CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

W. M. OLIVA

Une définition équivalente à l'involution de E. Cartan pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 2 (1969), p. 201-205

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_2_201_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XI,2*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

UNE DEFINITION EQUIVALENTE A L'INVOLUTION DE E. CARTAN POUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par W.M. OLIVA *)

On démontre que les éléments intégraux d'ordre n d'un système d'équations aux dérivées partielles (SEDP) s'identifient aux jets de son prolongement holonome. Le théorème 1 donne une condition équivalente à l'involution de E. Cartan pour les (SEDP). On vérifie l'involution pour quelques exemples classiques.

Soit (V_m, V_n, π) une fibration, c'est-à-dire π est une application différentiable d'une variété V_m sur une variété V_n, de rang maximal. $J^r(V_m, V_n, \pi)$ désigne la variété des r-jets des sections locales de V_n dans V_m par rapport à π.

La notion de système différentiel extérieur associé à un (SEDP) a été considérée par E. Cartan ([1]). En utilisant les jets de C. Ehresmann, Kuranishi ([2]) a défini un (SEDP) (Φ^r, Ω) d'ordre $r \geq 1$ dans un ouvert Ω de $J^r(V_m, V_n, \pi)$ de la façon suivante : Φ^r est une application qui, à chaque $w \in \Omega$, associe un idéal Φ^r_w de l'anneau des germes au point w des fonctions réelles différentiables définies au voisinage de w, et telle que, pour chaque point $w \in \Omega$, il existe un voisinage V de w et des fonctions différentiables $F_1, F_2, \ldots, F_t$ définies dans V dont les germes en y engendrent l'idéal Φ^r_y, pour tout $y \in V$. On considère aussi le système différentiel extérieur (Σ, Φ^r) dans l'ouvert Ω de $J^r(V_m, V_n, \pi)$. On sait que, localement, (Σ, Φ^r) est engendré par

$$F_\mu,\ \ \mu = 1,2, \ldots, t,\ dy^\lambda - p^\lambda_j\, dx_j,\ \ 1 \leq \lambda \leq (m-n),$$
$$dp^\lambda_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} - p^\lambda_{j_1 j_2 \ldots j_\nu j}\, dx_j,\ \ 1 \leq \nu \leq r-1.$$

On ajoute aussi les différentielles extérieures correspondantes :

$$dF_\mu,\ dp^\lambda_j \wedge dx_j,\ dp_{j_1 \ldots j_\nu j} \wedge dx_j.$$

*) Ce texte, rédigé en avril 1966, est développé dans [7].

Un jet w de Ω est *intégral* si $F_{\mu}(w) = 0$ pour $\mu = 1, 2, \dots, t$. L'ensemble des jets intégraux sera désigné par $J^{o}(\Phi^{r})$.

Les éléments intégraux admissibles d'ordre n de (Φ^{r}, Ω) sont les éléments de contact intégraux de (Σ, Φ^{r}) admissibles par rapport à la fibration $(J^{r}(V_m, V_n, \pi), V_n, \alpha)$ ([1],[3],[4]); on peut aussi parler d'éléments ordinaires de (Φ^{r}, Ω). A toute sous-variété régulière S de $J^{r}(V_m, V_n, \pi)$ on associe un (SEDP), encore noté S. $P(S)$ désigne le prolongement holonome ([2],[5]) de S. On démontre le résultat suivant:

PROPOSITION 1. *Soit S une sous-variété régulière de $J^{r}(V_m, V_n, \pi)$ telle que le triplet (S, V_n, α) soit une fibration. Alors, il existe une correspondance biunivoque entre les éléments intégraux admissibles d'ordre n de S et les jets de son prolongement holonome $P(S)$.*

On rappelle la définition d'involution de E. Cartan :

DEFINITION. Un (SEDP) (Φ^{r}, Ω) de $J^{r}(V_m, V_n, \pi)$ est *en involution au jet intégral X_o de $J^{o}(\Phi^{r})$* ([2]) si (Σ, Φ^{r}) est involution au point X_o, c'est-à-dire s'il existe un élément intégral admissible d'ordre n d'origine X_o et si tout élément intégral admissible d'ordre n d'origine X_o est ordinaire.

