

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

JEAN-MARC CORDIER

Espaces fonctionnels quasi-uniformes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, n° 2 (1971), p. 113-136

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_2_113_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES FONCTIONNELS QUASI-UNIFORMES

par Jean-Marc CORDIER

Introduction.

Alors que la topologie d'un groupe topologique est sous-jacente à une structure uniforme, celle d'un groupoïde topologique peut ne pas être uniformisable. Toutefois un groupoïde topologique microtransitif vérifie «localement» les axiomes d'une structure uniforme. C'est ce qui a conduit à introduire dans [1] des structures quasi-uniformes (à ne pas confondre avec les structures quasi-uniformes au sens de [5]), dont les topologies et les structures uniformes sont des cas «limites». La catégorie des applications quasi-uniformes a été considérée dans [1] et [3]. Le présent article a pour but de construire diverses structures quasi-uniformes sur des espaces d'applications, généralisant les résultats connus sur les espaces fonctionnels uniformes.

Soient E un ensemble et u' une structure quasi-uniforme sur E' , associée à une partition $(A'_i)_{i \in I}$ de E . L'ensemble M' des applications de E dans E' appliquant E tout entier dans l'un des A'_i est muni d'une structure quasi-uniforme. Celle-ci est utilisée pour définir la structure de pseudo-convergence quasi-uniforme $\mathcal{Q}(u', u)$ sur l'ensemble $M_q(u', u)$ des applications quasi-uniformes de u vers u' , lorsque u est une structure quasi-uniforme sur E . On détermine ainsi une auto-domination [2] de la catégorie des applications quasi-uniformes. Une construction analogue permet d'obtenir la structure de σ -convergence quasi-uniforme $\mathcal{Q}_\sigma(u', u)$ associée à la donnée d'un ensemble σ de parties de E . Si u vérifie certaines conditions, la topologie de la convergence compacte est encadrée par les topologies sous-jacentes à $\mathcal{Q}(u', u)$ et à $\mathcal{Q}_c(u', u)$, où c est l'ensemble des compacts de la topologie sous-jacente à u . L'ensemble de toutes les applications de E dans E' est aussi muni d'une structure quasi-uniforme. Terminologie et notations sont celles de [1], [2] et [4].

1. Structures quasi-uniformes.

Soit E un ensemble. On désigne par $(E \times E)^o$ le groupoïde des couples associé à E . Si V est une partie de $E \times E$ et si $V = V^{-1}$ dans le groupoïde $(E \times E)^o$, nous dirons que V est une partie symétrique de $E \times E$.

DEFINITIONS.

I. On appelle *structure quasi-uniforme* sur l'ensemble E un couple $((A_i)_{i \in I}, \phi)$, où $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E et ϕ une application de I dans la classe des filtres sur $E \times E$ vérifiant les conditions suivantes:

1. Pour tout $i \in I$, le filtre $\phi(i)$ admet une base formée de parties symétriques V de $E \times E$ telles que la diagonale Δ_{A_i} de $A_i \times A_i$ soit contenue dans V .

2. Si $V_i \in \phi(i)$, il existe $V'_i \in \phi(i)$ tel que V'_i soit une partie symétrique de $E \times E$ et que les conditions $j \in I$ et $\Delta_{A_j} \cap V'_i \neq \emptyset$ entraînent l'existence d'un $V'_j \in \phi(j)$ pour lequel $V'_i \circ V'_j \subset V_i$.

II. Soient $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$ et $u = ((A_j)_{j \in J}, \phi)$ deux structures quasi-uniformes sur E' et E respectivement. On dira que (u', f, u) est une *application quasi-uniforme* si (E', f, E) est une application telle que:

1. pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $f(A_j) \subset A'_i$.

2. si $i \in I$ et si $f(A_j) \subset A'_i$, pour tout $V' \in \phi'(i)$ il existe $V \in \phi(j)$ tel que $(f \times f)(V) \subset V'$.

III. Soit $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$ une structure quasi-uniforme sur l'ensemble E . On appelle *topologie sous-jacente* à u et l'on note $\tau(u)$ la topologie sur E telle que [1], si $x \in A_i$, le filtre des voisinages de x soit engendré par l'ensemble des $V(x)$, où

$$V \in \phi(i) \text{ et } V(x) = \{y \in E \mid (x, y) \in V\}.$$

On notera $\mathcal{Q}_o$ la classe des structures quasi-uniformes sur les ensembles appartenant à un univers $\mathcal{U}$; c'est une classe d'objets de la catégorie $\mathcal{Q}^o$ des applications quasi-uniformes associée à l'univers $\mathcal{U}$. Soit q le foncteur d'oubli canonique de $\mathcal{Q}^o$ vers la catégorie $\mathcal{M}^o$ des applications associée à $\mathcal{U}$. Le foncteur q est un foncteur d'homomorphismes saturé: Si $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$ est une structure quasi-uniforme sur E et si f est une

bijection de E sur E' , alors $((f(A_i))_{i \in I}, \phi')$ est une structure quasi-uniforme sur E' , dite *image de u par f* et notée fu , où $\phi'(i) = (f \times f)\phi(i)$.

La catégorie $\mathcal{Q}^0$ est à K' -limites inductives et à K' -limites projectives pour toute catégorie K' telle que $K \in \mathcal{U}$. Le foncteur q est compatible avec les limites projectives et inductives. Il est aussi $\wedge$ -étalant: Si $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$ est une structure quasi-uniforme sur $E \in \mathcal{U}$ et si E' est une partie de E , il existe une q -sous-structure de u définie par E' , à savoir la structure $u' = ((A'_j)_{j \in J}, \phi')$ telle que $J = \{i \in I \mid A_i \cap E' \neq \emptyset\}$, que $A'_j = A_j \cap E'$ et que $\phi'(j)$ soit le filtre induit par $\phi(j)$ sur $E' \times E'$ pour $j \in J$. On appelle u' la structure quasi-uniforme induite par u sur E' et on la note u/E' .

EXEMPLES.

I. Soit T une topologie sur E . Pour chaque $x \in E$, soit $\phi(x)$ le filtre sur E admettant pour base l'ensemble des $V \times V$, où V est un voisinage de x . Alors $((\{x\})_{x \in E}, \phi)$ est une structure quasi-uniforme, dont la topologie sous-jacente est T . La catégorie $\mathcal{T}^0$ des applications continues associée à $\mathcal{U}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}^0$.

II. Si Y est une structure uniforme sur E , alors $((E_1)_{1 \in \{1\}}, \phi)$, où $E_1 = E$ et où $\phi(1) = Y$, est une structure quasi-uniforme. La catégorie $\mathcal{U}^0$ des applications uniformément continues associée à $\mathcal{U}$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}^0$ ayant pour objets les structures quasi-uniformes dont la partition est indexée par $\{1\}$.

III. On notera $(\mathcal{Q}_1)_0$ l'ensemble des structures quasi-uniformes $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi) \in \mathcal{Q}_0$ telles que $A_i \times A_i \in \phi(i)$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire telles que A_i soit ouvert et fermé dans $\tau(u)$ pour tout i . Soit $\mathcal{Q}_1^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}^0$ dont $(\mathcal{Q}_1)_0$ est la classe d'objets. Parmi les éléments de $(\mathcal{Q}_1)_0$ figurent les structures *quasi-discrètes*, i.e. les structures quasi-uniformes $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$ telles que la diagonale de A_i appartienne à $\phi(i)$ pour tout $i \in I$.

PROPOSITION. Soit $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$ une structure quasi-uniforme sur $E \in \mathcal{U}$. Alors u appartient à $(\mathcal{Q}_1)_0$ si, et seulement si, u est somme dans $\mathcal{Q}^0$ de structures uniformes (resp. des structures uniformes $(u/A_i)_{i \in I}$).

PREUVE. 1° Supposons $u \in (\mathcal{Q}_1)_0$. Pour tout $i \in I$ la structure quasi-uniforme $u_i = u / A_i$ induite par u sur A_i s'identifie à une structure uniforme. Notons v_i l'injection canonique de A_i dans E ; on a $\hat{v}_i = (u, v_i, u_i) \in \mathcal{Q}$. Soit $(\hat{g}_i)_{i \in I}$ une famille d'applications quasi-uniformes, où

$$\hat{g}_i = (u', g_i, u_i) \in \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad u' = ((A'_j)_{j \in J}, \phi').$$

Notons g l'application réunion des $(g_i)_{i \in I}$. Soit $i \in I$; il existe $j \in J$ tel que $g(A_i) \subset A'_j$. Si $V' \in \phi'(j)$, il existe $V \in \phi(i)$ vérifiant

$$g \times g(V \cap (A_i \times A_i)) = g_i \times g_i(V \cap (A_i \times A_i)) \subset V'.$$

car $\hat{g}_i \in \mathcal{Q}$. Puisque $A_i \times A_i$ appartient à $\phi(i)$, son intersection avec V appartient aussi, de sorte que (u', g, u) est l'unique application quasi-uniforme $\hat{g}$ telle que $\hat{g} \circ \hat{v}_i = \hat{g}_i$ pour tout $i \in I$. Ainsi u est une somme de $(u_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{Q}^0$.

2° Inversement si $u_i \in \mathcal{Q}_0$ s'identifie à une structure uniforme Y_i sur A_i pour tout $i \in I$, la structure quasi-uniforme u sur $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ somme de $(u_i)_{i \in I}$ est telle que $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$, où $\phi(i)$ désigne le filtre sur $E \times E$ engendré par Y_i . Par suite $A_i \times A_i \in \phi(i)$, et $u \in (\mathcal{Q}_1)_0$.

COROLLAIRE. Une structure quasi-uniforme $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$ est quasi-discrète si et seulement si u est somme de structures uniformes discrètes (resp. des structures uniformes discrètes u / A_i).

