N. BOULEAU

La jonction entre la théorie du potentiel et les probabilités

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 8 (1987), p. 43-66
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1987__8__43_0>

LA JONCTION ENTRE LA THEORIE DU POTENTIEL ET LES PROBABILITES

N. BOULEAU *

A partir d'une esquisse historique sommairement brossée du développement et de la rencontre de la théorie du potentiel et celle des processus aléatoires, cet exposé conduit à une réflexion sur l'existence et la nature de dictionnaires au sein des mathématiques.

Je remercie vivement B. Bru dont les indications et les critiques ont permis de rectifier plusieurs imprécisions historiques. Que le lecteur veuille bien pardonner celles qui restent encore.

*Conférence donnée le 13 novembre 1985 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

I - LA THEORIE DU POTENTIEL

A - La théorie classique

Originellement la théorie du potentiel est une tentative d'éclaircissement du champ de force défini par la loi de gravitation universelle de Newton (Principia 1685) .

Il n'est pas sans intérêt de rappeler que la théorie de Newton a été assez mal accueillie sur le continent et a fait l'objet de vives critiques non seulement des cartésiens mais de Leibniz et de Huygens essentiellement parce qu'expliquer le mouvement des corps célestes par une attraction à distance apparaissait comme une fausse explication à la fois mystérieuse et incompréhensible, une qualité occulte que nous n'entendons pas, écrit Leibniz (Nouveaux Essais 1703). Alexandre Koyré [1] dira à ce sujet: <<L'opposition au newtonianisme - en tant que physique - fut au début forte et profonde, mais peu à peu elle s'effrita. Le système fonctionnait et faisait ses preuves.[...] Comme l'a très finement remarqué Mach:"L'incompréhensibilité extraordinaire est devenue une incompréhensibilité ordinaire">>. Ce reste d'insatisfaction vis-à-vis du modèle newtonien encore au 18ème et 19ème siècles a certainement contribué à l'intérêt qu'on a trouvé dans son étude détaillée qu'est la théorie du potentiel.

Il semble (cf. [3]) que ce soit Lagrange (1736 - 1813) qui vers 1774 fit le premier l'observation que le champ newtonien pouvait être décrit plus simplement comme le gradient

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\ V$$

d'une fonction scalaire(1) de la position $V = \int \frac{dm}{r}$.

---

(1) Précisons à ce sujet que l'expression "un champ qui dérive d'un potentiel" pour désigner un champ qu'on peut écrire $\overrightarrow{\text{grad}}$ U pour une fonction scalaire U est source de confusion. La théorie du potentiel n'étudie pas ces fonctions U (car ce sont toutes les fonctions de classe C^1), mais uniquement celles du champ newtonien et d'autres analogues comme nous verrons plus loin.

Laplace (1749 - 1827) montre en 1785 que la fonction V vérifie

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 ,$$

et mentionnons que vers la même époque Legendre (1752-1833) calcule le potentiel engendré par un corps quelconque de révolution en introduisant les polynômes auxquels son nom reste aujourd'hui attaché.

Vers 1813 Siméon Denis Poisson (1781-1840) observe que l'équation $\Delta V = 0$ n'est valable qu'en des régions où il n'y a pas de matière et qu'en général on a

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

où ρ est la densité de matière; il résoud cette équation lorsque ρ a une symétrie sphérique grâce aux formules qu'il établit pour la sphère (cf. [13]).

Durant la fin du 18ème siècle et la première moitié du 19ème siècle, en raison du fait que les équations $\Delta V = 0$ ou $\Delta V = -4\pi\rho$ se rencontrent également,

- pour les potentiels des vitesses en mécanique des fluides (Lagrange 1762)
- pour les potentiels électrostatiques et magnétiques (Coulomb 1790)
- pour la température dans les solides homogènes (Fourier 1807),

la théorie du potentiel se développe comme un domaine mathématique propre, et les méthodes mathématiques se raffinent avec l'introduction [4] en 1828 des "fonctions de Green" par Georges Green (1793 - 1841) qui sont des fonctions U(P,M) ne dépendant que de la géométrie d'un corps et donnant le potentiel en un point P de l'espace lorsque le corps porte la densité de masse f(M) par la formule

$$V(P) = \int U(P,M)\, f(M)\, dM .$$

Pour les développements ultérieurs de la théorie, les travaux parmi les plus profonds de cette période sont certainement ceux de Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) [5]. Avec lui débute ce que sera la théorie du potentiel jusqu'à la période récente c'est à dire l'étude de principes mathématiques par lesquels on peut résoudre et expliquer des phénomèmes admis comme faits d'expérience par les physiciens. Il est apparemment le premier à montrer que les fonctions harmoniques (c'est-à-dire les potentiels hors des masses) sont en tout point égales à leur moyenne sur une sphère centrée en ce point (ce qui, on le sait, suffit à les caractériser dans la classe des fonctions boréliennes localement bornées). Il en déduit qu'une fonction harmonique ne peut prendre deux valeurs constantes différentes en deux sous-régions d'un domaine où elle est définie. C'est le début de l'étude des fonctions harmoniques qui sera précisée dans le courant du 19ème siècle par Riemann (1826 - 1866), Harnack (1851 - 1930), Neumann (1832 - 1925) et d'autres.

