

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

FRANÇOIS FOLTZ

Sur la domination des catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 12, n° 1 (1971), p. 93-110

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_1_93_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DOMINATION DES CATEGORIES

par François FOLTZ

Introduction.

Le texte suivant constitue la première partie d'un travail sur «la fermeture des catégories dominées».

Soient q un foncteur (pas nécessairement fidèle) vers la catégorie des applications associée à un univers et R un ensemble de q -multimorphismes. On définit les catégories (R, q) -dominées, dont à la fois les catégories q -dominées et les catégories fortement q -dominées sont des cas particuliers. On relie cette notion à celle de (R, q) -produit tensoriel, qui généralise et affine les q -produits tensoriels considérés dans [4]. Le principal résultat est le suivant: Soient ${}^R\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs (R, q) -dominés et $\bar{R}$ une partie «stable» de R . Si q est saturé, si sa source est à limites inductives et s'il existe des foncteurs (R, q) -produit tensoriel et $(\bar{R}, q)$ -produit tensoriel compatibles avec «assez» de limites, le foncteur injection de $\bar{R}\mathcal{F}$ vers ${}^R\mathcal{F}$ admet un adjoint. Autrement dit, toute catégorie (R, q) -dominée E peut être «universellement» plongée dans une catégorie $(\bar{R}, q)$ -dominée $\bar{E}$. Si de plus q est compatible avec les limites inductives, E et $\bar{E}$ ont les mêmes catégories sous-jacentes. Ce résultat permet par exemple d'associer canoniquement à une catégorie q -dominée une catégorie fortement q -dominée.

Ces théorèmes seront utilisés dans la suite du travail: On y montrera que ${}^R\mathcal{F}$ est R_t -hyperdominée [7], où R_t associe à un foncteur (R, q) -dominé sa restriction aux unités. On indiquera ensuite des conditions pour que ${}^R\mathcal{F}$ soit tensoriellement R_t -dominée [7], un produit tensoriel (au sens de la domination) s'identifiant à un $(\delta(R), R_t)$ -produit tensoriel, pour une certaine classe $\delta(R)$; si $\bar{R} \subset R$, un $(\delta(\bar{R}), R_t)$ -produit tensoriel «est» une $(\bar{R}\mathcal{F}, {}^R\mathcal{F})$ -projection. Enfin, sous des hypothèses un peu plus fortes la catégorie ${}^R\mathcal{F}$ est monoïdale fermée [8].

Notations.

Nous utilisons les notations de [1], [2] et [5]. En particulier une catégorie est souvent notée C' , où C est l'ensemble sous-jacent; C'_0 est l'ensemble de ses unités; l'application source est notée α , l'application but β ; la duale de C' est C^* . Un foncteur constant sur une unité e est représenté par le même symbole e , une transformation naturelle constante sur un élément x est aussi notée x .

On suppose que $\mathcal{U}$ est un univers contenu dans un univers $\hat{\mathcal{U}}$ et appartenant à $\hat{\mathcal{U}}$. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ (resp. $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{F}}$) la catégorie pleine des applications et celle des foncteurs associées à $\mathcal{U}$ (resp. à $\hat{\mathcal{U}}$). Π et $\bar{\Pi}$ (resp. $\hat{\Pi}$ et $\hat{\bar{\Pi}}$) désignent à la fois les foncteurs produit canonique et somme canonique sur $\mathcal{M}$ et sur $\mathcal{F}$ (resp. sur $\hat{\mathcal{M}}$ et sur $\hat{\mathcal{F}}$).

On suppose donné un foncteur $q = (\mathcal{M}, \underline{q}, K')$ de K' vers $\mathcal{M}$, où K appartient à $\hat{\mathcal{U}}$.

Rappelons qu'une catégorie q -dominée ([1], [5]) est un couple $E = (\varepsilon, C')$ d'une catégorie C' et d'un foncteur ε de $C' \times C^*$ vers K' tel que $q \cdot \varepsilon$ soit le foncteur $\text{Hom}_{C'}$. On désigne par $[E]$ le graphe q -dominé sous-jacent à E , c'est-à-dire le couple $(\varepsilon_0, [C'])$, où $[C']$ est le graphe orienté sous-jacent à C' et ε_0 la restriction de ε à $C'_0 \times C'_0$.

Si $E = (\varepsilon, C')$ et $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}')$ sont des catégories q -dominées, on appelle *foncteur q -dominé de E vers $\bar{E}$* un triplet $\bar{v} = (\bar{E}, (\tau, \underline{v}), E)$, où $\underline{v} = (\bar{C}', \underline{v}, C')$ est un foncteur, dit *foncteur sous-jacent à $\bar{v}$* , et où $(\bar{\varepsilon} \cdot (v \Pi v^*), \tau, \varepsilon)$ est une transformation naturelle se projetant par q sur la transformation naturelle canonique de $\text{Hom}_{C'}$ vers $\text{Hom}_{\bar{C}'}$ ($v \Pi v^*$) (telle que $q(\tau(e', e))$ soit une restriction de v). Pour simplifier, on pose

$$\bar{v}(e', e) = \tau((e', e)), \text{ pour tout } (e', e) \in C'_0 \times C'_0.$$

Si q est fidèle, $\bar{v}$ est entièrement déterminé par le triplet $(\bar{E}, \underline{v}, E)$, ce qui justifie la notation utilisée dans [5].

On généralise d'une manière analogue la définition des homomorphismes entre graphes orientés q -dominés (donnée dans [5] pour q fidèle). En particulier l'homomorphisme sous-jacent au foncteur q -dominé v est $[\bar{v}] = ([\bar{E}], (\tau, \underline{v}), [E])$.

1. q -multimorphismes.

Soient e une unité de K' et $(e_\nu)_{\nu \in N}$ une famille d'unités de K' , où $N \in \mathcal{U}$. Posons

$$E_\nu = \prod_{\mu \in N - \{\nu\}} q(e_\mu) \quad \text{et} \quad \bar{E} = \prod_{\nu \in N} E_\nu.$$

DEFINITION 1. On appelle q -multimorphisme de $(e_\nu)_{\nu \in N}$ vers e une famille $f = (f_y)_{y \in \bar{E}}$ (notée aussi (f_y)) d'éléments de K vérifiant:

1. $\beta(f_y) = e$, pour tout y de $\bar{E}$ et $\alpha(f_{(\nu, \nu)}) = e_\nu$, pour tout ν de E_ν .

2. Si $E = \prod_{\nu \in N} q(e_\nu)$, il existe une application $\underline{Q}(f) = (\underline{q}(e), \underline{f}, E)$ telle que, pour tout $(x_\nu)_{\nu \in N}$ et tout ν de N , l'on ait:

$$\underline{f}((x_\nu)_{\nu \in N}) = \underline{q}(f_y)(x_\nu), \quad \text{où } y = ((x_\mu)_{\mu \in N - \{\nu\}}, \nu).$$

On pose $e = \beta(f)$ et $(e_\nu)_{\nu \in N} = \alpha(f)$. Si q est fidèle, f est entièrement déterminé par le triplet $(e, \underline{f}, (e_\nu)_{\nu \in N})$ et $\underline{Q}(f)$ est q -concordante pour $(e, (e_\nu)_{\nu \in N})$ [4]. L'ensemble N est dit l'ensemble des indices de f , $\alpha(f)$ la source de f et $\beta(f)$ son but.