DEFINITIONS.

I. Une structure quasi-uniforme u sera dite *séparée* si sa topologie sous-jacente $\tau(u)$ est séparée.

II. Soit $u = ((A_j)_{j \in J}, \phi)$ une structure quasi-uniforme sur E . On dit que F est un *filtre de Cauchy* pour u (relativement à $\phi(j)$) si F est un filtre sur E et si pour tout $V \in \phi(j)$ il existe $E' \in F$ tel que $E' \times E' \subset V$.

III. Si tout filtre de Cauchy pour u converge dans la topologie $\tau(u)$, on dit que u est une *structure quasi-uniforme complète*.

STRUCTURES QUASI-METRIQUES.

Soit a un nombre réel strictement positif; $[0, a]$ désignera l'intervalle fermé des nombres réels compris entre 0 et a .

DEFINITION. On appelle *quasi-écart* sur un ensemble E une famille d'ap-

plications $(f_j)_{j \in J}$ telle qu'il existe une partition $(A_j)_{j \in J}$ de E vérifiant les conditions suivantes:

1. Pour tout $j \in J$, f_j est une application de $\alpha(f_j)$ dans $[0, +\infty]$, où $\alpha(f_j)$ est une partie symétrique de $E \times E$ contenant $A_j \times A_j$.

2. On a $f_j(x, x) = 0$ pour tout $x \in A_j$,

$$f_j(x, y) = f_j(y, x) \text{ si } (x, y) \in \alpha(f_j).$$

3. Il existe $a_j > 0$ tel que, pour tout $j' \in J$ pour lequel $f_j^{-1}([0, a_j])$ rencontre la diagonale de $A_{j'} \times A_{j'}$, il existe un $b_{j'} > 0$ vérifiant:

$$a) \quad f_j^{-1}([0, a_j]) \cap f_{j'}^{-1}([0, b_{j'}]) \subset \alpha(f_j);$$

$$b) \quad f_j(x, y) \leq f_j(x, z) + f_{j'}(z, y) \text{ si } f_j(x, z) \leq a_j \text{ et } f_{j'}(z, y) \leq b_{j'}.$$

Si ces conditions sont remplies, on obtient une structure quasi-uniforme $g = ((A_j)_{j \in J}, \phi)$, dite *sous-jacente au quasi-écart*, en prenant pour $\phi(j)$, où $j \in J$, le filtre ayant pour base l'ensemble B_j formé des V_j^a où $V_j^a = f_j^{-1}([0, a])$ et $a > 0$.

Si $(f_j)_{j \in J}$ est un quasi-écart fini (i.e. f_j prend des valeurs finies seulement), vérifiant de plus la condition:

$$4. \quad f_j(x, y) = 0 \text{ entraîne } x = y,$$

alors on dit que $s = (A_j, f_j)_{j \in J}$ est une structure *quasi-métrique*.

DEFINITION. Soient $s' = (A'_i, d'_i)_{i \in I}$ et $s = (A_j, d_j)_{j \in J}$ deux structures quasi-métriques sur E' et E respectivement. Le triplet (s', f, s) est appelé *application k-quasi-métrique* si f est une application de E dans E' vérifiant la condition: Pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que

$$f(A_j) \subset A'_i, \quad (f \times f)(\alpha(d_j)) \subset \alpha(d'_i),$$

$$d'_i(f(x), f(y)) \leq k d_j(x, y) \text{ pour } (x, y) \in \alpha(d_j).$$

Si $k = 1$, on appelle (s', f, s) une *application quasi-métrique*.

STRUCTURES QUASI-UNIFORMES STRICTES.

Rappelons [1] qu'une structure quasi-uniforme $u = ((A_i)_{i \in I}, \phi)$ sur E est dite *stricte* si, pour tout $i \in I$, il existe une base $\bar{\phi}(i)$ de $\phi(i)$ telle que, si $V \in \bar{\phi}(i)$, pour tout $(x, y) \in V$, il existe $x' \in A_i$ pour lequel $(x, x') \in V$ et $(y, x') \in V$. Une telle base est dite *base stricte*.

2. Structure de pseudo-convergence quasi-uniforme.

La catégorie $\mathcal{Q}_0$ des applications quasi-uniformes associée à l'univers $\mathcal{U}$ est à I -produits [1] pour tout $I \in \mathcal{U}$. Nous considérons toujours sur $\mathcal{Q}_0$ le foncteur I -produits appliqué par le foncteur q sur le foncteur I -produits canonique sur $\mathfrak{M}_0$.

Soit E un ensemble appartenant à $\mathcal{U}$; on notera u_E la structure quasi-uniforme sur E qui s'identifie à la structure uniforme «discrète», par $\times_E$ le foncteur de $\mathcal{Q}_0$ vers $\mathcal{Q}_0$ qui, à tout $b \in \mathcal{Q}$, associe l'application quasi-uniforme produit $b \times i_{u_E}$, en notant i_u l'application quasi-uniforme «identité» de $u \in \mathcal{Q}_0$.

PROPOSITION. Soient $E' \in \mathcal{U}$ et $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$ une structure quasi-uniforme sur E' . Il existe une structure quasi-uniforme U' sur une partie M' de l'ensemble $\mathfrak{M}(E', E)$ des applications de E dans E' telle que U' soit un $\times_E$ -objet colibre associé à u' . Si u' est séparée (resp. stricte), U' est séparée (resp. stricte).

PREUVE. 1° Pour chaque $i \in I$, posons

$$\mathcal{Q}'_i = \{ f \in \mathfrak{M}(E', E) \mid f(E) \subset A'_i \}, \quad \text{et} \quad M' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{Q}'_i.$$

On définit une structure quasi-uniforme $U' = ((\mathcal{Q}'_i)_{i \in I}, \Phi')$ sur M' en notant $\Phi'(i)$, pour tout $i \in I$, le filtre engendré sur $M' \times M'$ par l'ensemble des $V' < E >$, où

$$V' < E > = \{ (f', f) \in M' \times M' \mid [f', f](E) \subset V' \},$$

V' parcourant la base formée des parties symétriques de $\phi'(i)$. En effet, si V' est symétrique, $V' < E >$ l'est aussi, et

$$V' < E > \cap V'' < E > = (V' \cap V'') < E >.$$

On a $\Delta \mathcal{Q}'_i \subset \cap \Phi'(i)$, car $f \in \mathcal{Q}'_i$ et $x \in E$ entraînent

$$(f(x), f(x)) \in \Delta_{A'_i} \subset V'.$$

Soit $V' < E > \in \Phi'(i)$; à $V \in \phi'(i)$ correspond un $V' \in \Phi'(i)$ vérifiant l'axiome 2 des structures quasi-uniformes, et $V' < E >$ appartient à $\Phi'(i)$.

Soit j tel que $V' < E > \cap \Delta \mathcal{Q}'_j \neq \emptyset$; ceci implique $V' \cap \Delta_{A'_j} \neq \emptyset$, de sorte

qu'il existe $W \in \phi'(j)$ tel que $V' \circ W \subset V$; il s'ensuit

$$W \langle E \rangle \in \Phi'(j) \quad \text{et} \quad V' \langle E \rangle \circ W \langle E \rangle \subset V \langle E \rangle.$$

2° Soit $U' \times_{u_E}$ la structure quasi-uniforme produit de U' et de u_E et soit v l'application de $q(U' \times_{u_E}) = M' \times E$ dans E' telle que

$$v((f, x)) = f(x), \quad \text{pour tout } (f, x) \in M' \times E.$$

v définit une application quasi-uniforme $\hat{v} = (u', v, U' \times_{u_E})$.

Soit $u'' = ((B_j)_{j \in J}, \phi'')$ une structure quasi-uniforme sur $E'' \in \mathcal{U}$, et soit $\hat{g} = (u', g, u'' \times_{u_E})$ une application quasi-uniforme. Pour tout $j \in J$ il existe $i_j \in I$ tel que $g(B_j \times E) \subset A'_{i_j}$. Soient $x'' \in E''$ et $g_{x''}$ l'application de E dans E' définie par $g_{x''}(x) = g(x'', x)$; si $x'' \in B_j$, où $j \in J$, on a $g_{x''} \in \mathcal{U}_{i_j}$. Soit g' l'application de E'' dans M' définie par $g'(x'') = g_{x''}$. Elle définit une application quasi-uniforme (U', g', u'') , qui est l'unique $\hat{g}' \in \mathcal{Q}$ vérifiant $\hat{v} \circ (\hat{g}' \times i_{u_E}) = \hat{g}$.

3° Supposons u' séparé; soient $f \in M'$ et $f' \in M'$ tels que $f(x) \in A'_i$, $f'(x) \in A'_j$ et $f(x) \neq f'(x)$ pour un certain $x \in E$. Il existe $V'_i \in \phi'(i)$ et $V'_j \in \phi'(j)$ tels que $V'_i(f(x)) \cap V'_j(f'(x)) = \emptyset$. Comme $V'_i \langle E \rangle \in \Phi'(i)$ et $V'_j \langle E \rangle \in \Phi'(j)$, on trouve

$$V'_i \langle E \rangle (f) \cap V'_j \langle E \rangle (f') = \emptyset.$$

En effet, si g appartenait à cette intersection, les relations

$$(f(x), g(x)) \in V'_i \quad \text{et} \quad (f'(x), g(x)) \in V'_j$$

entraîneraient $V'_i(f(x)) \cap V'_j(f'(x)) \neq \emptyset$. Donc U' est séparée.