Est particulièrement intéressante l'approche énergétique que Gauss fait des problèmes physiques. Son point de départ est la formule de réciprocité :

Si les masses M_i aux points P_i engendrent le potentiel V et les masses m_j aux points P_j engendrent le potentiel v alors on a

$$\sum_i M_i v(P_i) = \sum_j m_j V(P_j)$$

ou en termes d'aujourd'hui

$$\int U^{\mu}(P)d\nu(P) = \int U^{\nu}(P)d\mu(P)$$

où U^{μ} est le potentiel de la mesure μ (dans $\mathbb{R}^n$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$). Cette formule est une façon d'exprimer le caractère symétrique du semi-groupe du mouvement brownien par rapport à la mesure de Lebesgue ou encore le caractère autoadjoint du Laplacien Δ. La lecture moderne de la démarche de Gauss est la suivante (cf. [6]):

Si on met sur les mesures la norme-énergie $\|\mu\|_e = (\int U^{\mu}d\mu)^{1/2}$ on obtient pour les mesures d'énergie finie $\underline{E}$ une structure préhilbertienne.

Si E est un convexe complet dans $\underline{E}$, on peut projeter une mesure μ sur E, ce qui donnera une mesure μ_E unique solution d'un problème physique :

. Avec $E_1 = \{\nu \geq 0$ portées par un compact K, $\nu(K) = 1\}$ et prenant pour μ la mesure uniforme sur une sphère contenant K et de potentiel 1 à l'intérieur, trouver $\nu \in E_1$ qui minimise

$$\|\mu-\nu\|_e^2 = \int U^{\nu}d\nu - 2\int U^{\mu}d\nu + \int U^{\mu}d\mu ,$$

c'est-à-dire qui minimise l'intégrale de Gauss

$$\int (U^{\nu} - 2U^{\mu})d\nu ,$$

est une façon de résoudre le problème de l'équilibre : trouver la répartition de charges d'énergie minimale sur un corps de charge totale donnée.

. Avec $E_2 = \{\nu \geq 0$, portées par le compact K$\}$, la projection sur E_2 d'une mesure portée par l'extérieur de K réalise le problème de l'influence : trouver une mesure portée par un corps réalisant à l'intérieur le même potentiel qu'une distribution μ donnée de charges extérieures positives (car si ν_o est cette projection, on a

$$\int U^{\mu} d\nu \leq \int U^{\nu_o} d\nu \quad \forall \nu \in E_2 ,$$

$$\int U^{\mu} d\nu_o = \int U^{\nu_o} d\nu_o \quad \text{d'où } U^{\mu} = U^{\nu_o} \text{ par le principe}$$

de domination).

. Enfin si l'on cherche dans E_2 une mesure ν minimisant $\int (U^{\nu}-2f)d\nu$

où f est une fonction continue positive sur la frontière δK, on trouve une répartition dont le potentiel résoud ce qu'on appelle aujourd'hui le problème de Dirichlet dans K avec donnée frontière f.

Le souci de rigueur de Gauss est grand mais l'existence des répartitions réalisant le minimum de ces intégrales est considérée comme évidente, or le problème est délicat. C'est Henri Cartan qui montrera en 1945 que $\underline{E}$ n'est pas complet mais que son cône positif $\underline{E}_+$ donc E_1 et E_2 le sont.

Il convient ensuite d'évoquer W.K. Thomson (1824 - 1907) (Lord Kelvin) qui en 1845 introduit les belles méthodes géométriques d'inversion et d'images éléctriques. Puis Dirichlet (1805 - 1857) qui dans un article publié en 1866, admettant l'existence d'une fonction u minimisant (parmi les fonctions ayant une valeur frontière donnée) l'intégrale

$$\int_V |\nabla u|^2 \, dM$$

(postulat d'existence qui sera appelé "principe de Dirichlet" par Hilbert), montre que cette fonction est harmonique dans le domaine V et est solution du "problème de Dirichlet".

C'est dans le cours à la Sorbonne de 1894 - 1895 sur la théorie du potentiel newtonien d'Henri Poincaré (1854 - 1912) [12] qu'on trouve la première démonstration rigoureuse d'existence et d'unicité de la solution du problème de Dirichlet dans un domaine de forme générale suffisamment régulier. Cette démonstration mérite qu'on s'y arrête un peu d'une part parce que le résultat est remarquable puisqu'on ne dispose alors d'aucun des espaces fonctionnels complets qu'à donné à l'analyste du 20ème siècle la théorie de l'intégration, d'autre part parce qu'elle servira de prototype aux perfectionnements ultérieurs de Perron, Wiener et Brelot.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, on se donne une fonction continue f sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω et on cherche une fonction harmonique dans Ω tendant vers f à la frontière.