Soient $(N_\mu)_{\mu \in M}$ une partition de N et $\bar{e} = (e_\mu)_{\mu \in M}$ (resp. $\bar{e}_\mu = (e_{\nu_\mu})_{\nu_\mu \in N_\mu}$) une famille d'unités de K' . La donnée d'un q -multimorphisme h de source $\bar{e}$ et d'une famille de q -multimorphismes $(g^\mu)_{\mu \in M}$, où $\alpha(g^\mu) = \bar{e}_\mu$ et $\beta(g^\mu) = e_\mu$, permet de définir un q -multimorphisme

$$f = (f_y) = h \cdot (g^\mu)_{\mu \in M}$$

de source $(e_\nu)_{\nu \in N}$, de but $\beta(h)$ et tel que $f_y = h_z \cdot g_t^\mu$, où

$$t = ((x_{\nu_\mu})_{\nu_\mu \in N_\mu - \{\bar{\nu}\}}, \bar{\nu}) \quad \text{et} \quad z = ((z_\mu)_{\mu \in M - \{\bar{\mu}\}}, \bar{\mu}),$$

si $\bar{\nu} \in N_{\bar{\mu}}$, si $y = ((x_\nu)_{\nu \in N - \{\bar{\nu}\}}, \bar{\nu})$ et si $z_\mu = \underline{Q}(g^\mu)((x_{\nu_\mu})_{\nu_\mu \in N_\mu})$.

Soit $\mathcal{J}$ un sous-ensemble de $\mathcal{U}$, contenant un ensemble réduit à un élément et contenant avec un ensemble toutes ses parties. Un ensemble R de q -multimorphismes dont les ensembles d'indices appartiennent à $\mathcal{J}$ est dit *stable* s'il est stable pour la loi de composition précédente et si la famille à un seul élément (e) appartient à R pour tout $e \in K'_0$. Si $\mathcal{U} = R$ et si R contient tous les q -multimorphismes, on pose $R = S(q)$.

2. (R, q) -produit tensoriel.

La notion de q -produit tensoriel définie dans [3] et [4] s'étend au cas d'un foncteur q non fidèle. Soit R un ensemble stable de q -multimorphismes. Les catégories K' et $\prod_{N \in \mathcal{J}} (\prod_{\nu \in N} K')$ opèrent à droite et à gauche respectivement sur R . Désignons par $T(R)$ (ou $T(q)$, si $R = S(q)$) la catégorie joint par R des deux catégories précédentes. L'application $f \rightarrow \underline{Q}(f)$ se prolonge en un foncteur $\underline{Q} = (\mathbb{M}, \underline{Q}, T(R))$ admettant q et $\prod_{\nu \in N} \cdot (\prod_{\nu \in N} q)$ pour restrictions.

DEFINITION 2. Un foncteur (R, q) -produits tensoriels est un adjoint $\otimes$ du foncteur $j = (T(R), \underline{\cdot}, K')$. Un j -projecteur (resp. une j -structure libre) associé(e) à $\bar{e}$ est appelé(e) un (R, q) -produit tensoriel naturalisé (resp. tensoriel) de $\bar{e}$.

Si R n'est pas précisé, c'est que $R = S(q)$; si R est l'ensemble des q -multimorphismes d'ensembles d'indices finis, on dira que $\otimes$ est un foncteur q -produits tensoriels finis.

PROPOSITION 1. Si K' est à $\mathbb{M}_0$ -sommes et si q est à structures quasi-quotients, il existe un foncteur q -produits tensoriels.

PREUVE. Ne faisant pas intervenir la fidélité du foncteur q , la démonstration du théorème d'existence de [4] reste valable. ∇

On dira que $\otimes$ est *associatif* si, pour toute famille de (R, q) -produits tensoriels naturalisés $(g^\mu)_{\mu \in M}$, où $M \in \mathcal{J}$, et tout (R, q) -produit tensoriel naturalisé h tel que $\alpha(h) = (\beta(g^\mu))_{\mu \in M}$, le composé $h \cdot (g^\mu)_{\mu \in M}$ est encore un (R, q) -produit tensoriel naturalisé.

Soit $\mathcal{J}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}_0$. On dira que $\otimes$ est *compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites inductives* si sa restriction à $\prod_{\nu \in N} K'$ est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites inductives pour tout N de $\mathcal{J}$.

REMARQUE. Dans le cas d'un foncteur q non fidèle, les propositions 4 et 3 de [4] ne sont plus valables.

EXEMPLES D'ENSEMBLES R .

a. Supposons que q est à atomes (i.e. si (a, a') est un couple

d'unités de K' , toute application constante de $\underline{q}(a)$ vers $\underline{q}(a')$ se relève dans $a' \cdot K \cdot a$ de manière unique) et admet un foncteur produits finis $\prod$. A toute famille $a = (a_\nu)_{\nu \leq n}$ d'unités de K' est associé un unique q -multimorphisme f^a de source a , de but $\prod_{\nu \leq n} a_\nu$ et se projetant sur $\prod_{\nu \leq n} \underline{q}(a_\nu)$. Soit R l'ensemble des q -multimorphismes g , d'ensembles d'indices finis, vérifiant $g = k \cdot f^{a(g)}$, avec k appartenant à K . Quand cette décomposition est unique pour tout g de R , le foncteur $\prod$ est aussi un foncteur (R, q) -produits tensoriels. C'est le cas par exemple quand q est fidèle.

b. On suppose que R est l'ensemble choisi dans l'exemple précédent et qu'il existe un foncteur $q' = (K', \underline{q}', K')$. A un $q \cdot q'$ -multimorphisme $g' = (g'_y)$ est associé un q -multimorphisme $\underline{Q}'(g') = (g_y)$, où $g_y = \underline{q}'(g'_y)$. On pourra considérer l'ensemble R' formé des $q \cdot q'$ -multimorphismes g' vérifiant $\underline{Q}'(g') \in R$. Par exemple, q (resp. q') pourra être le foncteur qui associe à une application continue (resp. linéaire continue entre espaces vectoriels topologiques de différents types) l'application (resp. continue) sous-jacente.

3. Catégories (R, q) -dominées.

Dans ce paragraphe, nous supposons que $\mathcal{J}$ est l'ensemble des parties finies de l'ensemble des entiers naturels, que $E_0 = (\varepsilon_0, [C])$ est un graphe q -dominé et Σ l'ensemble des suites finies $s = (e_\nu)_{\nu \leq n+1}$ de sommets de $[C]$ à plus d'un élément; on pose $a(s) = (\varepsilon_0(e_{\nu+1}, e_\nu))_{\nu \leq n}$. Si $E = (\varepsilon, C')$ est une catégorie q -dominée et si $[E] = E_0$, pour tout $s = (e_\nu)_{\nu \leq n+1} \in \Sigma$, $n > 1$, notons $\varepsilon^s = (\eta_y^s)$ le q -multimorphisme de source $a(s)$, de but $\varepsilon(e_{n+1}, e_1)$, défini par:

$$\begin{aligned} \eta_y^s &= \varepsilon(x_n \dots x_2, e_1), & \text{si } y = ((x_\nu)_{1 < \nu \leq n}, 1), \\ \eta_y^s &= \varepsilon(e_{n+1}, x_{n-1} \dots x_1), & \text{si } y = ((x_\nu)_{\nu < n}, n), \\ \eta_y^s &= \varepsilon(x_n \dots x_{\mu+1}, x_{\mu-1} \dots x_1), & \text{si } y = ((x_\nu)_{\substack{\nu < \mu \\ \mu < \nu \leq n}}, \mu). \end{aligned}$$

DEFINITION 3. On dit que la catégorie q -dominée E est (R, q) -dominée si ε^s appartient à R pour tout s de Σ .