3° Supposons u' stricte. Soient $i \in I$ et $B(i)$ une base stricte de $\phi'(i)$. L'ensemble $\mathcal{B}(i)$ des $V_i \langle E \rangle$, où $V_i \in B(i)$, est une base du filtre $\Phi'(i)$. Soient $V_i \in B(i)$ et $(f, g) \in V_i \langle E \rangle$; pour tout $x \in E$, on a $(f(x), g(x)) \in V_i$, de sorte qu'il existe $y_x \in A'_i$ tel que $(f(x), y_x)$ et $(g(x), y_x)$ appartiennent à V_i . Soit h l'application de E dans E' définie par $h(x) = y_x$. On obtient

$$h \in \mathcal{U}'_i, \quad (f, h) \in V_i \langle E \rangle, \quad (g, h) \in V_i \langle E \rangle.$$

Ceci prouve que U' est stricte.

COROLLAIRE. U' est la moins fine des structures quasi-uniformes sur M' rendant l'application v quasi-uniforme de $U' \times_{U_E} u'$ vers u' .

DEFINITION. La structure quasi-uniforme U' définie dans la proposition précédente sera appelée *structure de pseudo-convergence quasi-uniforme associée à (u', E)* et notée $\mathcal{Q}(u', E)$.

PROPOSITION. Il existe un isomorphisme de u' sur une sous-structure quasi-uniforme U'_1 de U' . Si u' est séparée, $q(U'_1)$ est fermé dans la topologie $\tau(U')$ sous-jacente à U' .

PREUVE. Soit b l'application de E' dans M' associant à $y \in E'$ l'application constante $\tilde{y}$ (telle que $\tilde{y}(x) = y$ pour tout $x \in E$). On voit que b définit un isomorphisme de u' sur la structure quasi-uniforme U'_1 induite par U' sur $b(E')$, car, pour tout $V \in \phi(i)$, on a

$$(b \times b)(V) = V \langle E \rangle \cap (b(E') \times b(E')).$$

Supposons u' séparée et $f \in M'$ adhérent à $b(E')$. Soit $x \in E$ et posons $y = f(x)$. Si y appartient à A'_i , alors $f(E)$ est contenu dans A'_i , par définition de M' . Si $x' \in E$ et si $f(x') \neq y$, il existe $V \in \phi(i)$ tel que l'on ait $V(y) \cap V(f(x')) \neq \emptyset$, et il existe $V' \in \phi(i)$ vérifiant $V' \circ V \subset V$. Comme f est adhérent à $b(E')$, il existe $z \in E'$ tel que $\tilde{z} \in V' \langle E \rangle (f)$. Il en résulte: $(f(x), z) \in V'$ et $(z, f(x')) \in V'$, d'où

$$(y, f(x')) = (f(x), z) \circ (z, f(x')) \in V' \circ V' \subset V.$$

Ceci étant impossible, $y = f(x')$ et par suite $f = \tilde{y} \in b(E')$.

PROPOSITION. Supposons que u' soit séparée et vérifie la condition (C): On a $x \in A'_i$ si x est point limite dans $\tau(u')$ d'un filtre de Cauchy pour u' relativement à $\phi'(i)$. Alors U' est complet ssi u' est complet. En particulier U' est complet si u' est complet et appartient à $(\mathcal{Q}_1)_0$.

PREUVE. 1° Comme u' est séparée, u' est isomorphe à U'_1 et $q(U'_1)$ est fermé dans $\tau(U')$ (proposition précédente). Donc u' est complet si U' est complet.

2° Supposons u' complet et soit F un filtre de Cauchy pour U' relativement à $\Phi'(i)$. Pour tout $x \in E$, l'application $\bar{x}$ de M' dans E' défi-

nie par $g \rightarrow g(x)$ étant quasi-uniforme de U' vers u' , le filtre $\bar{x}F$ image de F par $\bar{x}$ est un filtre de Cauchy relativement à $\phi'(i)$ et $\bar{x}F$ converge vers un unique $f(x)$; d'après la condition (C), $f(x)$ appartient à A'_i . Par suite l'application $f: x \rightarrow f(x)$ de E dans E' appartient à $\mathcal{Q}'_i$. Soient V' un élément de $\phi'(i)$ et V'' un élément associé à V' par l'axiome 2. Il existe $W \in \phi'(i)$ tel que $V'' \circ W \subset V'$ et il existe $X \in F$ tel que $X \times X$ soit contenu dans $W < E >$. Montrons que X est contenu dans $V' < E > (f)$. En effet, soient $f' \in X$ et $x' \in E$ et considérons $(f(x'), f'(x'))$. Comme $\bar{x}'F$ converge vers $f(x')$ et que $V''(f(x'))$ est un voisinage de $f(x')$, on a $V''(f(x')) \cap \bar{x}'(X) \neq \emptyset$. Il existe donc $f'' \in X$ tel que $(f(x'), f''(x')) \in V''$ et, (f'', f') appartenant à $X \times X$, on trouve

$$(f(x'), f'(x')) = (f(x'), f''(x')) \circ (f''(x'), f'(x')) \in V'' \circ W \subset V'.$$

Par conséquent F converge vers f dans $\tau(U')$, et U' est complet.

PROPOSITION. Si T est une topologie sur E , l'ensemble M'_c des $f \in M'$ tels que $(\tau(u'), f, T)$ soit continue est fermé dans $\tau(U')$. Si u est une structure quasi-uniforme $((A_j)_{j \in J}, \phi)$ sur E , l'ensemble M'_q des $f \in M'$ tels que (u', f, u) soit quasi-uniforme est fermé dans $\tau(U')$.

PREUVE. Soit T une topologie sur E et soit f un élément de $\mathcal{Q}'_i$ adhérent à M'_c . Soit $V \in \phi'(i)$; il existe $V' \in \phi'(i)$ symétrique tel que $V' \circ V$ soit contenu dans V ; soit V'' un élément de $\phi'(i)$ associé à V' par l'axiome 2. Puisque $V' \cap V'' \in \phi'(i)$, il existe W symétrique vérifiant

$$W \in \phi'(i), \quad W \circ W \subset V' \cap V'' \quad \text{et} \quad W \subset V' \cap V''.$$

$W < E > (f)$ étant un voisinage de f dans $\tau(U')$, il existe $g \in M'_c$ tel que $(f, g) \in W < E >$. Si $i' \in I$ est tel que $g \in \mathcal{Q}'_{i'}$, on a $V'' \cap \Delta_{A_{i'}} \neq \emptyset$, car

$$(g(x), g(x)) = ((g(x), f(x)) \circ (f(x), g(x))) \in W \circ W \subset V'',$$

pour $x \in E$. Il existe donc $W' \in \phi'(i')$ tel que $V'' \circ W' \subset V'$ et, $W'(g(x))$ étant un voisinage de $g(x)$, il existe un voisinage Y de x tel que $g(Y)$ soit contenu dans $W'(g(x))$. Pour $x' \in Y$, on trouve:

$$(f(x), f(x')) = (f(x), g(x)) \circ (g(x), g(x')) \circ (g(x'), f(x')) \\ \in W \circ W' \circ W \subset V'' \circ W' \circ V' \subset V' \circ V' \subset V.$$

Donc $f(Y) \subset V(f(x))$, c'est-à-dire $f \in M'_c$.

2° Si u est une structure quasi-uniforme sur E , on démontre de même que M'_q est fermé dans $\tau(u)$.

EXEMPLES. 1° Si u' s'identifie à une topologie T' , on a $U'_1 = U'$, de sorte que $\mathcal{Q}(u', E)$ est isomorphe à u' .

2° Si u' s'identifie à une structure uniforme, on a $M' = \mathbb{M}(E', E)$ et la structure quasi-uniforme $U' = \mathcal{Q}(u', E)$ s'identifie à la structure uniforme de la convergence uniforme sur $\mathbb{M}(E', E)$. Ainsi les propositions précédentes généralisent les résultats classiques sur cette structure.

3. Domination de la catégorie des applications quasi-uniformes.

Soient $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$ et $u = ((A_j)_{j \in J}, \phi)$ deux structures quasi-uniformes sur E' et sur E respectivement, et soit $M'_q(u', u)$ l'ensemble des applications quasi-uniformes $\bar{f} = (u', f, u)$.

PROPOSITION. Il existe une structure quasi-uniforme sur $M'_q(u', u)$, notée $\mathcal{Q}(u', u)$, isomorphe à une sous-structure quasi-uniforme du produit des structures quasi-uniformes $\mathcal{Q}(u', A_j)$, où $j \in J$, et telle que $\mathcal{Q}(u', u)$ soit isomorphe à $\mathcal{Q}(u', E)$ si $u = u_E$ (resp. à une sous-structure quasi-uniforme de $\mathcal{Q}(u', E)$ si u s'identifie à une structure uniforme). Si u' est séparée (resp. stricte), $\mathcal{Q}(u', u)$ est séparée (resp. stricte).

PREUVE. Si $f \in \mathbb{M}(E', E)$, notons f_j la restriction $f|_{A_j}$ de f à A_j . Soit

$$\mathcal{Q}_i^j = \{f_j \in \mathbb{M}(E', A_j) \mid f_j(A_j) \subset A'_i\} \quad \text{et} \quad M_j' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{Q}_i^j.$$

Notons $U_j' = ((\mathcal{Q}_i^j)_{i \in I}, \Omega_j')$ la structure de pseudo-convergence $\mathcal{Q}(u', A_j)$.