a) On se ramène au cas où f est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction F continue de classe C^2 dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\Delta F < 0$ dans Ω. Pour celà, par les propriétés de convergence des fonctions harmoniques, on montre qu'il suffit de résoudre le problème lorsque f est la restriction d'un polynôme (résultats de Harnack et de Weierstrass). Comme tout polynôme est différence de polynômes P tels que $\Delta P < 0$ dans Ω, on a le a).

b) Comme on sait résoudre le problème de Dirichlet pour des sphères par les formules de Poisson (cf. [13]), on va "balayer" sur des sphères les masses qui sont à l'intérieur en application du résultat suivant :

<u>Lemme</u> : Si des masses μ ont un potentiel continu p, on peut répartir les masses intérieures à un sphère S sur la surface de S de sorte que le potentiel de la répartition obtenue soit continu, coïncide avec p hors de S et soit harmonique dans S.

c) On considère alors un recouvrement $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ de Ω par des sphères incluses dans Ω et, partant du potentiel p_o des masses $-\Delta F$, on balaye successivement sur chaque sphère dans un ordre quelconque pourvu qu'on balaye une infinité de fois sur chaque sphère. Par exemple dans l'ordre $S_1S_2S_1S_2S_3S_1S_2S_3S_4S_1\ldots$ On obtient une suite décroissante $p_o, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ de potentiels coïncidant avec p_o hors de Ω.
Si nous posons alors $p_\infty = \lim\limits_n p_n$, cette fonction comme limite monotone de fonctions harmoniques est harmonique dans chaque sphère S_n donc dans Ω, est positive et coïncide avec p_o hors de Ω.

d) Si par $M_o \in \partial\Omega$ on peut faire passer une sphère S_o extérieure à Ω alors p_∞ est continue en M_o. En effet, on sait résoudre le problème de Dirichlet extérieur pour S_o et la donnée frontière p_o, soit U cette solution, on a aisément

$$U \leq p_\infty \leq p_o$$

d'où la continuité de p_∞ en M_o par celles de U et de p_o qui coïncident en

M_o.

e) Si la condition de sphère extérieure est réalisée en tout point, il suffit de poser

$$h = F - p_o + p_\infty$$

pour avoir une fonction harmonique dans Ω qui vaut f à la frontière et répond donc au problème (pour une analyse plus approfondie de la méthode du balayage et son développement par La Vallée-Poussin cf. [12] oeuvres t. XI conférence de L. Schwartz pour le centenaire p.219-225).

En réaction probablement à cette démonstration impressionnante, Hilbert en 1900 [7] prendra la défense de Dirichlet et de son vague principe en écrivant cette phrase étonnante :

"Tout problème du calcul des variations a une solution pourvu qu'on fasse des hypothèses appropriées sur la nature de la condition frontière et si nécessaire qu'on donne au concept de solution une extension suffisante".

Position provocatrice mais très profonde si on la comprend bien.

L'avenir leur donnera raison à tous les deux en ce sens que des solutions en des sens faibles ont été trouvées lorsque le problème de Dirichlet est insoluble au sens strict, ce qui donne raison à Hilbert, mais elles ont été trouvées en étendant la méthode de Poincaré.

Poincaré fait le tournant avec le 20ème siècle où la théorie du potentiel trouve sa maturité à la fois par l'abondance des travaux et leur généralité.

Je n'évoquerai pas les travaux liés au problème de l'équilibre où il faudrait citer LaVallée-Poussin, Frostmann [16], Henri Cartan et Choquet, ni le développement des méthodes hilbertiennes par Beurling et Deny reprenant les principes variationnels et mettant en évidence le rôle étonnamment fécond du fait que les contractions diminuent l'intégrale de Dirichlet.

Je terminerai avec la théorie classique du potentiel en situant comment les difficultés du problème de Dirichlet ont été élucidées avant la seconde guerre mondiale.

Après que Lebesgue [8] eut donné des exemples explicites d'impossibilité (épine de Lebesgue) le résultat majeur fut le théorème de résolution (1924) [14] de N. Wiener (1894 - 1964). Améliorant une approche antérieure de Perron par des sous-solutions et sur-solutions, Wiener réussit à montrer que, pour un ouvert borné quelconque et une donnée frontière continue, il existait une fonction harmonique privilégiée qu'on pouvait considérer comme la solution du problème de Dirichlet quoiqu'elle ne tende pas vers la donnée frontière en tout point mais seulement en "la plupart" des points de la frontière. Ce théorème permet de définir comme mesure de Radon sur $\partial\Omega$ la mesure harmonique μ_x d'un point de l'ouvert et d'exprimer la solution du problème de Dirichlet sous la forme

$$H^f(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)\ \mu_x(dy) \ .$$

En 1933 Kellogs et Evans montrent que les points irréguliers forment un ensemble polaire et en 1939 [15] Brelot montre que les mesures harmoniques associées à divers points de l'ouvert, supposé connexe, sont équivalentes et que la méthode de Wiener s'étend à toutes les données frontières intégrables pour la mesure harmonique et uniquement celles-là (théorème de résolutivité).

