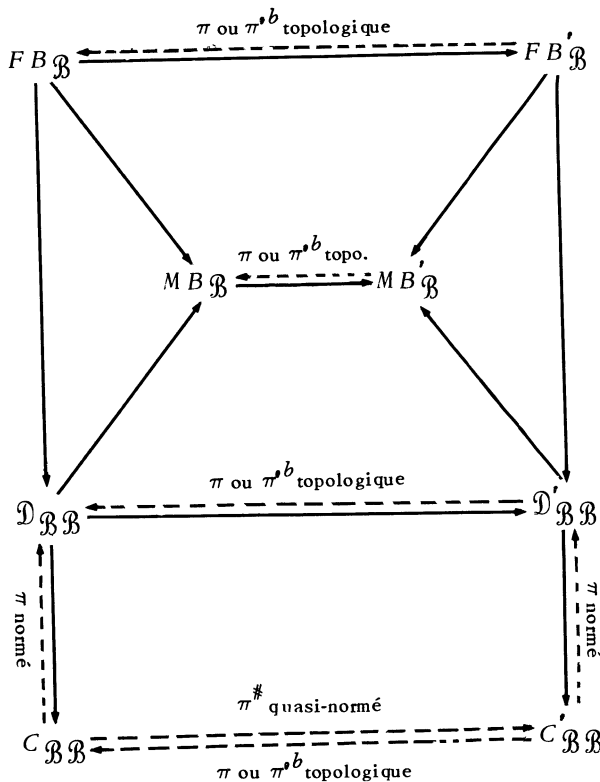


THEOREME 3. a) Si (E', π') est équilibré, et si r est $(L, \hat{\tau}(\pi', I))$ -petite, alors r est $(M, \pi_1, \hat{\tau}(\pi', I))$ -petite.

b) Si (E, π) est topologique, et si r est $(M, \pi^*, \hat{\tau}(\pi', I))$ -petite, alors r est $(L, \hat{\tau}(\pi', I))$ -petite.

c) Si (E', π') est topologique, et si r est $(M, \pi_1, \hat{\tau}(\pi', I))$ -petite, alors r est $(L, \hat{\tau}(\pi', I))$ -petite.

COROLLAIRE.

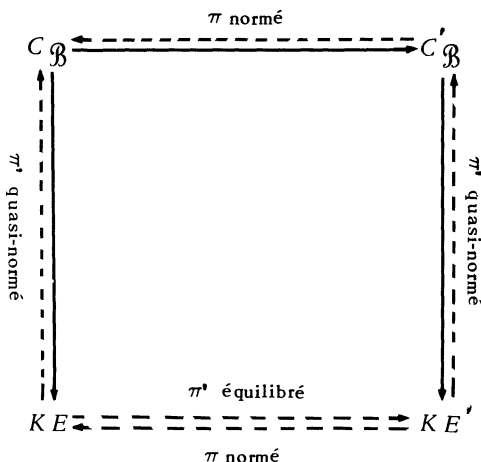


Nous obtenons enfin les trois théorèmes suivants et leur corollaire:

THEOREME 4. a) Si (E', π') est équilibré, et si r est $(L, \tau^K(\pi', I))$ -petite, alors r est $(M, \pi_1, \tau^K(\pi', I))$ -petite.

b) Si (E, π) est normé et si r est $(M, \pi^*, \tau^K(\pi', \check{S}(\pi)))$ -petite, alors r est $(L, \tau^K(\pi', \check{S}(\pi)))$ -petite.

COROLLAIRE.



THEOREME 5. a) Si (E', π') est équilibré, et si r est $(L, \tau^*(\pi', I))$ -petite, alors r est $(M, \pi_I, \tau^*(\pi', I))$ -petite.

b) Si (E, π) est normé et si r est $(M, \pi^*, \tau^*(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$ -petite, alors r est $(L, \tau^*(\pi', \check{\mathfrak{S}}(\pi)))$ -petite.

COROLLAIRE. $HL \xleftarrow[\pi \text{ normé}]{\pi^* \text{ équilibré}} HL'$.

Quelques autres implications:

THEOREME 6. a) On a $C\mathfrak{B} \rightarrow S\mathfrak{B}$ et $C'\mathfrak{B} \rightarrow S'\mathfrak{B}$.

b) Si (E', π') est équable, alors $KE \rightarrow HL$ et $KE' \rightarrow HL'$.

c) Si (E, π) est topologique, alors $C'\mathfrak{B} \rightarrow FB'\mathfrak{B}$ et $C\mathfrak{B} \rightarrow FB\mathfrak{B}$.

REMARQUES.