DEFINITION 4. Supposons que q admet un foncteur produits finis $\prod$ s'i-

dentifiant à un foncteur (R, q) -produits tensoriels et que les projections dans $\mathfrak{M}$ des (R, q) -produits tensoriels naturalisés correspondants soient des unités. Une catégorie (R, q) -dominée est alors appelée *catégorie fortement q -dominée* [6].

Désignons par Σ' le sous-ensemble de Σ formé des suites à deux ou trois éléments. Si $s = (e_\nu)_{\nu \leq n+1}$ appartient à Σ , posons:

$$\alpha(s) = e_1 \quad \text{et} \quad \beta(s) = e_{n+1}.$$

Si $s' = (e'_\nu)_{\nu \leq m+1}$ est une autre suite vérifiant $\alpha(s') = \beta(s)$, notons (s', s) la suite $(\beta(s'), \beta(s), \alpha(s))$ et $s' + s$ la suite $(e''_\mu)_{\mu \leq n+m+1}$ définie par:

$$e''_\nu = e_\nu \quad \text{pour} \quad \nu \leq n+1 \quad \text{et} \quad e''_{\nu+n} = e'_\nu \quad \text{pour} \quad \nu \leq m+1.$$

Supposons qu'il existe un foncteur (R, q) -produits tensoriels $\otimes$; pour $s \in \Sigma$ notons f^s le (R, q) -produit tensoriel naturalisé canonique de source $\alpha(s)$.

Si $E = (\mathfrak{E}, C')$ est une catégorie q -dominée et $[E] = E_0$, définissons k^s par: $\mathfrak{E}^s = k^s \cdot f^s$ si s a plus de deux éléments, $k^s = \mathfrak{E}(e', e)$ si $s = (e', e)$. La famille $(k^s)_{s \in \Sigma}$ vérifie les conditions suivantes:

- (1) $k^s \in \mathfrak{E}_0(e_{n+1}, e_1) \cdot K \cdot \bigotimes_{\nu \leq n} \mathfrak{E}_0(e_{\nu+1}, e_\nu)$, si $s = (e_\nu)_{\nu \leq n+1}$.
- (2) $k^{(e, e)} \in K_0$ et k^s a f_y^s pour inverse à droite si $s = (e', e', e)$ et si $y = (e', 2)$ (resp. si $s = (e', e, e)$ et $y = (e, 1)$).
- (3) $k^{(s_3, s_1)} \cdot (k^{s_3} \otimes k^{s_1}) \cdot \gamma^{(s_3, s_1)} = k^{(s_4, s_2)} \cdot (k^{s_4} \otimes k^{s_2}) \cdot \gamma^{(s_4, s_2)}$,
où $s_4 + s_2 = s_3 + s_1$ et où $\gamma^{(s', s)}$ désigne le morphisme canonique de $\beta(f^{s+s'})$ vers $\beta(f^s) \otimes \beta(f^{s'})$.

Les deux membres de (3) sont égaux à $k^{s_3+s_1}$; la famille $(k^s)_{s \in \Sigma'}$ vérifie la condition (3'), à savoir la condition (3) dans le cas où s_1 et s_4 (resp. s_3 et s_2) ont trois éléments (resp. deux éléments).

Soient $\bar{v}$ un foncteur q -dominé de E vers une catégorie (R, q) -dominée $\bar{E} = (\bar{\mathfrak{E}}, \bar{C}')$ et $(\bar{k}_{\bar{s}})_{\bar{s} \in \bar{\Sigma}}$ la famille de morphismes associée à $\bar{E}$. Si $\bar{v}_0 = [\bar{v}]$ et si $\underline{v}$ est la surjection sous-jacente à $\bar{v}$, on a la relation:

$$(4) \quad \bar{k}_{\bar{s}} \cdot \bigotimes_{\nu \leq n} \bar{v}_0(e_{\nu+1}, e_\nu) = \bar{v}_0(e_{n+1}, e_1) \cdot k^s, \quad \text{où} \quad \bar{s} = (\underline{v}(e_\nu))_{\nu \leq n+1}.$$

Inversement, soit v_0 un homomorphisme de graphes orientés q -dominés de $E_0 = (\varepsilon_0, [C])$ vers $[\bar{E}]$, où $\bar{E}$ est une catégorie (R, q) -dominée. C_0 désigne l'ensemble des sommets de $[C]$.

PROPOSITION 2. Une famille $(k^s)_{s \in \Sigma^+}$ de morphismes de K vérifiant les conditions (1), (2) et (3') détermine une catégorie (R, q) -dominée $E = (\varepsilon, C')$ telle que $[E] = E_0$. Si la condition (4) est vérifiée, il existe un unique foncteur q -dominé $\bar{v}$ de E vers $\bar{E}$ tel que $[\bar{v}] = \bar{v}_0$.

PREUVE. Il existe un système multiplicatif C' défini par:

$$x_2 \cdot x_1 \text{ est défini et égal à } \underline{Q}(k^s \cdot f^s)(x_2, x_1) \text{ si et seulement si} \\ \alpha(x_2) = \beta(x_1) \text{ et si } s = (\beta(x_2), \beta(x_1), \alpha(x_1)).$$

On a alors

$$\beta(x_2 \cdot x_1) = \beta(x_2) \text{ et } \alpha(x_2 \cdot x_1) = \alpha(x_1).$$

La condition (2) assure que C_0 est formé d'unités, tandis que (3') assure que C' est associatif. Ainsi C' est une catégorie.

A tout sommet e de $[C]$ est associé l'homomorphisme de graphes orientés $([K'], \underline{\varepsilon}_e, [C])$ (resp. $([K'], {}_e\underline{\varepsilon}, [C])$) défini par:

$$\underline{\varepsilon}_e(x) = \eta_{(x,1)}^s \quad \text{si } s = (\beta(x), \alpha(x), e) \\ (\text{resp. } {}_e\underline{\varepsilon}(x) = \eta_{(x,2)}^s \quad \text{si } s = (e, \beta(x), \alpha(x))).$$

Posons:

$$s_1 = (e_3, e_2, e_1), \quad s_4 = (e_4, e_3, e_2), \quad s_3 = (e_4, e_3) \text{ et } s_2 = (e_2, e_1) \\ \text{et multiplions chaque membre de (3')} \text{ par } f_{((y,x),1)}^{s_3+s_1}. \text{ On obtient}$$

$$\eta_{(y,1)}^{(s_3,s_1)} \cdot \eta_{(x,1)}^{s_1} = \eta_{(u,1)}^{(s_4,s_2)}, \text{ où } \eta^s = k^s \cdot f^s \text{ et } u = \underline{Q}(\eta^{s_4})((y,x)).$$

De plus la condition (2) entraîne que $\underline{\varepsilon}_e(\alpha(x))$ (resp. ${}_e\underline{\varepsilon}(\beta(x))$) est égal à $\varepsilon_0(\alpha(x), e)$ (resp. $\varepsilon_0(\beta(x), e)$). Ainsi $\varepsilon_e = (K', \underline{\varepsilon}_e, C')$ est un foncteur. De même ${}_e\varepsilon = (K', {}_e\underline{\varepsilon}, C^*)$ est un foncteur. Enfin le composé de ces foncteurs avec q est une restriction du foncteur $\text{Hom}_{C'}$.