B - Les extensions

Quoique plusieurs généralisations soient apparues auparavant (potentiels de Riesz, etc.), c'est surtout après la seconde guerre mondiale que plusieurs extensions de la théorie du potentiel ont été examinées en liaison notamment avec la théorie des semi-groupes d'opérateurs.

Les "principes". On a étudié systématiquement les opérateurs qui vérifiaient certaines propriétés-clefs du Laplacien et à partir desquels une théorie du potentiel pouvait être construite, tels les opérateurs vérifiant le principe du maximum positif qui sont les opérateurs A sur $C_o(E)$, E localement compact, de domaine DA dense tels que si $f \in DA$ et $f(x) = \sup_y f(y) > 0$ alors $Af(x) \leq 0$.

Ou de même à partir de l'opérateur potentiel, avec le principe de domination et le principe complet du maximum ; il faut citer ici les travaux de Hunt, Choquet et Deny notamment.

Les théories axiomatiques. L'idée consiste à considérer un faisceau de fonctions sur un espace localement compact qu'on appellera fonctions harmoniques, de faire des hypothèses sur les propriétés de convergence de ces fonctions et sur la résolubilité du problème de Dirichlet pour une classe d'ouverts dits réguliers qui engendrent la topologie de l'espace et joueront le rôle des sphères de la théorie classique, et de là d'en déduire toute la théorie du potentiel :

Fonctions surharmoniques, mesure harmonique, réduites et balayées, décomposition de Riesz, ensembles exceptionnels, frontière de Martin, topologie fine, etc.

Si les propriétés de convergence des fonctions harmoniques sont celles qu'on a pour un opérateur elliptique on obtient l'axiomatique de Brelot [9]. Avec d'autres hypothèses ou d'autres points de départ, d'autres axiomatiques ont été développées par J.L. Doob, H. Bauer ([10] cas parabolique), Boboc, Constantinescu et Cornea (cf [11]), R.M. Hervé, etc.

Pour bien évaluer l'intérêt des diverses extensions de la théorie du potentiel, il convient de faire une courte parenthèse à propos de la généralisation en mathématiques.

Considérez une certaine situation mathématique qui dépend d'un certain nombre d'hypothèses, si vous supprimez certaines de ces hypothèses vous obtenez une situation plus générale mais aussi plus pauvre en propriétés. Par exemple si, à partir de la notion de groupe, vous ôtez l'existence d'un inverse et d'un élément neutre et l'associativité, vous obtenez la théorie des monoïdes extrêmement générale mais qui a peu de propriétés remarquables. Il peut même se faire que la généralisation soit si pauvre qu'elle se trouve être un cas particulier de la situation initiale ! (Les probabilistes connaissent bien un tel cas, les processus croissants bruts et fonctionnelles additives brutes, objets apparamment plus généraux, ne sont que des processus croissants et des fonctionnelles adaptées à la filtration constante $G_t = F_\infty$).

Il se trouve que la théorie du potentiel se présente très différemment à cet égard. Elle a une architecture logique très forte et il se produit un phénomène assez rare : on peut affaiblir beaucoup certaines hypothèses sans perdre la richesse de la théorie. Il est tout à fait possible de prendre comme hypothèse certaines conclusions et de retrouver comme conclusion les hypothèses.

Il semble aujourd'hui que le cadre à la fois riche et le plus général soit celui des résolvantes de Ray qui correspond à la notion probabiliste de processus droit. On peut même dire qu'à certains égard cette théorie est plus riche que la théorie classique dans laquelle pour des raisons somme toute fortuites certaines notions se confondent (comme les polaires et les semipolaires par exemple) ou n'existent pas (martingales discontinues par exemple).

Parmi les extensions citons aussi l'étude de l'ordre spécifique des fonctions surhamoniques, de la propriété de réduite et du balayage dans le cadre des cônes de potentiels par G. Mokobodzki [17] et l'approche originale de D. Feyel [17] qui présente la théorie du potentiel comme une généralisation de la théorie de l'intégration.

II - LE MOUVEMENT BROWNIEN ET LES PROCESSUS DE MARKOV AVANT 1940

Nous abandonnons provisoirement la théorie du potentiel non pas pour remonter à l'origine de la théorie des probabilités mais simplement à celles des processus aléatoires à temps continu dont l'étude a commencé par un travail pionnier de Louis Bachelier [19]. Dans les années 1900 à 1912 Bachelier étudie principalement ce qu'on appelle aujourd'hui les P.A.I.S. (Processus à Accroissements Indépendants Stationnaires) et le mouvement brownien dans R^d. Il obtient des formules remarquables notamment que la densité de probabilité de la position de la particule vérifie

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

(équation d'évolution associée à un opérateur elliptique) qu'il appelle "équation du rayonnement de la probabilité" par analogie avec l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta = 0$$

qu'il obtient lorsque les hypothèses sont symétriques. Les méthodes de démonstration de Bachelier qui seront jugées insuffisantes trente ans plus tard par Kolmogorov sont historiquement très intéressantes. Il utilise exclusivement l'intuition du jeu : un processus à valeur R^n est décrit comme des parties entre n joueurs d'un jeu infinitésimal avec des enjeux infinitésimaux, les parties successives étant indépendantes. Si l'on pense à l'approximation d'un PAI par une promenade aléatoire on n'est pas étonné finalement que ces raisonnements conduisent aux bonnes formules. Je passe sur les travaux d'Einstein et des physiciens dont la rigueur n'est pas non plus le premier souci.