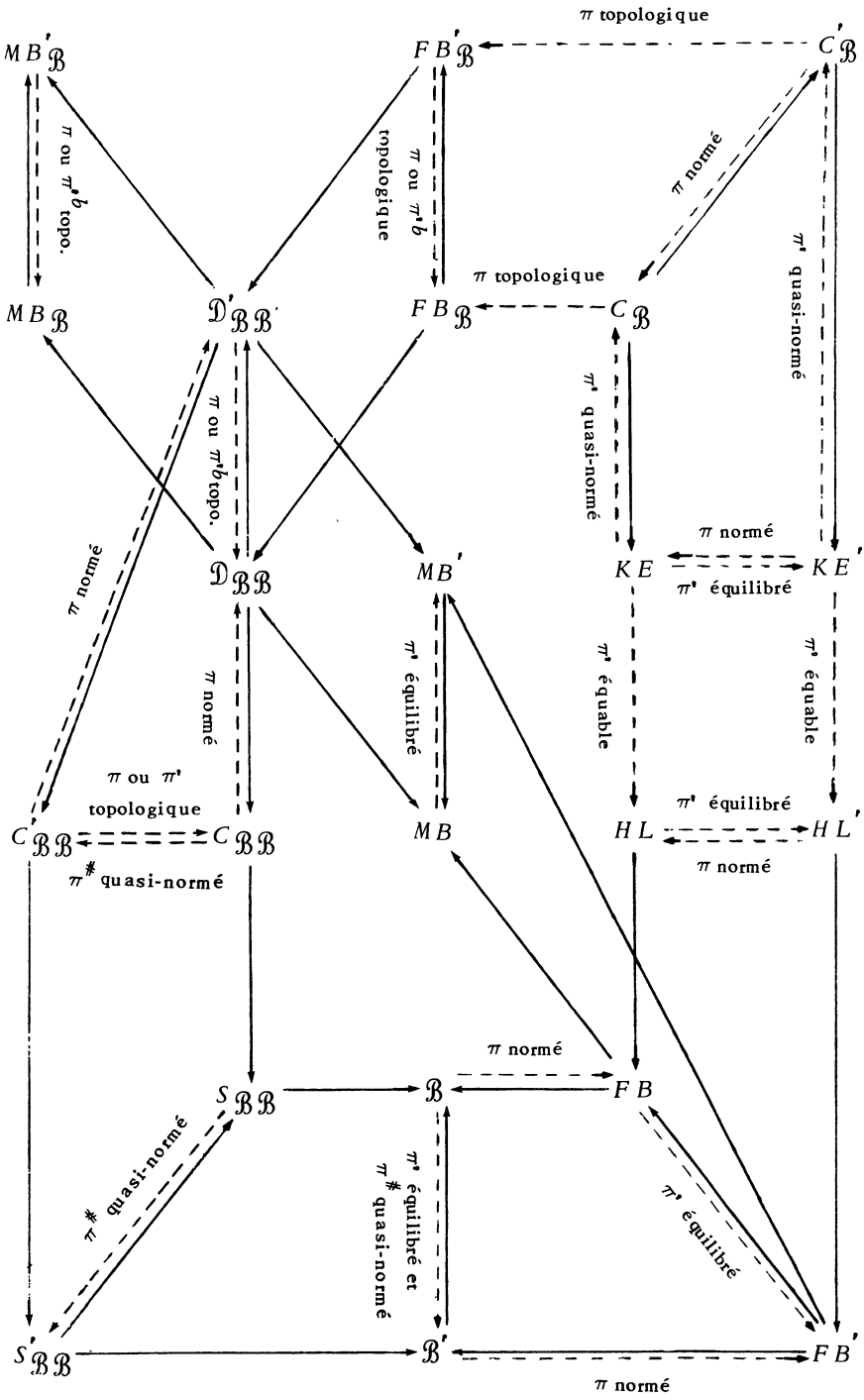
1° D'autres implications résultent immédiatement des définitions:

$$\mathcal{D}\mathfrak{B} \rightarrow MB \quad \text{et} \quad \mathcal{D}'\mathfrak{B} \rightarrow MB',$$

$$HL \rightarrow FB \quad \text{et} \quad HL' \rightarrow FB'.$$

2° Si (E', π') est pseudo-topologique, la MB -différentiabilité peut être obtenue indifféremment par le schéma de Lamadrid ou de Michal, pour la quasi-topologie $\tau(\pi', \check{\mathfrak{C}}(\pi))$ sur $\mathcal{F}(E', E)$.

Nous avons réuni toutes ces implications dans le tableau 2 suivant:



4. Applications strictement différentiables.

Nous conserverons les notations du n° 1 et de [6], et supposons de plus (E', π') séparé. L'espace de toutes les applications linéaires quasi-continues de (E, π) vers (E', π') sera noté $\mathcal{L}(E', E)$.