Multiplions les deux membres de (3') par $f_{((y,z),2)}^{s_3+s_1}$. On trouve

$$\eta_{(y,1)}^{(s_3,s_1)} \cdot \eta_{(z,2)}^{s_1} = \eta_{(z,2)}^{(s_4,s_2)} \cdot \eta_{(y,1)}^{s_4},$$

c'est-à-dire

$$\underline{\varepsilon}_{e_1}(y) \cdot {}_{e_3}\underline{\varepsilon}(z) = {}_{e_4}\underline{\varepsilon}(z) \cdot \underline{\varepsilon}_{e_2}(y) = \varepsilon(y, z).$$

On a donc un foncteur $(K^*, \varepsilon, C^* \times C^*)$. Ainsi $E = (\varepsilon, C^*)$ est une catégorie (R, q) -dominée.

Si la relation (4) est vérifiée, la surjection $\underline{v}$ définit un foncteur $(\bar{C}^*, \underline{v}, C^*)$. De plus

$$\begin{aligned} \bar{v}_0(e_4, e_1) \cdot k^{(s_3, s_1)} \cdot (k^{s_3} \otimes k^{s_1}) \cdot \gamma^{(s_3, s_1)} = \\ \bar{k}^{(\bar{s}_3, \bar{s}_1)} \cdot (\bar{v}_0(e_4, e_3) \otimes \bar{v}_0(e_3, e_1)) \cdot (k^{s_3} \otimes k^{s_1}) \cdot \gamma^{(s_3, s_1)} = \\ \bar{k}^{(\bar{s}_3, \bar{s}_1)} \cdot (\bar{v}_0(e_4, e_3) \otimes \bar{k}^{\bar{s}_1} \cdot \bigotimes_{\nu \leq 3} \bar{v}_0(e_{\nu+1}, e_\nu)) \cdot \gamma^{(s_3, s_1)} = \\ \bar{k}^{(\bar{s}_3, \bar{s}_1)} \cdot (\bar{k}^{\bar{s}_3} \otimes \bar{k}^{\bar{s}_1}) \cdot \bar{\gamma}^{(\bar{s}_3, \bar{s}_1)} \cdot \bigotimes_{\nu \leq 3} \bar{v}_0(e_{\nu+1}, e_\nu), \end{aligned}$$

où l'indice «-» indique qu'il s'agit d'éléments analogues à ceux définis pour E , mais relatifs à $\bar{E}$. En multipliant par $f_{((y,z),2)}^{s_3+s_1}$, l'on a

$$\bar{\varepsilon}(\underline{v}(y), \underline{v}(z)) \cdot \bar{v}_0(e_3, e_2) = \bar{v}_0(e_4, e_1) \cdot \varepsilon(y, z).$$

Ainsi la famille $(\bar{v}_0(e', e))_{(e', e) \in C_0 \times C_0}$ définit un foncteur q -dominé de E vers $\bar{E}$. ∇

REMARQUE. Si $E = (\varepsilon, <C>)$ est une quasi-catégorie q -dominée, on définit comme précédemment une famille de q -multimorphismes $(\varepsilon^s)_{s \in \Sigma}$; E est (R, q) -dominée si ε^s appartient à R pour tout s . Si l'on a un foncteur (R, q) -produits tensoriels, la famille $k = (k^s)_{s \in \Sigma}$ vérifie les conditions (1) et (3), et un quasi-foncteur q -dominé vers une autre quasi-catégorie q -dominée vérifie la condition (4). De plus la proposition 2, où la condition (2) est supprimée, reste valable pour les quasi-foncteurs. Par suite, le théorème 2 de [5] est encore exact quand il s'agit de quasi-catégories (R, q) -dominées, même si q n'est pas fidèle.

4. $(\bar{R}\mathcal{F}, R\mathcal{F})$ -projections.

Désignons par $R\mathcal{F}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$ ayant pour objets les catégories (R, q) -dominées; un élément de $R\mathcal{F}$ est dit *foncteur* (R, q) -dominé.

Soit $\bar{R}$ un sous-ensemble de R , qui soit un ensemble stable de q -multimorphismes. La catégorie $\bar{R}\mathcal{F}$ est une sous-catégorie pleine de $R\mathcal{F}$; nous allons donner des conditions pour que $R\mathcal{F}$ soit à $\bar{R}\mathcal{F}$ -projections.

Soit $E = (\varepsilon, C')$ une catégorie (R, q) -dominée.

PROPOSITION 3. Supposons que q est saturé, que K' est à $\mathcal{F}_0$ -limites inductives, qu'il existe un foncteur (R, q) - (resp. $(\bar{R}, q)$ -) produits tensoriels associatif $\otimes$ (resp. $\bar{\otimes}$) et que $\otimes$ est compatible avec les limites inductives. Il existe un foncteur (R, q) -dominé $\bar{v}$ de source E vérifiant:

1. Pour toute suite $s = (e_\nu)_{\nu \leq n+1}$ de Σ , le q -multimorphisme $\bar{v}(e_{n+1}, e_1) \cdot \varepsilon^s$ appartient à $\bar{R}$.

2. Tout foncteur (R, q) -dominé $\bar{w}$ de source E et de but une catégorie $(\bar{R}, q)$ -dominée s'écrit de manière unique sous la forme $\bar{w} = \bar{w}' \cdot \bar{v}$.

PREUVE. Si $a = (a_\nu)_{\nu \leq n}$ est une famille d'unités de K' , désignons par f^a (resp. $\bar{f}^a$) le (R, q) - (resp. $(\bar{R}, q)$ -) produit tensoriel naturalisé canonique de source a et par j_a l'unique morphisme vérifiant $j^a \cdot f^a = \bar{f}^a$. Il est clair que j^a est un épimorphisme. Si $a_\nu = \varepsilon(e_{\nu+1}, e_\nu)$ et si $s = (e_\nu)_{\nu \leq n+1}$, posons $f^a = f^s$ (resp. $\bar{f}^a = \bar{f}^s$ et $j^a = j^s$). Soit $\Sigma(e', e)$ l'ensemble des suites s de Σ telles que $\alpha(s) = e$ et $\beta(s) = e'$. On définit une catégorie $I'(e', e)$ comme suit:

$$a. I'(e', e) - (I'(e', e))_0^\circ = \coprod_{i=1,2} (\Sigma(e', e) - \{(e', e)\}).$$

$$b. (s, 3) = \alpha((s, 1)) = \alpha((s, 2)), \text{ pour } s \in \Sigma(e', e) - \{(e', e)\} \\ \text{et } (e', e) = \beta((s, 1)) = \beta((s', 1)), \text{ pour tout couple de suites} \\ \text{de } \Sigma(e', e). \text{ Posons } \beta((s, 2)) = s.$$

Il existe un foncteur $\phi_{(e', e)}$ de $I'(e', e)$ vers K' tel que

$$\phi_{(e', e)}((s, 1)) = k^s, \quad \phi_{(e', e)}((s, 2)) = j^s.$$

Soit $\psi_{(e', e)} = (\bar{\varepsilon}(e', e), \tau, \phi_{(e', e)})$ une limite inductive naturalisée dans K' . Comme q est saturé, on peut toujours supposer que

$$\underline{q}(\bar{\varepsilon}(e', e)) \cap \underline{q}(\bar{\varepsilon}(e'_1, e_1)) = \emptyset, \text{ si } (e', e) \neq (e'_1, e_1), \\ \underline{q}(\tau((e, e)))(e) = e.$$

Il existe alors sur $\bar{C} = \bigcup_{(e', e) \in C_0' \times C_0} \underline{q}(\bar{\varepsilon}(e', e))$ une structure de graphe orienté q -dominé $(\bar{\varepsilon}, [\bar{C}])$, où $\alpha(x) = e$ et $\beta(x) = e'$ pour tout x de $\underline{q}(\bar{\varepsilon}(e', e))$. On a $C_0 = C_0'$.