Il faut attendre les travaux de Wiener(1921 et 1923 [20]) pour que la rigueur mathématique retrouve ses droits. Tirant profit de la théorie de la mesure de Borel et Lebesgue, il introduit rigoureusement la loi de probabilité du mouvement brownien comme mesure régulière sur l'espace des fonctions continues. Il montre que les trajectoires ne sont pas à variation bornée, développe la théorie des intégrales stochastiques de fonctions certaines, etc.

C'est dans un style mathématique d'une modernité absolue qu'en 1931 Kolmogorov [21] , généralisant les P.A.I., étudie les processus de Markov à trajectoires continues , introduit la notion générale de probabilité de transition sur un espace mesurable et écrit des hypothèses précises sous lesquelles cette probabilité de transition vérifie deux équations aux dérivées partielles, dites équation avant et équation arrière de Kolmogorov, l'équation avant étant appelée de Fokker-Planck par les physiciens. Ces travaux sont antérieurs au fameux article de 1933 où il fonde, suivant les idées de Borel, le calcul des probabilités sur la théorie de la mesure définissant correctement la notion d'espérance conditionnelle.

En 1934 Paul Lévy, après les travaux de Finetti (1929), obtient un procédé de compensation des sauts qui lui permet d'établir la formue générale de la fonction caractéristique d'un PAI (caractérisation des lois indéfiniment divisibles).

La loi du logarithme itéré est obtenue pour le mouvement brownien en 1936 par Khintchine.

En 1936 Feller étudie les solutions de l'équation de Chapmann-Kolmogorov (propriété de semi-groupe) , les semi-groupes d'opérateurs sur $C_o(R^n)$ et introduit les processus de Markov avec sauts.

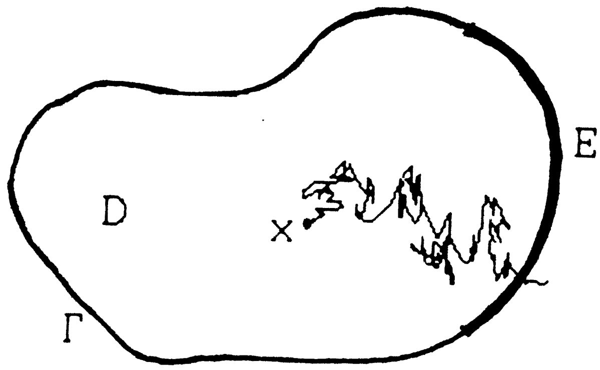
Le terme de martingale apparaît pour la première fois en mathématiques sous la plume de Ville pour désigner ce que Paul Lévy appelait "suite de variables aléatoires enchaînées" dans son livre de 1937 [21].

1940 :J.L.Doob démontre ses premières inégalités de martingales.

III - LA JONCTION

A. Le théorème de Kakutani.

Dans une note à l'académie des sciences de Tokyo de 1944, Kakutani démontre le théorème suivant :
Etant donné un domaine D du plan limité par une courbe régulière Γ, la probabilité pour que le mouvement brownien partant de $x \in D$ atteigne la frontière dans un arc E est la valeur en x de la fonction harmonique dans D qui vaut 1 sur E et 0 sur E^c.



Si nous posons $f = 1_E$ fonction indicatrice de E, cela s'écrit avec des notations classiques

$$\mathbb{E}_x[f(X_T)] = (H_D f)(x)$$

où $H_D f$ désigne la solution du problème de Dirichlet avec donnée frontière f :

$$H_D f(x) = \int f(y)\, \mu_x(dy) \; .$$

Cela revient à dire que si T est l'instant aléatoire d'atteinte de Γ, la loi de X_T partant de x est la mesure harmonique μ_x.

La démonstration consiste à poser

$$g(x) = \mathbb{E}_x[f(X_T)] \; ,$$

puis à montrer, grâce à ce que Doob appellera en 1953 la propriété de Markov forte, que si τ est le temps d'atteinte d'un cercle S de centre x inclus dans D alors

$$g(x) = E_x[g(X_\tau)]$$

donc que g est égale à sa moyenne sur des cercles donc harmonique. Il reste à vérifier les limites à la frontière ce qui se ramène ici compte-tenu de la régularité de la frontière à la continuité du mouvement brownien.

Il y a deux remarques à faire à propos de ce théorème :

1) La première est qu'il semble que, comme souvent en mathématiques,

l'idée, sous des formes voisines, soit nettement antérieure à Kakutani. Paul Lévy ([22] Trois théorèmes sur le mouvement brownien, corollaire et note (2) page 125) connaissait le résultat dès 1941 (mais sa démonstration utilise l'invariance conforme de la loi du mouvement brownien plan alors que celle ci-dessus s'étend sans changements à la dimension d). Il y a aussi un travail de Petrowkii en 1934 et un article de Phillips et Wiener de 1923 où apparaissent des idées voisines.

