

ANTOINE APPERT

Suite à l'article sur le meilleur terme primitif en topologie

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1^{re} série, tome 10 (1989), p. 231-232

http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1989__10__231_0

© Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Suite à l'article paru dans la présente Revue, 3, 1982, pp. 63-67,
et intitulé "Sur le meilleur terme primitif en topologie" par Antoine APPERT.[★]

La terminologie sera celle de cet article. Le lecteur est prié de
s'y reporter.

Nous avons appelé⁽¹⁰⁾ propriété cantorienne restreinte d'un ensemble E
la propriété suivante:

P_4^0 . Pour toute famille dénombrable monotone non vide $\mathcal{F}$ de parties non
vides de E il existe un point de E adhérent à tout ensemble de $\mathcal{F}$.

Dans tout espace topgen nous appelons voisinage d'un point a tout
ensemble E tel que a ne soit pas adhérent au complémentaire de E par rapport
à l'espace.

Nous disons qu'une fonction numérique réelle (c'est-à-dire une fonction
dont les valeurs sont des nombres réels) f définie sur un ensemble $E \subset$ un
espace topgen P est semi-continue supérieurement (resp. continue) en un point
 $a \in E$ si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_a de a tel
que, pour tout point $x \in E \cap V_a$, on ait:

$$f(x) < f(a) + \varepsilon \text{ (resp. } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{)}.$$

Les propriétés précédentes seront dites être vraies sur E si elles sont
vraies en chaque point de E.

Nous posons:

S (resp. S_1) = classe des ensembles $E \subset$ un espace topgen P tels que
toute fonction numérique réelle semi-continue supérieurement (resp. continue)
sur E soit bornée supérieurement sur E et atteigne sa borne supérieure sur E

⁽¹⁰⁾ M.S., Chapitre III, §I, p. 67, et Mathematica, Cluj, XI, 1935,
pp. 23 - 31, Mémoire reçu le 24 Novembre 1934. Définition d₁₀, p. 27.
Comme nous l'avons indiqué dans Mathematica, Cluj, XI, 1935, pp. 229-246,
Mémoire reçu le 29 Janvier 1935 (voir Définition d₂₆, p. 237, et remarque
bas de la p. 238 et haut de la p. 239), notre définition ci-dessus de la
propriété cantorienne restreinte reste équivalente à elle-même, dans tout
espace $(\mathcal{V})$, quand on y remplace les mots "adhérent à tout ensemble de $\mathcal{F}$ "
par les mots "appartenant à tout ensemble de $\mathcal{F}$ ou appartenant à tout
dérivé d'un ensemble de $\mathcal{F}$ ". Cette équivalence était déjà mentionnée dans
tout espace $(\mathcal{V})$ vérifiant α , c'est-à-dire dans tout espace $(\mathcal{V}_\alpha)$, dans
notre premier Mémoire de Mathematica mentionné ci-dessus, pp. 26-27.

★ Transmis par Gustave CHOQUET.

(resp. soit bornée sur E et atteigne ses bornes supérieure et inférieure sur E).

Nous avons énoncé⁽¹¹⁾ en 1933 et démontré⁽¹²⁾ en 1934 que:

Théorème 1. Dans tout espace $(\mathcal{V}_\alpha)$, c'est-à-dire dans tout espace topgen vérifiant axi_1 , axi_2 , axi_3 et axi_4 , on a:

(classe des ensembles possédant la propriété cantorienne restreinte) = $S \subset S_1$.

Mais S_1 est en général plus étendue que S.

Envisageons d'autre part l'axiome suivant (voir M.S. Chapitre I, §III, p. 17:

axi_6 . Si un point a est distinct d'un point b, alors a n'est pas adhérent à $\{b\}$.

Nous avons énoncé et démontré⁽¹³⁾ en 1935 que:

Théorème 2. Dans tout espace $(\mathcal{V})$ vérifiant axi_5 et axi_6 , c'est-à-dire dans tout espace topgen vérifiant axi_1 , axi_2 , axi_3 , axi_5 et axi_6 , et en particulier dans tout espace $(\mathcal{L})$ de FRECHET⁽¹⁴⁾, on a:

(classe des ensembles possédant la propriété cantorienne restreinte) = S.

De par sa forme même, la propriété cantorienne restreinte p_4^0 EST Topologiquement intrinsèque. Il eût donc été préférable, contrairement à ce que nous avons fait dans M.S., Chapitre III, §I, p.66, ⁽¹⁵⁾, d'appeler, dans tout espace topgen, ensembles $\mathcal{K}_0$ - compacts, ou ensembles dénombrablement compacts, les ensembles possédant la propriété cantorienne restreinte p_4^0 .

⁽¹¹⁾ Antoine APPERT, Comptes rendus Acad. des Sc., Paris, 196, p. 1570, 22 Mai 1933, (séance du 15 Mai 1933).

⁽¹²⁾ Antoine APPERT, Thèse soutenue le 17 Mars 1934, Paris, Hermann, 1934, p. 104.

⁽¹³⁾ Antoine APPERT, Comptes rendus Acad. des Sc., Paris, 201, P. 813, 4 Novembre 1935, (séance du 28 Octobre 1935).

⁽¹⁴⁾ Maurice FRECHET, Les espaces abstraits... Paris, 1928, p. 170.

⁽¹⁵⁾ Nous y avons défini, dans tout espace topgen, l'ensemble $\mathcal{K}_0$ compact comme étant l'ensemble possédant la propriété p_1 , dite de Borel, dans la forme de laquelle le caractère topologiquement intrinsèque n'apparaît pas. Il se trouve (M.S., Ibid. p.68, Théorèmes 1 et 2) que, dans tout espace $(\mathcal{V})$, p_1 équivaut à p_4 , mais que, dans un espace $(\mathcal{V})$ quelconque, on peut seulement affirmer que p_1 ENTRAÎNE p_4 mais non toujours réciproquement. De même, dans M.S., Ibid. p.66, nous avons défini, dans tout espace topgen, l'ensemble compact comme étant l'ensemble vérifiant la propriété p_1 , dite de Borel-Lebesgue, dans la forme de laquelle le caractère topologiquement intrinsèque n'apparaît pas. Il se trouve (M.S., Ibid., p.68, Théorèmes 1 et 2) que, dans tout espace $(\mathcal{V})$, p_1 équivaut à p_4 , mais que, dans un espace $(\mathcal{V})$ quelconque, on peut seulement affirmer que p_1 entraîne p_4 mais non toujours réciproquement. Il eût donc été préférable de définir, dans tout espace topgen, l'ensemble compact comme étant celui possédant la propriété p_4 , dite propriété cantorienne généralisée, dont le caractère topologiquement intrinsèque est immédiatement évident. Ces remarques mettent une fois de plus en évidence le rôle simplificateur en topologie de l'axiome α c'est-à-dire de l'axiome axi_4 (A. APPERT, C.R. Acad. des Sc., Paris, 194, p.2277, 27 Juin 1932, Séance 20 Juin 1932).