Montrons qu'à toute suite s est associé un morphisme $\bar{k}^s$ de source

$\bigotimes_{\nu \leq n} \bar{\varepsilon}(e_{\nu+1}, e_\nu)$ et de but $\bar{\varepsilon}(e_{n+1}, e_1)$. Le foncteur $\otimes$ étant compatible avec les limites inductives, la transformation naturelle

$$\Psi = \bigotimes_{\nu \leq n} \cdot \hat{\prod}_{\nu \leq n} \psi_{(e_{\nu+1}, e_\nu)}$$

est une limite inductive naturalisée dans K' du foncteur

$$\Phi = \bigotimes_{\nu \leq n} \cdot \hat{\prod}_{\nu \leq n} \phi_{(e_{\nu+1}, e_\nu)}.$$

Définissons une transformation naturelle $\bar{\Psi} = (\bar{\varepsilon}(e', e), \sigma, \Phi)$, dont le but est un foncteur constant. Soit $s_\nu = (e_\mu^\nu)_{\mu \leq m(\nu)+1}$ une suite élément de $\Sigma(e_{\nu+1}, e_\nu)$, et soit $\bar{s} = (e_\delta)_{\delta \leq m+1}$ la somme des suites s_ν , où $\nu \leq n$. Posons

$$a_\mu^\nu = \varepsilon(e_{\mu+1}^\nu, e_\mu^\nu) \quad \text{et} \quad a_\delta = \varepsilon(e_{\delta+1}, e_\delta).$$

Il existe des isomorphismes canoniques

$$\gamma \text{ de } \bigotimes_{\nu \leq n} \left(\bigotimes_{\mu \leq m(\nu)} a_\mu^\nu \right) \text{ vers } \bigotimes_{\delta \leq m} a_\delta,$$

$$\bar{\gamma} \text{ de } \bar{\bigotimes}_{\nu \leq n} \left(\bar{\bigotimes}_{\mu \leq m(\nu)} a_\mu^\nu \right) \text{ vers } \bar{\bigotimes}_{\delta \leq m} a_\delta.$$

Si $\bar{a} = (\bar{\bigotimes}_{\mu \leq m(\nu)} a_\mu^\nu)_{\nu \leq n}$, posons $g^{\bar{a}} = \bar{\gamma} \cdot j^{\bar{a}}$. Les hypothèses entraînent l'égalité

$$j^{\bar{s}} \cdot \gamma = g^{\bar{a}} \cdot \bigotimes_{\nu \leq n} j^{s_\nu}.$$

Comme E est une catégorie (R, q) -dominée, on a la relation :

$$k^{\bar{s}} \cdot \gamma = k^s \cdot \bigotimes_{\nu \leq n} k^{s_\nu}.$$

Si $t = \tau(e', e)$, on a aussi $t \cdot k^{\bar{s}} = \tau(\bar{s}) \cdot j^{\bar{s}}$, c'est-à-dire

$$(t \cdot k^s) \cdot \bigotimes_{\nu \leq n} k^{s_\nu} = (\tau(\bar{s}) \cdot g^{\bar{a}}) \cdot \bigotimes_{\nu \leq n} j^{s_\nu}.$$

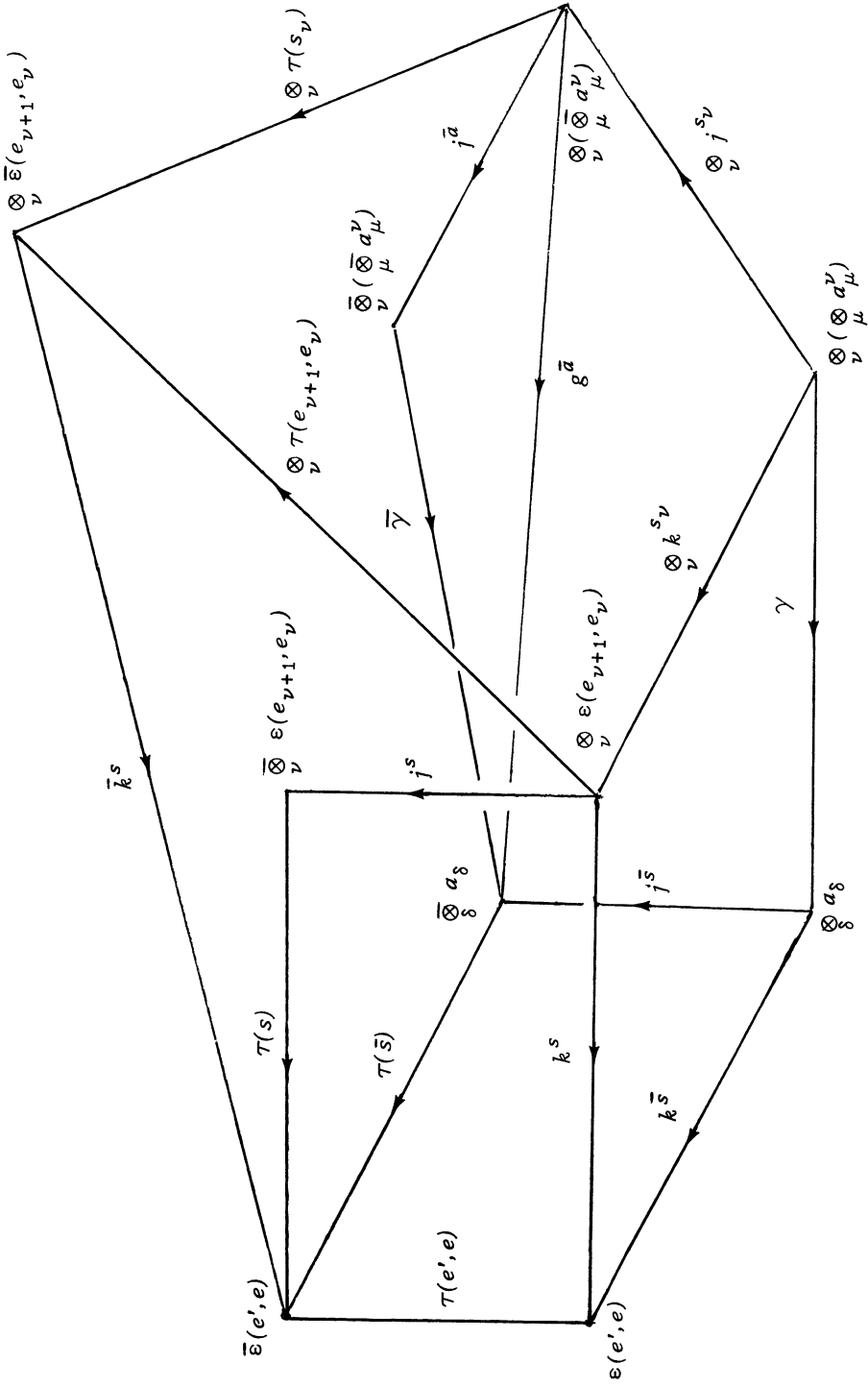
Alors $\bar{\Psi}$ est défini par les équations:

$$\sigma((s_\nu)_{\nu \leq n}) = \tau(\bar{s}) \cdot g^{\bar{a}}, \quad \sigma((e_{\nu+1}, e_\nu)_{\nu \leq n}) = t \cdot k^s.$$

On posera $\bar{k}^s = \lim_{\Psi} \bar{\Psi}$.