2) La seconde est qu'il était connu depuis le tout début de la théorie des processus aléatoires (Bachelier) que les processus de Markov avaient des liens avec les équations elliptiques du second ordre et avec le Laplacien pour le mouvement brownien.

Au demeurant l'article de Kakutani marque le début d'une période où un nouvelle façon de voir va se développer très rapidement d'une part grâce à la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach developée par Hille et Yosida dans les années 50 (cf. [24], [25]), d'autre part par l'étude des processus de Markov eux-mêmes par Feller et surtout par Hunt [26] qui permet d'interpréter toutes les notions de la théorie du potentiel en terme de trajectoires d'un processus de Markov :

. Les opérateurs de réduites s'interprétent grâce aux temps d'entrées par la formule

$$P_A^p f(x) = E_x\left[e^{-pT_A} f(X_{T_A})\right],$$

. Les ensembles polaires sont ceux qui sont ignorés par les trajectoires,

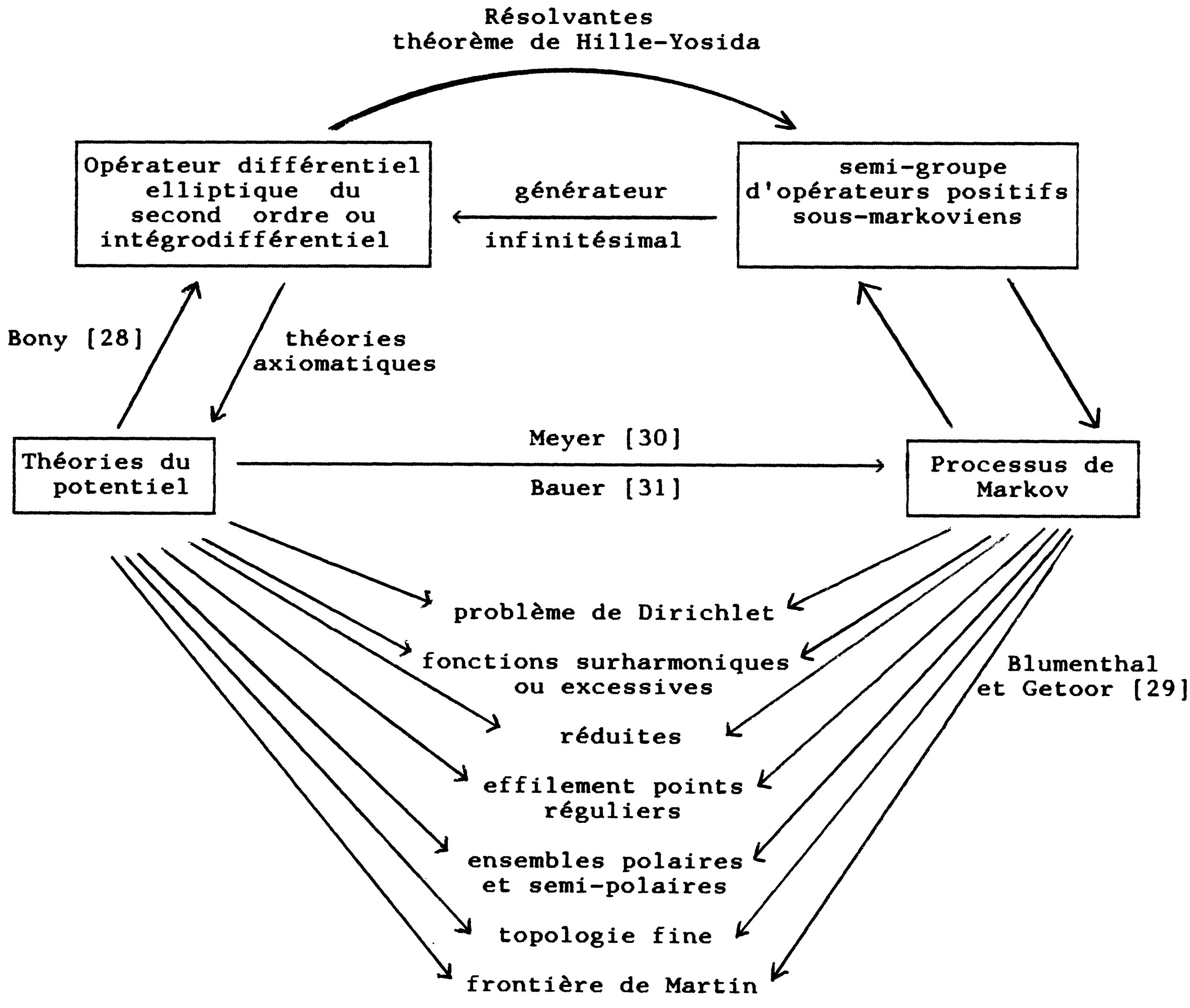
. Les ensembles semi-polaires sont ceux dans lesquels on ne passe qu'un ensemble dénombrable de fois,

. La topologie fine est celle qui rend continues les fonctions continues à droites sur les trajectoires,

etc.