La structure quasi-uniforme $\hat{U}$ produit de $(U_j')_{j \in J}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{U} &= ((\hat{\mathcal{Q}}_i)_{i \in \hat{I}}, \hat{\phi}), \quad \text{où } \hat{I} = I^J, \\ \hat{\mathcal{Q}}_i &= \prod_{j \in J} \mathcal{Q}_i^j \quad \text{et} \quad \hat{\phi}(\hat{i}) = \prod_{j \in J} \Omega_j'(i_j) \quad \text{si } \hat{i} = (i_j)_{j \in J}. \end{aligned}$$

Il existe une application injective p' de $M'_q(u', u)$ dans $\hat{M} = q(\hat{U})$, qui associe $(f_j)_{j \in J}$ à $\bar{f} = (u', f, u) \in M'_q(u', u)$. En effet, pour tout $j \in J$, il existe $i_j \in I$ tel que $f(A_j)$ soit contenu dans A'_{i_j} , de sorte que $p'(\bar{f}) = (f_j)_{j \in J}$ appartient à $\hat{\mathcal{Q}}_{\hat{i}}$, où $\hat{i} = (i_j)_{j \in J}$. Soient $\hat{U}'$ la structure quasi-uniforme induite par $\hat{U}$ sur $p'(M'_q(u', u)) = \mathfrak{E}'$ et $\mathcal{Q}(u', u)$ la structure

quasi-uniforme image réciproque de $\hat{U}'$ par p' . On a:

$$\mathcal{Q}(u', u) = ((B_k)_{k \in K}, \psi), \quad \text{où } K = \{k \in \hat{I} \mid \mathcal{Q}_k' \cap \mathcal{E}' \neq \emptyset\}$$

et, si $k = (i_j)_{j \in J} \in K$,

$$B_k = \{\bar{f} \in M_q(u', u) \mid \forall j \in J, f_j \in \mathcal{Q}_{i_j}'\}, \quad \psi(k) = (p' \times p')^{-1} \hat{\phi}'(k),$$

où $\hat{\phi}'(k)$ est le filtre induit par $\hat{\phi}(k)$ sur $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$.

1° Supposons que u s'identifie à une structure uniforme, i. e. que $I = \{1\}$, et soit M' l'ensemble (considéré dans le n° 1) des $f \in \mathcal{M}(E', E)$ tels que $f(E)$ soit contenu dans l'un des A_j' . Alors $\mathcal{E}'$ s'identifie à l'ensemble des $f \in M'$ tels que $(u', f, u) \in \mathcal{Q}$, et p' définit un isomorphisme de $\mathcal{Q}(u', u)$ sur la sous-structure induite par $\mathcal{Q}(u', E)$ sur M'_q . Si u est la structure uniforme discrète u_E , on a $M'_q = M'$; donc $\mathcal{Q}(u', u)$ est isomorphe à $\mathcal{Q}(u', E)$.

2° Si u' est séparée (resp. stricte), U_j' est séparée (resp. stricte) pour tout $j \in J$, d'après le n° 2, donc $\hat{U} = \prod_{j \in J} U_j'$ est séparée (resp. stricte) de même que la structure induite $\hat{U}'$. A fortiori $\mathcal{Q}(u', u)$ est séparée (resp. stricte).

Nous conserverons les notations de la démonstration précédente. Pour tout $k = (i_j)_{j \in J} \in K$, nous posons

$$V'/A_j' / = \{(\bar{f}', \bar{f}) \in M_q(u', u) \times M_q(u', u) \mid [\bar{f}', \bar{f}](A_j') \subset V'\},$$

pour tout $V' \in \phi'(i_j)$. Soit $\mathcal{B}'(k)$ l'ensemble des $V'/A_j' /$, où $j \in J$ et $V' \in \phi'(i_j)$. Les éléments de $\mathcal{B}'(k)$ seront appelés *entourages élémentaires* de $\psi(k)$.

PROPOSITION. On a $\mathcal{Q}(u', u) = ((B_k)_{k \in K}, \psi)$, où $\psi(k)$ admet pour base l'ensemble $\mathcal{B}(k)$ des intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}'(k)$.

PREUVE. Notons π la bijection qui associe $((f_j')_{j \in J}, (f_j)_{j \in J})$ à la famille $((f_j', f_j))_{j \in J}$. Soit $k = (i_j)_{j \in J} \in K$. Le filtre $\psi(k)$ a pour base l'ensemble des parties W de $M_q(u', u) \times M_q(u', u)$ telles que $(p' \times p')(W) = V \cap (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}')$, où V est de la forme suivante: $V = \pi(\prod_{j \in J} W_j)$, où il existe une partie finie J' de J telle que:

$$W_j = V_j' < A_j' >, \quad \text{où } V_j' \in \phi'(i_j), \text{ si } j \in J', \quad W_j = M_j' \times M_j' \text{ si } j \notin J'.$$

Si $\bar{f} = (u', f, u) \in \mathcal{Q}$ et $\bar{f}' = (u', f', u) \in \mathcal{Q}$, alors $(\bar{f}', \bar{f})$ appartient à W ssi (f'_j, f_j) appartient à W_j pour tout $j \in J$, c'est-à-dire ssi

$$[\bar{f}', \bar{f}](A_j) = [f'_j, f_j](A_j) \subset V'_j \text{ pour tout } j \in J'.$$

Par conséquent $W = \bigcap_{j \in J'} V'_j / A_j /$ appartient à $\mathcal{B}(k)$. Ainsi $\mathcal{B}(k)$ est une base de $\psi(k)$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme b de u' sur une sous-structure quasi-uniforme de $\mathcal{Q}(u', u)$. Si u' est séparée, $b(E')$ est fermé dans la topologie $\tau(\mathcal{Q}(u', u))$.*

PREUVE. Si $x' \in E'$ soit $\tilde{x}'$ (resp. $\tilde{x}'_j$) l'application constante sur x' de E (resp. de A_j) dans E' . D'après le n° 2 l'application $b_j: x' \rightarrow \tilde{x}'_j$ définit un isomorphisme de u' sur une sous-structure u'_j de U'_j , pour tout $j \in J$. Par suite l'application $b': x' \rightarrow (\tilde{x}'_j)_{j \in J}$ définit un isomorphisme de u' sur une sous-structure $\hat{u}'$ de $\hat{U}$. Comme $b'(E')$ est contenu dans $\mathcal{E}'$, l'application $p'^{-1}b'$ qui associe $\tilde{x}'$ à x' définit un isomorphisme b de u' sur une sous-structure de $\mathcal{Q}(u', u)$. Supposons u' séparée; $b_j(E')$ étant fermé dans $\tau(U'_j)$ pour tout $j \in J$ (n° 2), $b'(E')$ est fermé dans $\tau(\hat{U}) = \prod_{j \in J} \tau(U'_j)$. Il en résulte que $b(E')$ est fermé dans $\tau(\mathcal{Q}(u', u))$.

PROPOSITION. *Supposons $u \in (\mathcal{Q}_1)_0$. Alors $\mathcal{E}'$ est fermé dans la topologie $T = \tau(\prod_{j \in J} U'_j)$. Si u' est séparée, alors $\mathcal{Q}(u', u)$ est complet si, et seulement si, u' est complet.*

PREUVE. 1° u est somme des structures uniformes induites u/A_j , où $j \in J$ (voir n° 1). Par suite $\mathcal{E}' = \prod_{j \in J} M'_j$, où $M'_j = q(\mathcal{Q}(u', u/A_j))$. Vu le n° 2, M'_j est fermé dans $\tau(U'_j)$. Il s'ensuit que $\mathcal{E}'$ est fermé dans T .

2° Supposons u' séparée. D'après la proposition précédente, $b(E')$ est fermé dans $\tau(\mathcal{Q}(u', u))$, de sorte que u' est complet si $\mathcal{Q}(u', u)$ est complet. Inversement si u' est complet, U'_j est complet pour tout $j \in J$, d'après le n° 2; donc $\hat{U}$ est complet et, $\mathcal{E}'$ étant fermé, $\mathcal{Q}(u', u)$ est aussi complet.

PROPOSITION. *Il existe une catégorie q -dominée $(\mathcal{Q}^0, D)$ telle que l'on ait $D(u', u) = \mathcal{Q}(u', u)$ pour tout couple (u', u) de structures quasi-uniformes. De plus $(\mathcal{Q}^0, D)$ est tensoriellement q -dominée en u , pour toute*

structure quasi-discrète u .

PREUVE. 1^o Supposons que

$$u = ((A_j)_{j \in J}, \phi), \quad u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi') \quad \text{et} \quad u'' = ((A''_l)_{l \in L}, \phi'')$$

soient des structures quasi-uniformes sur E , sur E' et sur E'' respectivement. Conservons les notations précédentes pour $\mathcal{Q}(u', u)$ et posons $\mathcal{Q}(u'', u) = ((B'_k)_{k \in K'}, \psi')$. Si $\bar{f} = (u'', f', u') \in \mathcal{Q}$, montrons que l'application d de $M_q(u', u)$ dans $M_q(u'', u)$ qui, à tout $\bar{b}$, associe $\bar{f}' \circ \bar{b}$ définit une application quasi-uniforme $D(\bar{f}', u)$ de $\mathcal{Q}(u', u)$ vers $\mathcal{Q}(u'', u)$. En effet, pour tout $i \in I$ il existe $l_i \in L$ tel que $f'(A'_i) \subset A''_{l_i}$. Soit $k = (i_j)_{j \in J} \in K$. Si $k' = (l_{i_j})_{j \in J}$, on a $k' \in K'$ et $d(B_k) \subset B'_{k'}$. Soit $V''/A_j/$ un entourage élémentaire de $\psi'(k')$; pour tout $j \in J$, il existe $V'_j \in \phi'(i_j)$ tel que $(f' \times f')(V'_j) \subset V''$. On en déduit

$$V'_j / A_j / \in \psi(k) \quad \text{et} \quad (d \times d)(V'_j / A_j /) \subset V'' / A_j / ,$$

ce qui prouve l'affirmation.