DEFINITION 2. L'application f sera dite *strictement différentiable* en x_0 si, dans un voisinage de x_0 pour la topologie τ_π associée à π , on peut mettre f sous la forme

$$f(x+h) = f(x) + f'(x_0) \cdot h + R(x, h),$$

où $f'(x_0) \in \mathcal{L}(E', E)$, et où R vérifie la condition:

Si $\tilde{R}$ désigne l'application de $\mathbf{R} \times E$ dans $\mathcal{F}(E', E)$ qui, au couple (t, x) , fait correspondre l'application $\tilde{R}(t, x)$ de E dans E' définie par

$$\tilde{R}(t, x) \cdot h = R(x, th) / t \quad \text{si} \quad t \neq 0, \quad \tilde{R}(0, x) = 0,$$

alors $\tilde{R}$ est quasi-continue au point $(0, x_0)$ de $\pi_{\mathbf{R}} \times \pi$ vers $\tau(\pi', I)$.

Il est clair que, si f est strictement différentiable en x_0 , alors f est différentiable en x_0 au sens de [6].

Rappelons [6] qu'une application f est dite *faiblement différentiable* en x_0 si l'on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h),$$

où $f'(x_0) \in \mathcal{L}(E', E)$ et où r_t tend vers 0, lorsque t tend vers 0, pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{F}(E', E)$.

Elle est dite *B-différentiable* en x_0 si elle est différentiable sur un voisinage W de x_0 pour τ_π et si l'application Df de W dans $\mathcal{L}(E', E)$, qui à x associe $f'(x)$, est quasi-continue en x_0 , de π vers $\tau(\pi', I)$.

THEOREME 7. Supposons (E', π') régulier. Si f est strictement différentiable en x_0 et faiblement différentiable sur un voisinage de x_0 dans τ_π , alors Df est quasi-continue en x_0 , de π vers $\tau(\pi', I)$.

REMARQUE. Si en particulier (E', π') est admissible, les hypothèses du théorème 7 permettent de conclure que f est B-différentiable en x_0 .

THEOREME 8. *Supposons (E', π') admissible. Si f est faiblement différentiable au voisinage de x_0 et si Df est quasi-continue en x_0 , alors f est strictement différentiable en x_0 .*

REMARQUE. Si f est B -différentiable en x_0 , elle est faiblement différentiable au voisinage de x_0 et Df est quasi-continue en x_0 ; donc dans le cas où (E', π') est admissible, toute application B -différentiable en x_0 est strictement différentiable en x_0 .

Ainsi, lorsque (E', π') est admissible, une application est B -différentiable en x_0 si et seulement si elle est faiblement différentiable au voisinage de x_0 et strictement différentiable en x_0 .

(*) Les notions de différentiabilité indiquées dans le tableau 1 ont été considérées par les auteurs suivants:

Lamadrid 1955 Silva 1956	$\mathfrak{B}$
Michal 1938 Bastiani 1962	MB
Fischer 1957 Lang 1962 Binz 1966	HL
Keller 1964 Ver Eecke 1967	KE
Silva 1956	$S\mathfrak{B}\mathfrak{B}$

Soukhinine 1969	$C\mathfrak{B}$ $C\mathfrak{B}\mathfrak{B}$
Soukhinine 1971	$\mathcal{D}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$
Soukhinine 1973	$FB\mathfrak{B}$ $MB\mathfrak{B}$

Bibliographie.

1. V.I. AVERBOUCH. O.G. SMOLIANOV, Compléments au livre de Frölicher-Bucher, M. «Mir» 1970.
2. V.I. AVERBOUCH. O.G. SMOLIANOV, The various definitions of the derivative in linear topological spaces, *Russian Math. Surveys* 23 (1968) n° 4, 67 - 113.
3. H.H. KELLER, *Differential Calculus in locally convex spaces* (multigraphié) Zürich, 1973.
4. M.F. SOUKHININE, Quelques théorèmes de fonctions implicites dans les espaces vectoriels topologiques, *Ouspekhi Mat. Naouk*, Tome XXVIII-1 (169), 1973.
5. V.I. AVERBOUCH. O.G. SMOLIANOV, Différentiation et quasi-topologie, *Viestnik Mosk. Oun. Mat. Mekh.*, 1972, n° 1.
6. F. BERQUIER, Calcul différentiel dans les espaces quasi-bornologiques, *Esquisses Math.* 20, Paris, 1973 (Thèse Paris 1973).

Faculté des Sciences
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS Cedex.