On rappelle aussi un théorème classique de E. Cartan ([1], [3], [4]):

PROPOSITION 2. *Un élément intégral admissible $E^{n}(X_o)$ d'ordre n de (Σ, Φ^{r}) est ordinaire si, et seulement si :*

i) Il existe un voisinage U de X_o tel que $S = U \cap J^{o}(\Phi^{r})$ soit une sous-variété régulière de $J^{r}(V_m, V_n, \pi)$, que $P(S) = ((\rho_r^{r+1})^{-1} U \cap J^{o}(P(\Phi^{r}))$ soit une sous-variété de $J^{r+1}(V_m, V_n, \pi)$ et que le triplet $(P(S), S, \rho_r^{r+1})$ soit une fibration.

ii) $P(S)$ a pour codimension $N - \dim S + K(E^{n}(X_o))$ dans la variété des éléments de contact d'ordre n de $J^{r}(V_m, V_n, \pi)$, admissibles par rapport à α.

L'entier N est la dimension de $J^{r}(V_m, V_n, \pi)$ et

$$K(E^{n}(X_o)) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k(E^{n}(X_o)),$$

où

$$t_k(E^n(X_o)) = max\,\{ dim\, J(E^k(x_o)) \mid E^k(x_o) \subset E^n(x_o) \},$$

$J(E^k(Y))$ étant le système polaire de $E^k(Y)$, c'est-à-dire le sous-espace engendré par les 1-formes de (Σ, Φ^r) et par les 1-formes $v_i \lrcorner \omega^S$ où (v_i) est une base de $E^k(Y)$ et où ω^S sont les 2-formes de (Σ, Φ^r) (on note $v \lrcorner \omega$ le produit intérieur d'un vecteur v par une 2-forme ω). De plus, pour déterminer la dimension de $J(E^k(Y))$, il suffit de considérer toutes les 1-formes modulo $(dx_1, \ldots, dx_n)$ ([1]).

Soit maintenant (Φ^r, Ω) un (SEDP) qui vérifie la condition $i)$ pour un point $X_o \in J^o(\Phi^r)$, et soit $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ une base de l'espace tangent à V_n au point $x_o = \alpha(X_o)$. Si $X_1 \in P(S)$ est tel que $\rho_r^{r+1}(x_1) = X_o$, la proposition 1 dit que $X_1 = j^1_{x_o}\sigma$ s'identifie avec l'élément intégral admissible $E^n(X_o) = [\sigma_* t_1, \sigma_* t_2, \ldots, \sigma_* t_n]$ (σ_* note la différentielle au point x_o d'un représentant σ du jet X_1).

On peut, à partir de T et X_1, construire une suite de sous-espaces :

$$E^1(T, X_1) = [\sigma_* t_1],$$

$$E^2(T, X_1) = [\sigma_* t_1, \sigma_* t_2],$$

$$\vdots$$

$$E^{n-1}(T, X_1) = [\sigma_* t_1, \ldots, \sigma_* t_{n-1}].$$

Ces sous-espaces ne dépendent que de X_1 et T. Soit $V(X_o)$ l'ensemble des éléments Y de S tels que $\rho^r_{r-1}(Y) = \rho^r_{r-1}(X_o) = \overline{X}$. Pour chaque k vérifiant $1 \leq k \leq (n-1)$, on peut considérer le sous-ensemble $V(E^k(T, X_1))$ des éléments $Z \in V(X_o)$ tels que, si

$$Z = j^1_{x_o}\tau, \text{ où } \tau : W \ni x_o \to J^{r-1}(V_m, V_n, \pi),$$

$(\rho^r_{r-1})_*\; E^k(T, X_1)$ soit tangent à $\tau(W)$ au point $\overline{X}$.