De même, soit $\bar{f} = (u', f, u) \in \mathcal{Q}$ et soit d' l'application de $M_q(u'', u')$ dans $M_q(u'', u)$ qui associe $\bar{b} \circ \bar{f}$ à $\bar{b}$. Montrons que d' définit une application quasi-uniforme $D(u'', \bar{f})$ de $\mathcal{Q}(u'', u')$ vers $\mathcal{Q}(u'', u)$. Pour tout $j \in J$, il existe $i_j \in I$ tel que $f(A_{i_j}) \subset A'_{i_j}$. Supposons

$$\mathcal{Q}(u'', u') = ((B''_k)_{k \in K''}, \psi'') \quad \text{et} \quad k'' = (l_{i_j})_{j \in J} \in K''.$$

Nous avons

$$k' = (l_{i_j})_{j \in J} \in K' \quad \text{et} \quad d'(B''_{k''}) \subset B_{k'}.$$

Soit $V''/A_j/$ un entourage élémentaire de $\psi'(k')$; on a

$$V''/A'_{i_j}/ \in \psi''(k'') \quad \text{et} \quad (d' \times d')(V''/A'_{i_j}/) \subset V''/A_j/.$$

Soient $\bar{f}_1$ et $\bar{f}$ des applications quasi-uniformes de u'' vers u'_1 et u vers u' respectivement. L'application de $M_q(u'', u')$ dans $M_q(u'_1, u)$ qui associe $\bar{f}_1 \circ \bar{b} \circ \bar{f}$ à $\bar{b}$ définit l'application quasi-uniforme $D(\bar{f}_1, u) \circ D(u'', \bar{f})$ de $\mathcal{Q}(u'', u')$ vers $\mathcal{Q}(u'_1, u)$; on la notera $D(\bar{f}_1, \bar{f})$. Comme $M_q(u', u)$ appartient à l'univers $\mathcal{U}$, l'application associant $D(\bar{f}_1, \bar{f})$ à $(\bar{f}_1, \bar{f}) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ définit un foncteur D de $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}^*$ vers $\mathcal{Q}^0$ tel que $q \circ D = \text{Hom } \mathcal{Q}$. Autrement dit, $(\mathcal{Q}^0, D)$ est une catégorie q -dominée.

2° Soit $u = ((A_j)_{j \in J}, \phi)$ une structure quasi-discrète sur $E \in \mathcal{U}$ et soit $\times_u$ le foncteur de $\mathcal{Q}^0$ vers $\mathcal{Q}^0$ associant $\bar{b} \times i_u$ à $\bar{b}$. Soit $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$ une structure quasi-uniforme sur $E' \in \mathcal{U}$; nous reprenons les notations du début du paragraphe. Montrons que $\mathcal{Q}(u', u) = ((B_k)_{k \in K}, \psi)$ est un $\times_u$ -objet colibre associé à u' . En effet, soit v l'application de $M_q(u', u) \times E$ dans E' qui associe $f(x)$ à $(\bar{f}, x)$, où $\bar{f} = (u', f, u)$. Soit $k = (i_j)_{j \in J} \in K$; on a $v(B_k \times A_j) \subset A'_{i_j}$ et, si $V' \in \phi'(i_j)$, alors

$$v \times v(\pi(V'/A_j / \times \Delta_{A_j})) \subset V', \text{ où } \pi((\bar{f}', \bar{f}), (x, x)) = ((\bar{f}', x), (\bar{f}, x)).$$

Par conséquent v définit une application quasi-uniforme $\bar{v}$ de $\mathcal{Q}(u', u) \times u$ vers u' . Soient de plus $u'' = ((A''_l)_{l \in L}, \phi'')$ une structure quasi-uniforme sur $E'' \in \mathcal{U}$ et $\bar{g}$ une application quasi-uniforme $(u', g, u'' \times u)$. Pour tout couple $(l, j) \in L \times J$, il existe $i_j^l \in I$ tel que $g(A''_l \times A_j)$ soit contenu dans $A'_{i_j^l}$. Pour tout $x'' \in E''$, l'application associant $g(x'', x)$ à $x \in E$ définit une application quasi-uniforme $\bar{g}_{x''}$ de u vers u' (à savoir $\bar{g} \circ [\bar{x}'', i_u]$). Soit g' l'application de E'' dans $M_q(u', u)$ qui associe $\bar{g}_{x''}$ à $x'' \in E''$; elle définit une application quasi-uniforme $\bar{g}'$ de u'' vers $\mathcal{Q}(u', u)$. En effet, $g'(A''_l)$ est contenu dans B_k , où $k = (i_j^l)_{j \in J} \in K$. Soit $V'/A_j /$ un entourage élémentaire de $\psi(k)$; comme V' appartient à $\phi'(i_j^l)$, il existe $V_l \in \phi''(l)$ tel que

$$g \times g(\pi(V_l \times \Delta_{A_j})) \subset V', \text{ où } \pi((x'', y''), (x, y)) = ((x'', x), (y'', y)),$$

ce qui implique $g' \times g'(V_l) \subset V'/A_j /$. Ainsi

$$\bar{g}' = (\mathcal{Q}(u', u), g', u'') \in \mathcal{Q} \text{ et } \bar{v} \circ (\bar{g}' \times i_u) = \bar{g},$$

car q est un foncteur fidèle. De plus $\bar{g}'$ est l'unique élément de $\mathcal{Q}$ vérifiant ces relations. Par suite $\times_u$ admet le foncteur

$$D(-, i_u): \bar{b} \rightarrow D(\bar{b}, i_u) \text{ de } \mathcal{Q}^0 \text{ vers } \mathcal{Q}^0$$

pour coadjoint.

3° Conservons les notations de la partie 2; soit n la bijection de $M_q(u', u'' \times u)$ dans $M_q(\mathcal{Q}(u', u), u'')$ qui associe à $\bar{g}$ l'unique $\bar{g}'$ tel que $\bar{v} \circ (\bar{g}' \times i_u) = \bar{g}$. Montrons que n définit un isomorphisme de

$$\mathcal{Q}(u', u'' \times u) = ((\hat{B}_k)_{k \in \hat{K}}, \hat{\psi}) \text{ sur } \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(u', u), u'') = ((\bar{B}_k)_{k \in \bar{K}}, \bar{\psi}).$$

Soit $\hat{k} = (i_j^l)_{(l,j) \in L \times J} \in \hat{K}$. A tout $l \in L$, on associe

$$k_l = (i_j^l)_{j \in J} \in K \quad \text{et} \quad \bar{k} = (k_l)_{l \in L} \in \bar{K}.$$

Montrons que $n(\hat{B}_{\hat{k}}) = \bar{B}_{\bar{k}}$. En effet, si $\bar{g} = (u', g, u'' \times u) \in \hat{B}_{\hat{k}}$, alors $g(A_l'' \times A_j) \subset A_{i_j^l}'$ pour tout $(l, j) \in L \times J$, d'où $n(\bar{g})(A_l'') \subset B_{k_l}'$ pour tout $l \in L$, c'est-à-dire $n(\bar{g}) \in \bar{B}_{\bar{k}}$. Inversement si $\bar{g}' \in \bar{B}_{\bar{k}}$, l'élément $\bar{g} = n^{-1}(\bar{g}')$ vérifie, pour tout $(l, j) \in L \times J$,

$$\bar{g}(A_l'' \times A_j) = v(\bar{g}'(A_l'') \times A_j) \subset v(B_{k_l}' \times A_j) \subset A_{i_j^l}'.$$

Donc $\bar{g}$ appartient à $\hat{B}_{\hat{k}}$. Soit $V/A_l/$ un entourage élémentaire de $\bar{\psi}(\bar{k})$; comme $V \in \psi(k_l)$, il existe une partie finie J' de J telle que

$$\bigcap_{j \in J'} V_j' / A_j / \subset V, \quad \text{où} \quad V_j' \in \phi'(i_j^l);$$

alors $(\bigcap_{j \in J'} V_j' / A_j /) / A_l'' /$ est contenu dans $V / A_l /$. Ainsi les intersections finies d'entourages élémentaires $(\bigcap_{j \in J'} V_j' / A_j /) / A_l'' /$ forment une base de $\bar{\psi}(\bar{k})$, et les intersections finies d'entourages élémentaires de la forme $V'' / A_l'' \times A_j /$, où $V'' \in \phi'(i_j^l)$, constituent une base de $\hat{\psi}(\hat{k})$. Comme

$$n \times n(\bigcap_{(l,j) \in L' \times J'} V_{l,j}'' / A_l'' \times A_j / = \bigcap_{l \in L'} (\bigcap_{j \in J'} V_{l,j}'' / A_j /) / A_l'' /,$$

si J' et L' sont des parties finies de J et L respectivement et si $V_{l,j}''$ appartient à $\phi'(i_j^l)$, la bijection n définit bien un isomorphisme.

DEFINITION. On appellera $\mathcal{Q}(u', u)$ la structure de pseudo-convergence quasi-uniforme relativement à (u, u') .

REMARQUE. Soit $u' = ((A_i')_{i \in I}, \phi')$ une structure quasi-uniforme sur E' et soit $P = (A_j)_{j \in J}$ un recouvrement d'un ensemble E tel qu'aucun des A_j ne soit vide. Notons $M(u', P)$ l'ensemble des applications f de E dans E' vérifiant la condition: Pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $f(A_j)$ soit contenu dans A_i' . Les démonstrations des premières propositions de ce paragraphe s'appliquent sans modification pour prouver qu'il existe une structure quasi-uniforme $\mathcal{Q}(u', P)$ sur $M(u', P)$ isomorphe à une sous-structure du produit de $(\mathcal{Q}(u', A_j))_{j \in J}$, et que cette structure quasi-uniforme $((B_k)_{k \in K}, \psi)$ est définie comme suit: $K = I^J$; si $k = (i_j)_{j \in J} \in K$, on a $B_k = \{f \in M(u', P) \mid f(A_j) \subset A_{i_j}'\}$ et $\psi(k)$ admet pour base l'ensem-

ble des intersections finies de $V'/A_j/$, où $V' \in \phi'(i_j)$ et

$$V'/A_j/ = \{ (f, f') \in M(u', P)^2 \mid [f, f'](A_j) \subset V' \}.$$

Si P' est un recouvrement de E moins fin que P , l'injection canonique de $M(u', P')$ dans $M(u', P)$ définit une application quasi-uniforme de $\mathcal{Q}(u', P')$ vers $\mathcal{Q}(u', P)$. Si $u = (P, \phi)$ est une structure quasi-uniforme, $\mathcal{Q}(u', u)$ s'identifie à une sous-structure de $\mathcal{Q}(u', P)$.