Montrons que la famille $(\bar{k}^s)_{s \in \Sigma}$ vérifie les conditions de la proposition 2.

α . Vérifions la condition (2). Supposons que s (resp. s_1) soit la suite (e', e, e) (resp. (e, e)). Posons



$$\bar{c} = (\bar{\otimes}_{\mu \leq m(2)} a_{\mu}^2, \varepsilon(e, e)), \quad c = (\otimes_{\mu \leq m(2)} a_{\mu}^2, \varepsilon(e, e)),$$

$$\hat{c} = (\bar{\varepsilon}(e', e), \bar{\varepsilon}(e, e)).$$

On a une transformation naturelle $\tilde{\psi} = (\beta(f^{\hat{c}}), \tilde{\sigma}, \phi_{(e', e)})$, dont le but est un foncteur constant et qui est définie par:

$$\tilde{\sigma}((e', e)) = (\tau((e', e)) \otimes \tau((e, e))) \cdot f_{(e, 1)}^s,$$

$$\tilde{\sigma}(s_2) = (\tau(s_2) \otimes \tau((e, e))) \cdot f_{(e, 1)}^{\bar{c}}.$$

Il est clair que $f_{(e, 1)}^{\hat{c}} = \lim_{\psi_{(e', e)}} \tilde{\psi}$. Mais k^s est un inverse à gauche de $f_{(e, 1)}^s$. De même, si $s' = (e_2', e, e)$, le morphisme $k^{s'}$ est inverse à gauche de $f_{(e, 1)}^{s'}$. Comme $\otimes$ est associatif, $k^{s'}$ induit un inverse à gauche l de $\gamma \cdot f_{(e, 1)}^c$. De plus l vérifie la relation $k^{s_2} \cdot l = k^{\bar{s}}$, $\bar{s} = s_2 + s_1$. Par suite

$$\begin{aligned} \tau(s_2) \cdot j^{s_2} &= \tau(s_2) \cdot j^{s_2} \cdot l \cdot \gamma \cdot f_{(e, 1)}^c = \tau(\bar{s}) \cdot j^{\bar{s}} \cdot \gamma \cdot f_{(e, 1)}^c = \\ &= \tau(\bar{s}) \cdot g^{\bar{a}} \cdot f_{(e, 1)}^{\bar{c}} \cdot j^{s_2}. \end{aligned}$$

Comme j^{s_2} est un épimorphisme,

$$\begin{aligned} \tau(s_2) &= \tau(\bar{s}) \cdot g^{\bar{a}} \cdot f_{(e, 1)}^{\bar{c}} = \bar{k}^s \cdot (\tau(s_2) \otimes \tau((e, e))) \cdot f_{(e, 1)}^{\bar{c}} = \\ &= \bar{k}^s \cdot f_{(e, 1)}^{\bar{c}} \cdot \tau(s_2). \end{aligned}$$

Ainsi $\bar{k}^s$ est bien un inverse à gauche de $f_{(e, 1)}^{\bar{c}}$.

β . *Vérifions la condition (3).* On suppose que s est la suite (e', e_2, e) . Soit $s(\nu, \mu) = (e_{\eta}^{(\nu, \mu)})_{\eta \leq \rho(\nu, \mu) + 1}$ une suite de $\sum (e_{\mu+1}^{\nu}, e_{\mu}^{\nu})$; notons $\tilde{s}_{\nu} = (e_{\rho}^{\nu})_{\rho \leq \tilde{\rho}(\nu) + 1}$ la somme des suites $s(\nu, \mu)$, où ν est fixé et où $\mu \leq m(\nu) + 1$; soit $\tilde{s} = (e_{\iota})_{\iota \leq \tilde{\rho} + 1}$ la suite $\tilde{s}_2 + \tilde{s}_1$. Posons

$$b_{\eta}^{(\nu, \mu)} = \varepsilon(e_{\eta+1}^{(\nu, \mu)}, e_{\eta}^{(\nu, \mu)}), \quad t(\nu, \mu) = \tau((e_{\mu+1}^{\nu}, e_{\mu}^{\nu}))$$

$$\text{et } \bar{a}_{\mu}^{\nu} = \bar{\varepsilon}(e_{\mu+1}^{\nu}, e_{\mu}^{\nu}).$$

On définit de même b_{ρ}^{ν} et b_{ι} . Si $\delta = \mu + \sum_{\tilde{\nu} < \nu} m(\tilde{\nu})$, on posera

$$s(\delta) = s(\nu, \mu), \quad b_{\eta}^{\delta} = b_{\eta}^{(\nu, \mu)}, \quad t(\delta) = t(\nu, \mu), \quad \bar{a}_{\delta} = \bar{a}_{\mu}^{\nu}.$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\tilde{\gamma} = \otimes_{\nu} (\otimes_{\mu} \bar{a}_{\mu}^{\nu}) \rightarrow \otimes_{\delta} \bar{a}_{\delta}, \quad \hat{\gamma} = \otimes_{\nu} (\otimes_{\mu} (\bar{\otimes}_{\eta} b_{\eta}^{(\nu, \mu)})) \rightarrow \otimes_{\delta} (\bar{\otimes}_{\eta} b_{\eta}^{\delta}),$$

ainsi que des morphismes canoniques:

$$\hat{g}: \otimes_{\delta} (\otimes_{\eta} \bar{b}_{\eta}^{\delta}) \rightarrow \otimes_{\bar{\iota}} b_{\iota}, \quad \bar{g}: \otimes_{\nu} (\otimes_{\rho} b_{\rho}^{\nu}) \rightarrow \otimes_{\bar{\iota}} b_{\iota}, \quad g^{\nu}: \otimes_{\mu} (\otimes_{\eta} b_{\eta}^{(\nu, \mu)}) \rightarrow \otimes_{\rho} b_{\rho}^{\nu}.$$

Ces morphismes vérifient les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} \cdot \otimes_{\nu} (\otimes_{\mu} \tau(s(\nu, \mu))) &= \otimes_{\delta} \tau(s(\delta)) \cdot \hat{\gamma}, \\ \tilde{\gamma} \cdot \otimes_{\nu} (\otimes_{\mu} t(\nu, \mu)) &= \otimes_{\delta} t(\delta) \cdot \gamma, \quad \bar{g} \cdot \otimes_{\nu} g^{\nu} = \hat{g} \cdot \hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Par suite on a:

$$\begin{aligned} \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \tilde{\gamma} \cdot \otimes_{\nu} (\otimes_{\mu} t(\nu, \mu)) &= \bar{k}^{\bar{s}} \cdot (\otimes_{\delta} t(\delta)) \cdot \gamma = t \cdot \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \gamma = \\ &= \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \otimes_{\nu} (\tau(s_{\nu}) \cdot j^{s\nu}) = \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \otimes_{\nu} (\bar{k}^{s\nu}) \cdot \otimes_{\nu} (\otimes_{\mu} t(\nu, \mu)), \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \tilde{\gamma} \cdot \otimes_{\nu} (\otimes_{\mu} \tau(s(\nu, \mu))) &= \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \otimes_{\delta} \tau(s(\delta)) \cdot \hat{\gamma} = \\ &= \tau(\tilde{s}) \cdot \hat{g} \cdot \hat{\gamma} = \tau(\tilde{s}) \cdot \bar{g} \cdot \otimes_{\nu} g^{\nu} = \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \otimes_{\nu} (\tau(\tilde{s}_{\nu}) \cdot g^{\nu}) = \\ &= \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \otimes_{\nu} (\bar{k}^{s\nu}) \cdot \otimes_{\nu} (\otimes_{\mu} \tau(s(\nu, \mu))). \end{aligned}$$

Or

$$\Psi_{\nu} = \otimes_{\mu \leq m(\nu)} \hat{\prod}_{\mu \leq m(\nu)} \psi(e_{\mu+1}^{\nu}, e_{\mu}^{\nu})$$

est une limite inductive naturalisée. Donc $\otimes_{\nu \leq 2} \Psi_2 \hat{\prod} \Psi_1$ en est aussi une.