On dit que $T = (t_1, \ldots, t_n)$ est une *base quasi-régulière associée à* X_o si $V(X_o), V(E^1(T, X_1)), \ldots, V(E^{n-1}(T; X_1))$ sont des sous-variétés de S dont les dimensions $\tau_o, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ ne dépendent que de T et si de plus

$$\tau_o + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} = dim\ P(S) - dim\ S.$$

On dit maintenant que (Φ^r, Ω) vérifie la *condition iii)* au point intégral X_o s'il vérifie *i)* et s'il existe une base quasi-régulière associée au point X_o.

En utilisant les propositions 1 et 2, on démontre le résultat suivant:

THEOREME 1 *(voir* [7]*). Un (SEDP)* (Φ^r, Ω) *est en involution au point intégral* X_o *si, et seulement si, il vérifie les conditions i) et iii).*

On peut appliquer le théorème 1 à quelques exemples classiques :

a) Soit S une sous-variété régulière de $J^1(V_m, V_n, \pi)$, $m = n+1$, telle que (S, V_m, β) soit une fibration. En utilisant le théorème des fonctions implicites, on peut écrire les équations locales de S sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, y, q_1 \dots q_s), \\ &\vdots \\ p_{n-s} &= f_{n-s}(x_1, \dots, x_n, y, q_1, \dots, q_s). \end{aligned}$$

Dans [5], page 31, Goursat considère pour ce système certaines conditions d'intégrabilité; on démontre que S *est en involution au point* X_o *si, et seulement si, les conditions d'intégrabilité de Goursat sont vérifiées.*

b) A toute distribution M d'éléments de contact sur une variété V_n, on associe un (SEDP) S du 1^er^ ordre de la façon suivante : Dans la variété $J^1(V_{n+1}, V_n, \pi)$, où $V_{n+1} = V_n \times R$ et où π est la projection canonique de V_{n+1} sur V_n, on considère la partie S de $J^1(V_n, R) = J^1(V_{n+1}, V_n, \pi)$ des jets $j_x^1 y$ tels que $X(y) = 0$ pour tout $X \in M$. S ne dépend que de M et (S, V_n, α) est une fibration. Alors M *est complètement intégrable si, et seulement si,* S *est en involution en tout point intégral.*

c) A tout (SEDP) de Mayer-Lie S ([6]) on associe une distribution $D(S)$ d'éléments de contact. Alors $D(S)$ *est involutive si, et seulement si,* S *est en involution en tout point.*

d) Systèmes de Koenig ([5], page 41). *Les conditions d'intégrabilité de Goursat pour ce type de systèmes sont équivalentes à l'invo-*

lution en tout point intégral.

c) Systèmes de Cauchy-Kowalewski [5] page 2). En utilisant le théorème 1 ci-dessus on démontre que *tout système de Cauchy-Kowalewski est en involution en tout point intégral.*

Bibliographie.

[1] E. CARTAN, *Les Systèmes Différentiels Extérieurs et Leurs Applications Géométriques,* Paris (1921).

[2] M. KURANISHI, *Nagoya Math. J.* 19 , 1961 , p. 55 .

[3] M. KURANISHI, *Lectures on Exterior Differential Systems,* Tata Inst. Bombay (1962).

[4] A. KUMPERA, *Exterior Differential Systems,* Princeton Un. (1961).

[5] E. GOURSAT, *Leçons sur l'Intégration des Equations aux Dérivées Partielles du 1er ordre,* Paris (1921).

[6] C. EHRESMANN, *Sur les pseudogroupes de Lie de type fini,* C.R.A.S. t. 246 , p. 360 - 362 , (1958).

[7] W.M. OLIVA, *Conceituação Geométrica da Teoria das Equações a Derivadas Parciais,* Thèsis, S. Paulo (1966).

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo,

74 Pr. Cel. Fernando Prestes

São Paulo. Brésil.