Supposons encore que

$$u = ((A_j)_{j \in J}, \phi) \quad \text{et} \quad u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$$

sont des structures quasi-uniformes sur E et sur E' . Soit $c(\tau(u'), \tau(u))$ la topologie de la convergence compacte sur l'ensemble des applications f de E dans E' telles que $(\tau(u'), f, \tau(u))$ soit continu. Nous notons T_c la topologie image, par la bijection associant (u', f, u) à f , de la topologie induite par $c(\tau(u'), \tau(u))$ sur l'ensemble $q(M_q(u', u))$ des applications f telles que (u', f, u) soit une application quasi-uniforme.

PROPOSITION. Soit σ un ensemble de parties S de E admettant E pour réunion. Il existe une structure quasi-uniforme $\mathcal{Q}_\sigma(u', u)$ sur $M_q(u', u)$, moins fine que $\mathcal{Q}(u', u)$, isomorphe à une sous-structure de $\mathcal{Q}(u', P)$, si P est le recouvrement de E formé des $A_j \cap S$ non vides, où $j \in J$ et $S \in \sigma$. Si u appartient à $(\mathcal{Q}_1)_0$ et si σ est l'ensemble c des compacts de $\tau(u)$, alors T_c est plus fine que $\tau(\mathcal{Q}_\sigma(u', u))$ et moins fine que $\tau(\mathcal{Q}(u', u))$.

PREUVE. Appliquons la remarque précédente au recouvrement $P = (P_z)_{z \in Z}$ de E , où

$$Z = \{ (j, S) \in J \times \sigma \mid A_j \cap S \neq \emptyset \} \quad \text{et} \quad P_{(j, S)} = A_j \cap S.$$

Soit t la bijection de $M_q(u', u)$ sur une partie de $M(u', P)$ associant f à (u', f, u) . Définissons $\mathcal{Q}_\sigma(u', u)$ comme étant la structure quasi-uniforme image par t^{-1} de la structure induite par $\mathcal{Q}(u', P)$ sur $t(M_q(u', u))$. Le recouvrement P étant plus fin que le recouvrement $(A_j)_{j \in J}$, la structure $\mathcal{Q}_\sigma(u', u)$ est moins fine que $\mathcal{Q}(u', u)$.

1° Posons $\mathcal{Q}_\sigma(u', u) = ((D_l)_{l \in L}, \Sigma)$. Par construction, L est l'ensemble des $l = (i_z)_{z \in Z} \in Z$ tels que

$$D_l = \{ f \in M_q(u', u) \mid f(P_z) \subset A_{i_z} \forall z \in Z \}$$

soit non vide; le filtre $\Sigma(l)$, pour $l = (i_z)_{z \in Z}$ admet pour base l'ensemble des intersections finies d'entourages élémentaires

$$V'/P_z / = \{ (f', f) \in M_q(u', u) \times M_q(u', u) \mid [f', f](P_z) \subset V' \},$$

où $V' \in \phi(i_z)$.

2° Supposons que u appartient à $(\mathcal{Q}_1)_0$ et soit $\bar{f} = (u', f, u)$ un élément de $\mathcal{Q}$. Si W' est un ouvert de $\tau(u')$ et C un compact de $\tau(u)$ tel que $f(C)$ soit contenu dans W' , posons

$$\langle W', C \rangle = \{ f' \in M_q(u', u) \mid f'(C) \subset W' \}.$$

Le filtre $\mathcal{V}(f)$ des voisinages de f dans T_c a pour base l'ensemble des intersections finies de tels $\langle W', C \rangle$. Par hypothèse, A_j est ouvert et fermé dans $\tau(u)$; l'ensemble J' des $j \in J$ tels que $A_j \cap C$ soit non vide est donc fini; de plus $A_j \cap C$ est un compact C_j de $\tau(u)$ et

$$\langle W', C \rangle = \bigcap_{j \in J'} \langle W', C_j \rangle.$$

Ainsi $\mathcal{V}(f)$ a aussi pour base l'ensemble des intersections finies des $\langle W', C \rangle$ tels que C soit contenu dans l'un des A_j et que $f(A_j) \subset W'$. Par ailleurs, si f appartient à B_k , où $k = (i_j)_{j \in J}$, le filtre des voisinages de f dans T_c a pour base l'ensemble des intersections finies de voisinages $W/A_j/(f)$, où $W/A_j/$ est un entourage élémentaire tel que $W \in \phi'(i_j)$. - Soit $\langle W', C \rangle$ un voisinage élémentaire de f , où $C \subset A_j$. Il existe un $i \in I$ tel que $f(A_j)$ soit contenu dans A'_i . Pour tout $x \in C$, comme W' est un voisinage de $f(x)$, il existe $V'_x \in \phi'(i)$ tel que $V'_x(f(x)) \subset W'$ et il existe un $V''_x \in \phi'(i)$ symétrique vérifiant $V''_x \circ V''_x \subset V'_x$. Puisque $(W_x)_{x \in C}$, où W_x est l'intérieur de $\bar{f}(V''_x(f(x)))$, est un recouvrement ouvert du compact C , il existe une partie finie X de C telle que

$$C \subset \bigcup_{x \in X} W_x, \text{ et on a } W_j = \bigcap_{x \in X} V''_x \in \phi'(i).$$

Soit $x' \in C$; nous avons $W_j(f(x)) \subset W'$. En effet, il existe $x \in X$ tel que $x' \in W_x$ et alors $f(x') \in V''_x(f(x))$. Supposons $y \in W_j(f(x'))$. Comme

$$(f(x), y) = (f(x), f(x') \circ (f(x'), y)) \in V''_x \circ V''_x \subset V'_x,$$

y appartient à $V'_x(f(x)) \subset W'$. Par conséquent $W/A_j/(f) \subset \langle W', C \rangle$,

de sorte que T_c est moins fine que $\tau(\mathcal{Q}(u', u))$.

3° Supposons toujours $u \in (\mathcal{Q}_I)_0$ et prenons pour σ l'ensemble c des compacts de $\tau(u)$. Soit $\bar{f} = (u', f, u)$ une application quasi-uniforme appartenant à D_I , où $I = (i_z)_{z \in Z}$. Considérons l'entourage élémentaire $V'/P_z/$ de $\Sigma(I)$, où $z = (j, C) \in J \times c$. Soit V'' un élément symétrique de $\phi'(i_z)$ tel que $V'' \circ V'' \subset V'$, où $V' \in \phi'(i_z)$ est donné; soit $x \in P_z = A_j \cap C$; on note W'_x l'intérieur de $V''(f(x))$. Comme f est continue de $\tau(u)$ dans $\tau(u')$ et P_z compact, il existe un voisinage W_x de x dans $\tau(u)$ tel que $f(W_x) \subset W'_x$, et il existe un voisinage compact V_x de x contenu dans $W_x \cap P_z$. Soit $\overset{\circ}{V}_x$ l'intérieur de V_x ; l'ensemble des $\overset{\circ}{V}_x$ forme un recouvrement ouvert du compact P_z ; il existe donc une partie finie X de P_z telle que $P_z \subset \bigcup_{x \in X} \overset{\circ}{V}_x$. L'ensemble $W = \bigcap_{x \in X} \langle W'_x, V_x \rangle$ est un voisinage de f dans T_c . On obtient

$$W' \subset V'/P_z/(f), \quad \text{si } W' = W \cap M_q(u', u).$$

En effet, si $\bar{f}' = (u', f', u)$ appartient à W' et x' à P_z , il existe $x \in X$ tel que $x' \in V_x$ et nous avons:

$$(f(x'), f'(x')) = (f(x'), f(x)) \circ (f(x), f'(x')) \in V'' \circ V'' \subset V'.$$

Par conséquent $\tau(\mathcal{Q}_c(u', u))$ est moins fine que T_c .

6. Structure de convergence quasi-uniforme sur $\mathfrak{M}(E', E)$.

Etant donnés un ensemble E et une structure quasi-uniforme sur E' , nous allons munir l'ensemble $\mathfrak{M}(E', E)$ de toutes les applications de E dans E' d'une structure quasi-uniforme.

Soient E' un ensemble et $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$ une structure quasi-uniforme sur E' .

PROPOSITION. Soit E'' l'ensemble obtenu par adjonction à E' d'un élément $a \notin E'$. Il existe une structure quasi-uniforme u'' sur E'' qui est la moins fine telle que $u''/E' = u'$.

PREUVE. Posons $I' = I \cup \{\hat{i}\}$, où $\hat{i} \notin I$. Soit $(A''_i)_{i \in I'}$ la partition de E'' telle que:

$$A''_{\hat{i}} = \{a\} \quad \text{et} \quad A''_i = A'_i \quad \text{si } i \neq \hat{i}.$$

la structure quasi-uniforme u'' cherchée est définie par $u'' = ((A_i'')_{i \in I}, \phi'')$, où ϕ'' associe à i le filtre $\{E'' \times E''\}$ et à $i \in I$ le filtre sur $E'' \times E''$ engendré par $\phi'(i)$.