En multipliant cette dernière par les deux transformations naturelles constantes définies par $\bar{k}^{\bar{s}} \cdot \otimes_{\nu} (\bar{k}^{s\nu})$ et $\bar{k}^{\bar{s}} \cdot \tilde{\gamma}$, on obtient le même résultat. Ces deux morphismes sont donc égaux et la condition 3' en résulte.

Ainsi nous obtenons une catégorie (R, q) -dominée $\bar{E} = (\bar{e}, \bar{C})$ et, en posant $\bar{v}(e', e) = \tau(e', e)$, nous définissons un foncteur (R, q) -dominé $\bar{v}$ de E vers $\bar{E}$; en effet

$$\tau(e', e) \cdot k^s = \bar{k}^{\bar{s}} \cdot \otimes_{\nu \leq n} \tau(e_{\nu+1}, e_{\nu}).$$

Soit $\bar{w}$ un autre foncteur (R, q) -dominé de source E , de but $\hat{E} = (\hat{e}, \hat{C})$. On suppose que $\hat{E}$ est une catégorie $(\bar{R}, q)$ -dominée. Pour tout s de $\Sigma(e', e)$, il existe un unique morphisme l^s vérifiant:

$$\bar{w}(e', e) \cdot k^s = l^s \cdot j^s.$$

Soit $\underline{w}$ la surjection sous-jacente à $\bar{w}$, soit $\hat{e}' = \underline{w}(e')$ et $\hat{e} = \underline{w}(e)$. Il

existe une transformation naturelle $\chi = (\hat{e}(\hat{e}', \hat{e}), \hat{\tau}, \phi_{(e', e)})$, dont le but est un foncteur constant et qui est définie par:

$$\hat{\tau}((e', e)) = \bar{w}(e', e), \quad \hat{\tau}(s) = l^s.$$

Posons $\bar{w}'(e', e) = \lim_{\psi_{(e', e)}} \chi$. Soit $(\hat{k}^{\hat{s}})_{\hat{s} \in \hat{\Sigma}}$ (resp. $(\check{k}^{\hat{s}})_{\hat{s} \in \hat{\Sigma}}$) la famille de morphismes attachée à $\hat{E}$ relativement à $\otimes$ (resp. à $\bar{\otimes}$) et soit $\hat{s}$ la suite $(\hat{e}_\nu)_{\nu \leq n+1}$, où $\hat{e}_\nu = \underline{w}(e_\nu)$. Avec ces notations, nous avons:

$$\begin{aligned} \hat{k}^{\hat{s}} \cdot \bigotimes_{\nu} (\bar{w}'(e_{\nu+1}, e_\nu) \cdot \tau(e_{\nu+1}, e_\nu)) &= \hat{k}^{\hat{s}} \cdot \bigotimes_{\nu} \bar{w}(e_{\nu+1}, e_\nu) = \\ &= \bar{w}'(e', e) \cdot \bar{k}^s \cdot \bigotimes_{\nu} \tau(e_{\nu+1}, e_\nu). \end{aligned}$$

La relation $\check{k}^{\hat{s}} \cdot j^{\hat{s}} = \hat{k}^{\hat{s}}$ assure que le morphisme

$$\hat{k}^{\hat{s}} \cdot \bigotimes_{\nu} (\bar{w}'(e_{\nu+1}, e_\nu) \cdot \tau(s_\nu) \cdot j^{s_\nu})$$

s'écrit de manière unique sous la forme $\hat{l} \cdot j^{\bar{a}} \cdot \bigotimes_{\nu} j^{s_\nu}$.

En multipliant la relation précédente par $\bigotimes k^{s_\nu}$, on trouve

$$\hat{l} \cdot \bar{\gamma}^{-1} \cdot j^{\bar{s}} = l^{\bar{s}} \cdot j^{\bar{s}}, \quad \text{d'où } \hat{l} \cdot j^{\bar{a}} = l^{\bar{s}} \cdot \bar{\gamma} \cdot j^{\bar{a}}.$$

Ainsi

$$\hat{k}^{\hat{s}} \cdot \bigotimes_{\nu} (\bar{w}'(e_{\nu+1}, e_\nu) \cdot \tau(s_\nu)) = \bar{w}'(e', e) \cdot \bar{k}^s \cdot \bigotimes_{\nu} \tau(s_\nu);$$

c'est-à-dire

$$\bar{w}'(e', e) \cdot \bar{k}^s = \hat{k}^{\hat{s}} \cdot \bigotimes_{\nu} \bar{w}'(e_{\nu+1}, e_\nu).$$

Par suite il existe un foncteur (R, q) -dominé $\bar{w}'$ de source $\bar{E}$, de but $\hat{E}$ et vérifiant $\bar{w} = \bar{w}' \cdot \bar{v}$. La définition de $\bar{w}'(e', e)$ assure que cette décomposition est unique. ∇

COROLLAIRE. Si q est de plus à $\mathcal{F}_0$ -limites inductives et si $q(j^a)$ est une surjection (resp. une bijection) pour toute famille $a = (a_\nu)_{\nu \leq n}$ d'unités de K^* , la catégorie $\bar{C}^*$ s'identifie à une catégorie quotient de C^* (resp. à C^*).

Si $\bar{\xi}$ est un ordinal limite appartenant à l'univers $\mathcal{U}$, nous notons $\bar{\xi}^*$ la catégorie associée.

PROPOSITION 4. Si, avec les hypothèses de la proposition 3, il existe un ordinal limite $\bar{\xi}$ appartenant à $\mathcal{U}$ tel que $\bar{\otimes}$ soit compatible avec les $\{\bar{\xi}^*\}$ -limites inductives, $R\mathcal{F}$ est à $\bar{R}\mathcal{F}$ -projections.

PREUVE. Soit $E = (\varepsilon, C')$ une catégorie (R, q) -dominée. Définissons par récurrence une famille $(\bar{u}_{(\xi', \xi)})_{\xi \leq \xi' \leq \bar{\xi}}$ de foncteurs (R, q) -dominés et une famille $(E_\xi)_{\xi \leq \bar{\xi}}$ de catégories (R, q) -dominées telles que:

la source de $\bar{u}_{(\xi', \xi)}$ est E_ξ , son but est $E_{\xi'}$, et

$$u_{(\xi'', \xi')} \cdot \bar{u}_{(\xi', \xi)} = \bar{u}_{(\xi'', \xi)}.$$

$$E_1 = E.$$

E_ξ a les mêmes unités que E et $u_{(\xi', \xi)}(e) = e$ pour $e \in E_0$.