B. Unification des deux théories

Les trois articles magistraux de Hunt (qui franchissent des difficultés notables comme l'introduction des fonctions presque-boréliennes pour étudier les fonctions excessives, l'utilisation de la théorie des capacités de Choquet pour montrer la mesurabilité des temps d'entrée, etc.) sont plus qu'une interprétation, ils donnent à la théorie du potentiel des moyens de démonstrations nouveaux(2), et constituent véritablement la jonction avec la théorie des processus de Markov. Si l'on se reporte au diagramme suivant nécessairement très schématique, en fait Hunt ne part pas d'un opérateur elliptique mais d'une notion duale plus générale : un opérateur potentiel intégral d'un semi-groupe de Markov aujourd'hui appelé noyau de Hunt.



Quelques mots de commentaire sur ce schéma. Dès 1963 P.A. Meyer [30] montre que l'approche de Hunt est plus générale que l'axiomatique de

---

(2) A la même époque, l'extension du théorème de Fatou sur la limite du rapport de deux fonctions harmoniques positives est obtenue par J.L Doob d'abord de façon probabiliste (1957) puis analytique (1959) (cf. [27]).

Brelot, résultat qui vaudra aussi pour l'axiomatique de Bauer [31]. D'autre part J.M. Bony montrera [28] que si une théorie axiomatique est construite sur $\mathbb{R}^n$ alors son faisceau de fonctions harmoniques est l'ensemble des solutions de $Lf = 0$ pour un opérateur elliptique L éventuellement dégénéré. Les liens entre les divers points de départ, noyau de Hunt, résolvantes, générateur, cogénérateur sont unifiés par F. Hirsch [32].

La situation est maintenant la suivante : à partir de n'importe quelle théorie du potentiel (classique, potentiels de Riesz, axiomatique Brelot ou Bauer ou famille résolvante de Ray) on peut associer un processus de Markov (processus de Hunt s'il est quasi continu à gauche, processus standard s'il est de Hunt sauf éventuellement à sa durée de vie ζ, processus droit s'il faut changer la topologie pour avoir des limites à gauche, cf. [33]) avec lequel on peut intrepréter toutes les notions de la théorie du potentiel initiale. Même certaines théories voisines comme la théorie axiomatique des fonctions biharmoniques de Smyrnelis [34] et des situations plus générales se ramènent à la théorie markovienne (cf. [35]).

Signalons également que la théorie des espaces de Dirichlet de Beurling-Deny se trouve en correspondance dans ce schéma avec la théorie des processus de Markov symétriques étudiés notamment par Silverstein [36] et Le Jan [37], cette correspondance fait l'objet du livre de Fukushima [38] et reçoit un intérêt renouvelé en liaison avec le calcul de Malliavin cf. [39], [40] et [41].

On peut dire aujourd'hui qu'il n'y a plus qu'une seule théorie. La théorie du potentiel a absorbé la théorie des processus de Markov ou vice et versa selon le point de vue.

IV LES DICTIONNAIRES, QUELQUES REFLEXIONS

Les deux interprétations donnent lieu à des dictionnaires, on doit même distinguer un troisième niveau : celui de la théorie des martingales.

théorie newtonnienne classique		Cadre markovien $(\mathbb{P}_x, X_t, \theta_\theta)$		Cadre abstrait (Ω, F_t, P)
fonction harmonique	$\longleftrightarrow$	$f(X_t)-f(X_o)$ est une martingale fonctionnelle additive	$\longleftrightarrow$	martingale
fonction harmonique	$\longleftrightarrow$	fonction excessive	$\longleftrightarrow$	surmartingale positive
mesure positive	$\longleftrightarrow$	fonctionnelle additive croissante	$\longleftrightarrow$	processus croissant
potentiel	$\longleftrightarrow$	Espérance de la valeur à l'infini d'une fonctionnelle additive croissante	$\longleftrightarrow$	surmartingale ≥ 0 tendant vers zéro à l'infini dans L^1
réduite	$\longleftrightarrow$	Valeur maximale espérée en arrêt optimal	$\longleftrightarrow$	solution du problème d'arrêt optimal de Snell
[(La notion n'apparait pas car les fonctions surharmoniques sont toutes régulières)]		fonctions excessives régulières	$\longleftrightarrow$	surmartingale quasi continue à gauche
espaces H^1 et BMO sur le disque unité	$\longleftrightarrow$	[situation peu étudiée cf. [42]]	$\longleftrightarrow$	espace H^1 et BMO de martingales

Cette liste pourrait être beaucoup plus longue et détaillée (voir aussi [31] et [43] page 33).

Quelle est la nature véritable de ces correspondances et ces dictionnaires ?