PROPOSITION. Soient E un ensemble, $u' = ((A_i')_{i \in I}, \phi')$ une structure quasi-uniforme sur E' et $C = \mathfrak{M}(E', E)$. Si $f \in C$, on note I_f l'ensemble des $i \in I$ tels que $\tilde{f}^I(A_i') \neq \emptyset$. Alors il existe une structure quasi-uniforme, $U = ((C_s)_{s \in S}, \psi)$ sur C , définie comme suit:

S est l'ensemble des parties $s \neq \emptyset$ de I de cardinal $\bar{s}$ inférieur ou égal au cardinal de E . Si $s \in S$, on a $C_s = \{f \in C \mid I_f = s\}$ et $\psi(s)$ a pour base l'ensemble des intersections finies des $V_i' [E]$, où $i \in s$, $V_i' \in \phi'(i)$ et $V_i' [E] = \{(f', f) \in C \times C \mid \tilde{f}^I(A_i') = \tilde{f}'^I(A_i') \neq \emptyset, [f', f](\tilde{f}^I(A_i')) \subset V_i'\}$.

PREUVE. 1° A tout $i \in I$, on associe un a_i n'appartenant pas à E et tel que tous les a_i soient différents. On pose

$$\hat{A}_i' = A_i' \cup \{a_i\} \text{ et } \hat{E}' = \bigcup_{i \in I} \hat{A}_i'.$$

On va définir une structure quasi-uniforme $((\hat{A}_i')_{i \in I}, \hat{\phi}')$ sur $\hat{E}'$ dont la restriction à E' soit u' . Soit $i \in I$. Posons

$$\hat{V}' = V' \cup \{(a_i, a_i)\}, \text{ pour tout } V' \in \phi'(i);$$

les ensembles $\hat{V}'$ forment une base d'un filtre $\hat{\phi}'(i)$. Soit $V' \in \phi'(i)$; alors $\hat{V}'$ est symétrique et contient la diagonale de $\hat{A}_i' \times \hat{A}_i'$. Si V'' est un des éléments de $\phi'(i)$ associés à V' par l'axiome 2 des structures quasi-uniformes, et si $\hat{V}''$ rencontre la diagonale de $\hat{A}_j' \times \hat{A}_j'$ pour un $j \in I$, on a $\Delta_{A_j'} \cap V'' \neq \emptyset$, de sorte qu'il existe $W \in \phi'(j)$ tel que $V'' \circ W \subset V'$; à W correspond $\hat{W} \in \hat{\phi}'(j)$, vérifiant $\hat{V}'' \circ \hat{W} \subset \hat{V}'$. Par suite $((\hat{A}_i')_{i \in I}, \hat{\phi}')$ est une structure quasi-uniforme $\hat{u}'$.

2° Soient E'' et J les ensembles obtenus en ajoutant à $\hat{E}'$ un $a \notin \hat{E}'$ et à I un $j \notin I$. Soit u'' la structure quasi-uniforme sur E'' déduite de u' (proposition précédente): $u'' = ((A_j'')_{j \in J}, \phi'')$, où $A_i'' = \hat{A}_i'$ si $i \in I$, où $A_j'' = \{a\}$ et où $\phi''(j) = \{E'' \times E''\}$. Soit U'' la structure de pseudo-convergence $\mathcal{Q}(u'', E)$ sur l'ensemble M'' des applications g de E dans E'' telles que $g(E)$ soit contenu dans l'un des A_j'' . On a $U'' = ((\mathcal{Q}_j'')_{j \in J}, \Phi'')$, où $\mathcal{Q}_j'' = \{\tilde{a}\}$, en notant $\tilde{a}$ l'application constante sur a , et où

$$\mathcal{Q}_i'' = \{ g \in M'' \mid g(E) \subset \hat{A}_i' \} \quad \text{si } i \in I;$$

$\phi''(\hat{f}) = \{ M'' \times M'' \}$ et, pour $i \in I$, le filtre $\phi''(i)$ a pour base l'ensemble des $\hat{V}_i' \langle E \rangle$, où $V_i' \in \phi'(i)$.

3° Notons $\mathcal{Q} = ((B_k)_{k \in K}, \Omega)$ la structure quasi-uniforme sur M''^I produit de la famille $(U_i'')_{i \in I}$ de structures quasi-uniformes telle que $U_i'' = U''$ pour tout $i \in I$. Il existe une injection de C dans M''^I . En effet, soit $f \in C$. Pour tout $i \in I$, notons $\hat{f}_i$ l'application de E dans E'' définie comme suit:

$$\begin{aligned} \text{si } i \in I_f, \quad \hat{f}_i(x) &= f(x) \quad \text{pour } x \in \tilde{f}^I(A_i'), \\ \hat{f}_i(x) &= a_i \quad \text{pour } x \notin \tilde{f}^I(A_i'); \\ \text{si } i \notin I_f, \text{ alors } \hat{f}_i &= \bar{a}. \end{aligned}$$

L'application associant $(\hat{f}_i)_{i \in I}$ à $f \in C$ est une bijection P de C sur une partie C' de M''^I . On a

$$\hat{f}_i \in \mathcal{Q}_i'' \quad \text{si } i \in I_f \quad \text{et} \quad \hat{f}_i \in \mathcal{Q}_f'' \quad \text{si } i \notin I_f.$$

Nous désignerons par $\mathcal{Q}' = ((C_l')_{l \in L}, \psi')$ la structure quasi-uniforme sur C image par P^{-1} de $\mathcal{Q} / C'$.

4° Par construction du produit, $K = J^I$. Si $k = (j_i)_{i \in I} \in K$, posons $s_k = \{ i \in I \mid j_i \neq j \}$; comme $B_k = \prod_{i \in I} \mathcal{Q}_{j_i}'$, on voit que $P(f) \in B_k$, où $f \in C$, équivaut à $\hat{f}_i \in \mathcal{Q}_{j_i}''$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire à

$$s_k = I_f \quad \text{et} \quad j_i = i \quad \text{pour tout } i \in s_k.$$

Ainsi L est formé des $k = (j_i)_{i \in I} \in K$ tels que $j_i = i$ pour $i \in s_k$ et qu'il existe une application f de E dans E' dont l'image $f(E)$ rencontre A_i' pour tout $i \in s_k$. Il existe une telle application ssi $s_k \neq \emptyset$ et si le cardinal de s_k est inférieur ou égal à celui de E . Si $k \in L$, on trouve

$$C_k' = P^{-1}(B_k \cap C') = \{ f \in C \mid I_f = s_k \}.$$

5° Notons t la bijection associant $((g_i')_{i \in I}, (g_i)_{i \in I}) \in M''^I \times M''^I$ à $(g_i', g_i)_{i \in I} \in (M'' \times M'')^I$. Soit $k = (j_i)_{i \in I} \in K$. Une base $\Omega'(k)$ du filtre $\Omega(k)$ est formée des $W = t(\prod_{i \in I} W_i)$, où il existe une partie finie I_W de I vérifiant les conditions:

$$s_k \text{ est contenu dans le complémentaire de } I_W \text{ dans } I,$$

$$W_i = M'' \times M'' \quad \text{pour } i \notin I_W,$$

si $i \in I_W$, il existe $V'_i \in \phi(j_i)$ tel que $W_i = \hat{V}'_i < E >$.

Supposons $k \in L$; une base de $\psi'(k)$ est formée des $P^{-1}(W \cap C' \times C')$, où $W \in \Omega'(k)$. Puisque $W' = P^{-1}(W \cap C' \times C')$ est l'ensemble des couples $(f', f) \in C \times C$ tels que $(\hat{f}'_i, \hat{f}_i) \in \hat{V}'_j < E >$ pour tout $i \in I_W$, on obtient $W' = \bigcap_{i \in I_W} V'_i [E]$, en posant:

$$V'_i [E] = \{ (f', f) \in C \times C \mid \bar{f}'(A'_i) = \bar{f}(A'_i) = A \neq \emptyset, [f', f](A) \subset V'_i \}.$$

Par suite $\psi'(k)$ est engendré par l'ensemble des $V'_i [E]$, où $i \in s_k$ et où $V'_i \in \phi(i)$. En associant s_k à $k \in L$, on définit une bijection d de L sur $S = \{ s \subset I \mid s \neq \emptyset, \bar{s} \leq \bar{E} \}$. Donc $((C_s)_{s \in S}, \psi)$, où

$$C_s = C'_l \quad \text{et} \quad \psi(s) = \psi'(l) \quad \text{si} \quad d^{-1}(s) = l,$$

est une structure quasi-uniforme isomorphe à Q' .

EXEMPLE. Si u' s'identifie à une structure uniforme, la structure quasi-uniforme U s'identifie à la structure uniforme de la convergence uniforme sur $\mathfrak{M}(E', E)$.

7. Espaces fonctionnels quasi-métriques.

Dans ce paragraphe, nous supposons que $s' = (A'_i, d'_i)_{i \in I}$ est une structure quasi-métrique sur E' , dont la structure quasi-uniforme sous-jacente est notée $u' = ((A'_i)_{i \in I}, \phi')$. Si $i \in I$ et si $a > 0$ est un nombre réel, nous posons $V_i(a) = \bar{d}'_i([0, a])$; les $V_i(a)$ forment une base de $\phi'(i)$.

Soit E un ensemble; M' désigne encore l'ensemble des applications f de E dans E' telles que $f(E)$ soit contenu dans l'un des A'_i et la structure de pseudo-convergence quasi-uniforme sur M' est notée

$$\mathcal{Q}(u', E) = ((\mathcal{Q}'_i)_{i \in I}, \Phi').$$

PROPOSITION. Il existe un quasi-écart $(D'_i)_{i \in I}$ sur M' admettant $\mathcal{Q}(u', E)$ pour structure quasi-uniforme sous-jacente.