Posons $E_\xi = (\varepsilon_\xi, C_\xi)$ et désignons par $(k_\xi^s)_{s \in \Sigma}$ la famille des morphismes associée à E_ξ .

a. Si E_ξ est défini, $\bar{u}_{(\xi+1, \xi)}$ est le foncteur défini par la proposition 3.

b. Supposons que ξ est un ordinal limite et que $\bar{u}_{(\xi'', \xi')}$ est défini pour tout $\xi'' < \xi$. Il existe un foncteur ϕ_ξ de ξ' vers ${}^R\mathcal{F}$ qui associe $\bar{u}_{(\xi'', \xi')}$ à (ξ'', ξ') . Comme $\otimes$ est compatible avec les limites inductives, ce foncteur admet une limite inductive naturalisée dans ${}^q\mathcal{F}$, notée $\psi_\xi = (E_\xi, \tau, \phi_\xi)$. Les unités de E_ξ s'identifient à celles de E , et $\varepsilon_\xi(e', e)$ est une limite inductive dans K' du foncteur $\phi_\xi(e', e)$, qui à (ξ'', ξ') associe $\bar{u}_{(\xi'', \xi')}(e', e)$; on note $\psi_\xi(e', e)$ la limite inductive naturalisée correspondante.

Par définition, $\bar{u}_{(\xi, \xi')} = \tau(\xi')$ pour tout $\xi' < \xi$.

Montrons que $E_{\bar{\xi}}$ est une catégorie $(\bar{R}, q)$ -dominée. Soit une suite $s = (e_\nu)_{\nu \leq n+1}$ de $\Sigma(e', e)$. Notons par ϕ' (resp. ϕ_ν) le foncteur $\phi_{\bar{\xi}}(e', e)$ (resp. $\phi_{\bar{\xi}}(e_{\nu+1}, e_\nu)$) et soit

$$\phi = \bigotimes_{\nu \leq n} [\phi_\nu]_{\nu \leq n}, \quad \bar{\phi} = \bigotimes_{\nu \leq n} [\phi_\nu]_{\nu \leq n}.$$

Posons aussi:

$$\psi' = \psi_{\bar{\xi}}(e', e), \quad \psi_\nu = \psi_{\bar{\xi}}(e_{\nu+1}, e_\nu), \\ \psi = \bigotimes_{\nu \leq n} [\psi_\nu]_{\nu \leq n} \quad \text{et} \quad \bar{\psi} = \bigotimes_{\nu \leq n} [\psi_\nu]_{\nu \leq n}.$$

Par hypothèse, ψ et $\bar{\psi}$ sont des limites inductives naturalisées dans K' . Il existe une transformation naturelle $\zeta = (\bar{\phi}, j, \phi)$, où $j(\xi)$ désigne le morphisme canonique de $\bigotimes_{\nu \leq n} \varepsilon_\xi(e_{\nu+1}, e_\nu)$ vers $\bigotimes_{\nu \leq n} \varepsilon_\xi(e_{\nu+1}, e_\nu)$, et $j(\bar{\xi}) = \text{Lim}_{(\bar{\psi}, \psi)} \zeta$. Il existe une autre transformation naturelle $\chi =$

$= (\phi', \sigma, \phi)$, définie par

$$\sigma(\xi) = k_{\xi}^s \quad \text{et} \quad k_{\xi}^s = \text{Lim}_{(\psi', \psi)} \chi.$$

D'autre part la proposition 3 nous indique qu'il existe un unique morphisme $t(\xi)$ vérifiant

$$t(\xi) \cdot j(\xi) = \phi'(\xi + 1, \xi) \cdot k_{\xi}^s.$$

Si $\psi' = (\varepsilon_{\xi'}(e', e), \tau', \phi')$ et si $\xi \leq \xi'$, nous avons

$$\begin{aligned} \tau'(\xi + 1) \cdot t(\xi) \cdot j(\xi) &= \tau'(\xi') \cdot k_{\xi'}^s \cdot \phi(\xi', \xi) = \\ &= \tau'(\xi' + 1) \cdot t(\xi') \cdot \bar{\phi}(\xi', \xi) \cdot j(\xi). \end{aligned}$$

Le fait que $j(\xi)$ est un épimorphisme permet de définir une transformation naturelle $\bar{\chi} = (\varepsilon_{\bar{\xi}}(e', e), \bar{\sigma}, \bar{\phi})$, où $\bar{\sigma}(\xi) = \tau'(\xi + 1) \cdot t(\xi)$. De plus, la relation $\bar{\chi} \square \zeta = \psi' \square \chi$ assure que $k_{\bar{\xi}}^s = \bar{k}^s \cdot j(\bar{\xi})$ si $\bar{k}^s = \lim_{\bar{\chi}} \chi$. Ainsi $E_{\bar{\xi}}$ est une catégorie $(\bar{R}, q)$ -dominée.

Soit $\tilde{E}$ une autre catégorie $(\bar{R}, q)$ -dominée. D'après la proposition 3, tout foncteur (R, q) -dominé $\bar{w}_{\xi}$ de E_{ξ} vers $\tilde{E}$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $\bar{w}_{\xi+1} \cdot \bar{u}_{(\xi+1, \xi)} = \bar{w}_{\xi}$.

Supposons que ξ est un ordinal limite et que nous avons une transformation naturelle $\theta = (\tilde{E}, w, \phi_{\xi})$ dans $R\mathcal{F}$. Il existe un unique foncteur (R, q) -dominé $\bar{w}_{\xi}$ de E_{ξ} vers $\tilde{E}$ vérifiant

$$\bar{w}_{\xi} \cdot \bar{u}_{(\xi, \xi')} = \bar{w}_{\xi'}, \quad \text{pour tout } \xi' < \xi.$$

On en déduit que tout foncteur (R, q) -dominé $\bar{w}$ de E vers $\tilde{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $\bar{w}_{\bar{\xi}} \cdot \bar{u}_{(\bar{\xi}, 1)} = \bar{w}$. Ainsi $\bar{u}_{(\bar{\xi}, 1)}$ est un $(\bar{R}\mathcal{F}, R\mathcal{F})$ -projecteur. ∇

COROLLAIRE. Si, de plus, les hypothèses du corollaire de la proposition 3 sont vérifiées, la catégorie $C_{\xi}^{\cdot}$ s'identifie à $C^{\cdot}$.

EXEMPLE. On suppose que q est le foncteur d'oubli vers $\hat{\mathcal{M}}$ de la catégorie des applications continues (resp. applications quasi-continues, resp. uniformes, etc...) associée à $\hat{\mathcal{U}}$, que $C^{\cdot}$ est la catégorie des applications continues (resp. quasi-continues, resp. uniformes, ...) associée à $\mathcal{U}$ et que $\bar{\otimes}$ est le foncteur produits finis (exemple a du n°2). Le corollaire assure qu'à tout foncteur «Hom interne» on peut associer universellement un foncteur «Hom interne» qui est une domination forte.

Bibliographie

1. EHRESMANN C., *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
2. EHRESMANN C., *Algèbre, 1^{ère} partie*, C. D. U., Paris, 1968.
3. EHRESMANN C., Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers Top. et Géo. dif.* IX, 1-2, Dunod (1967).
4. FOLTZ F., Produit tensoriel généralisé, *Cahiers Top. et Géo. dif.* X, 3, Dunod (1968).
5. FOLTZ F., Sur la catégorie des foncteurs dominés, *Cahiers Top. et Géo. dif.* XI, 2, Dunod (1969).
6. EHRESMANN C., Catégories structurées généralisées, *Cahiers Top. et Géo. dif.* X, 2, Dunod (1968).
7. BASTIANI A., *Topologie 2* (Cours multigraphié), Amiens, 1968.
8. EILENBERG-KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra*, La Jolla, Springer 1966.

Département de Mathématiques,
Tours 45 - 55,
Université Paris VII,
2, Place Jussieu,
PARIS (5).