PREUVE. 1° Soit $i \in I$. Considérons l'application D'_i de $\alpha(D'_i)$ dans la demi-droite $[0, \infty]$ suivante: $\alpha(D'_i)$ est l'ensemble M_i des couples (f, g) tels que $(f, g) \in M' \times M'$ et $(f(x), g(x)) \in \alpha(d'_i)$ pour tout $i \in I$; on a

$$D'_i(f, g) = \sup_{x \in E} d'_i(f(x), g(x)), \quad \text{pour tout } i \in I.$$

M_i est une partie symétrique de $M' \times M'$ contenant $\mathcal{Q}'_i \times \mathcal{Q}'_i$. On a

$$D'_i(f, f) = 0 \quad \text{si } f \in \mathcal{Q}'_i \quad \text{et} \quad D'_i(f, g) = D'_i(g, f).$$

Soit a_i un élément associé à d'_i par l'axiome 3 des quasi-écarts et soit $i' \in I$ tel qu'il existe $f \in \mathcal{Q}'_{i'}$ vérifiant $D'_i(f, f) \leq a_i$. Cette relation entraînant $f(x) \in A'_{i'}$ et $(f(x), f(x)) \in V_{i'}(a_i)$, il existe d'après ce même axiome 3 un réel $b_{i'} > 0$ tel que

$$(x', y') \in \alpha(d'_i) \quad \text{et} \quad d'_i(x', y') \leq d'_i(x', z') + d'_i(z', y'),$$

si $(x', z') \in V_i(a_i)$ et $(z', y') \in V_{i'}(b_{i'})$. Il en résulte

$$(f, g) \in M_i \quad \text{et} \quad D'_i(f, g) \leq D'_i(f, b) + D'_i(b, g),$$

si $(f, b) \in \bar{D}_i^{-1}([0, a_i])$ et $(b, g) \in \bar{D}_i^{-1}([0, b_{i'}])$.

2° Ceci prouve que $(D'_i)_{i \in I}$ est un quasi-écart sur M' ; soit $U' = ((\mathcal{Q}'_i)_{i \in I}, \psi)$ la structure quasi-uniforme sous-jacente. Le filtre $\psi(i)$ admet pour base l'ensemble des $\bar{U}_i(a) = \bar{D}_i^{-1}([0, a])$, où $a > 0$. Nous avons $\bar{U}_i(a) = V_i(a) \leq E$. Comme les $V_i(a)$, où $a > 0$, forment une base de $\Phi'(i)$, les $\bar{U}_i(a)$ forment une base de $\Phi'(i)$. Donc $\Phi' = \psi$ et U' est identique à $\mathcal{Q}(u', E)$.

Soit $t > 0$ un nombre réel. Nous dirons que la structure quasi-métrique s' est t -régulière si elle vérifie la condition:

3° Si i et i' sont des éléments de I tels que $V_i(t)$ rencontre la diagonale de $A'_i \times A'_{i'}$, on a $V_i(t) \circ V_{i'}(t) \subset \alpha(d'_i)$ et

$$d'_i(x', y') \leq d'_i(x', z') + d'_{i'}(z', y') \quad \text{lorsque} \quad (x', z') \in V_i(t) \\ \text{et} \quad (z', y') \in V_{i'}(t).$$

(Autrement dit, les a_i et $b_{i'}$ dont l'axiome 3 des quasi-écarts assurent l'existence peuvent être choisis égaux à t).

PROPOSITION. Soit $s = (A_j, d_j)_{j \in J}$ une structure quasi-métrique sur E . Soit $t > 0$ un nombre réel tel que s' soit t -régulière et que d_j soit borné par t pour tout $j \in J$. Soit Q' l'ensemble des $f' \in M'$ tels que (s', f', s) soit une application 1/3-quasi-métrique. Si $f \in M'$ est adhérent à Q' dans $\tau(\mathcal{Q}(u', E))$, alors (s', f, s) est une application quasi-métrique.

PREUVE. Soient $j \in J$ et $(x, y) \in \alpha(d_j)$. Par définition de M' il existe un

$i \in I$ tel que $f(A_j) \subset f(E) \subset A'_i$. Comme s est une structure quasi-métrique, si $d_j(x, y) = 0$, on a $x = y$, d'où $d'_i(f(x), f(x)) = 0$. Supposons donc $d_j(x, y) = b > 0$; par hypothèse, $b \leq t$. Puisque f est adhérent à Q' , il existe $g \in Q'$ tel que $D'_i(f, g) \leq b/3$ (avec les notations précédentes), d'où

$$(f(z), g(z)) \in V_i(b/3) \text{ pour tout } z \in E.$$

Il existe $i \in I$ tel que $g(A_j)$ soit contenu dans A'_i ; la diagonale de $A'_i \times A'_i$ rencontre $V_i(t)$, car $g(x) \in A'_i$ et les relations

$$\begin{aligned} (g(x), g(x)) &= ((g(x), f(x)) \circ (f(x), g(x))), \\ d'_i(g(x), f(x)) &= d'_i(f(x), g(x)) \leq b/3 \end{aligned}$$

entraînent $d'_i(g(x), g(x)) \leq 2b/3 \leq t$. Considérons

$$(f(x), f(y)) = (f(x), g(x)) \circ (g(x), g(y)) \circ (g(y), f(y)).$$

Nous avons

$$d'_i(g(y), f(y)) \leq b/3 \leq t/3$$

et, g appartenant à Q' ,

$$d'_i(g(x), g(y)) \leq b/3 \leq t/3,$$

donc

$$d'_i(g(x), f(y)) \leq 2b/3 \leq t;$$

de plus

$$d'_i(f(x), g(x)) \leq b/3 \leq t/3.$$

Il s'ensuit

$$d'_i(f(x), f(y)) \leq b = d_j(x, y).$$

Ainsi (s', f, s) est bien une application quasi-métrique.

Supposons que $s = (A_j, d_j)_{j \in J}$ soit une structure quasi-métrique sur E , dont la structure quasi-uniforme sous-jacente est $u = ((A_j)_{j \in J}, \phi)$. Désignons par $A(s', s)$ l'ensemble des applications f de E dans E' telles que, pour tout $j \in J$, il existe un $i_j \in I$ vérifiant $f(A_j) \subset A'_{i_j}$. Soient $M_q(u', u)$ l'ensemble des applications quasi-uniformes de u vers u' et M_q l'ensemble des $f \in A(s', s)$ telles que $(u', f, u) \in M_q(u', u)$.

PROPOSITION. Si J est fini, il existe un quasi-écart sur $A(s', s)$ induisant sur M_q un quasi-écart dont la structure quasi-uniforme sous-jacente est isomorphe à $\mathcal{Q}(u', u)$.

PREUVE. Pour tout $j \in J$, considérons le quasi-écart $\mathcal{D}_j = (D_{ij}^j)_{i \in I}$ (construit ci-dessus) ayant $\mathcal{Q}(u', A_j)$ pour structure quasi-uniforme sous-jacente. Il existe [3] un quasi-écart $\hat{\mathcal{D}}$ sur X , produit de la famille finie $(\mathcal{D}_j)_{j \in J}$ de quasi-écarts. On définit une bijection p de $A(s', s)$ sur une partie X' de X en associant à $f \in A(s', s)$ la famille $(f_j)_{j \in J}$ des restrictions f_j de f à A_j . Soit $\mathcal{D}$ le quasi-écart sur $A(s', s)$ image par p^{-1} du quasi-écart induit par $\hat{\mathcal{D}}$ sur X' . Posons $\mathcal{D} = (D_k)_{k \in K}$ et notons $(B_k)_{k \in K}$ la partition de $A(s', s)$ associée. Nous avons $K \subset I^J$; si $k = (i_j)_{j \in J} \in K$, alors

$$B_k = \{f \in A(s', s) \mid f(A_j) \subset A_{i_j}'\},$$

$\alpha(D_k)$ est l'ensemble des $(f, g) \in A(s', s) \times A(s', s)$ tels que

$$(f(x), g(x)) \in \alpha(d_{i_j}') \text{ pour tout } x \in A_j$$

et, si $(f, g) \in \alpha(D_k)$,

$$D_k(f, g) = \sup_{j \in J} \left(\sup_{x \in A_j} d_{i_j}'(f(x), g(x)) \right).$$

L'axiome 3 des quasi-écarts est vérifié en prenant $a_k = \inf_{j \in J} a_{i_j}$, où a_{i_j} est un élément associé à i_j par cet axiome appliqué à s' . Puisque $\mathcal{Q}(u', A_j)$ est sous-jacente à $\mathcal{D}_j$ pour tout $j \in J$, la structure quasi-uniforme sous-jacente à $\hat{\mathcal{D}}$ est la structure quasi-uniforme produit de $(\mathcal{Q}(u', A_j))_{j \in J}$. Par suite la structure quasi-uniforme sous-jacente à $\mathcal{D}$ induit sur M_q une structure quasi-uniforme qui, d'après la construction de $\mathcal{Q}(u', u)$, est l'image de $\mathcal{Q}(u', u)$ par la bijection associant f à $(u', f, u) \in M_q(u', u)$.

Bibliographie.

1. C. EHRESMANN, Catégories topologiques, *Indig. Math.* 28, n° 1 (1966).
2. A. BASTIANI, *Topologie, chap. IV (Espaces fonctionnels)*, Cours multigraphié, Amiens, 1969.
3. G. PALIAS, *Sur la catégorie des applications quasi-uniformes* (Thèse de troisième cycle, multigraphiée, Paris 1967).
4. C. EHRESMANN, *Algèbre, 1^{re} partie*, C. D. U., Paris 1968.
5. COOK - FISCHER, Uniform convergence structures, *Math. Ann.* 173 (1967).

Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
33 rue Saint-Leu, 80 - AMIENS.