D'habitude en mathématiques, lorsqu'une correspondance biunivoque a été établie entre deux notions de telle sorte qu'on sait que si l'on rencontre l'une de ces notions l'autre est nécessairement présente, alors, en général, les deux concepts vont par la pratique mathématique et l'usage apparaître progressivement comme deux aspects d'une notion unique nouvelle. Ils vont se fondre, perdre leur autonomie et se trouver relégués au niveau de propriétés d'un être nouveau plus abstrait. Par exemple, le théorème représentation de Riesz nous dit que si K est un compact et si C(K) est l'espace des fonctions réelles continues sur K, toute forme linéaire positive sur C(K) définit de façon unique une mesure σ-additive positive bornée sur les boréliens de K et vice-versa. Dans cette situation nous pensons plus qu'une seule notion, la notion de mesure de Radon dont on a ainsi deux propriétés (parmi d'autres comme celle d'être une forme linéaire continue sur C(K)). La notion de mesure de Radon n'a lieu d'être par rapport à la notion de mesure σ-additive abstraite ou par rapport à la notion de forme linéaire sur un espace fonctionnel que par cette correspondance qui l'a engendrée et qu'elle résume.

Si l'on considère le théorème de Hille-Yosida qui établit une correspondance biunivoque entre un opérateur et un semi-groupe ou le théorème de Kakutani qui met en correspondance certaines martingales et certaines fonctions harmoniques, on est tenté de croire que les notions qui sont en relation dans ces dictionnaires vont se fondre et donc disparaître en tant que telles.

Mais ici la situation est différente, il semble qu'il y ait des obstacles spécifiques qui empêchent ou du moins freinent le processus de fusion par abstraction que nous venons d'évoquer :

a) D'abord on ne peut actuellement considérer ces dictionnaires comme des correspondances biunivoques car elles ne sont rigoureuses qu'à condition de spécifier avec précision les hypothèses alors que tout le monde sait qu'elles sont valides dans des conditions bien plus générales : par exemple, dans le schéma de la partie III, on sait faire le cycle complet lorsque l'opérateur différentiel est de classe C^2 uniformément elliptique, mais il est notoire qu'on peut mettre un opérateur elliptique dégénéré et même un opérateur intégro-différentiel générateur infinitésimal de semi-groupe sous-markovien.

b) La seconde raison est que ces correspondances se situent surtout dans le champ sémantique et sont une connexion entre des termes qui ont des sens différents. Nous employons ici la catégorie de sémantique en une acception très large qui va au delà du "sens référentiel" et inclut aussi bien la "pragmatique" de Peirce que "l'intérêt" d'Habermas : relève de la sémantique tout ce qui fait que certaines productions de la syntaxe ne nous sont pas indifférentes et portent des enjeux. C'est donc une dimension historico-sociale, le sens des objets mathématiques nous est transmis par les textes mathématiques publiés, par les manuels pédagogiques et les exemples qu'ils proposent, et les exposés des mathématiciens, les applications qu'ils citent et les références au passé vis-à-vis desquelles ils se situent(3). L'importance de cette dimension sémantique est bien illustrée par la situation qui nous occupe : ces correspondances établissent des liens entre des notions qui étaient rattachées par l'histoire et l'usage à des applications, à des pratiques et à des enjeux d'ordre totalement différent.

D'un côté elles sont nées de la géométrie et de la mécanique, c'est à dire plus profondément de notre perception de l'espace et du mouvement et se sont appliquées au passage à l'électricité et au magnétisme pour certains de leurs aspects très spatio-géométriques (pensons aux problèmes que se pose Gauss, aux images électriques de Lord Kelvin, etc.).

De l'autre, elles sont portées par ce qu'on peut appeler l'intuition probabiliste (souvenons-nous des démonstrations de Bachelier) fondée sur notre compréhension directe de l'indépendance de phénomènes engendrés des chaînes causales différentes (tels que le dernier chiffre du numéro de téléphone et la taille de l'abonné). On peut d'ailleurs comprendrte l'intuition probabiliste sous un angle plus historique que psychologique, en tant qu'explication du fait que la plupart des formules de Bachelier ou celles de Paul Lévy sont exactes, ce qui n'est pas du tout évident si l'on s'en tient à la déduction formelle.

---

(3) Au contraire la syntaxe pure crée des assemblages de signes anodins et insignifiants. On a souvent souligné la valeur ludique ou esthétique du maniement du formel pur et son rôle dans la découverte mathématique. Nous pensons que cela ne vaut que pour ce qui est rattaché de près ou de loin à certains enjeux. Le formel "brut" n'est ni triste, ni beau ni laid, il est indifférent.

Ces origines historiques et ces représentations intuitives situées dans des ordres d'idées étrangers expliquent l'irréductibilité l'une à l'autre des notions mises en correspondance ainsi que l'existence de deux terminologies naturelles distinctes.

Parmi les philosophies des mathématiques, l'existence de ces dictionnaires est choquante surtout de deux points de vue :

Du point de vue du platonisme pur qui croit à un monde d'idées qui s'organisent de façon parfaite avec lesquelles serait en relation le mathématicien.

Et du point de vue formaliste pour lequel n'a droit de citer en mathématique que ce qui a sa place dans un système axiomatique précis et donc pour lequel entre une mesure positive, une fonctionnelle additive croissante et un processus croissant il n'y a rien de rigoureux donc rien du tout.

Ainsi ces dictionnaires ont-ils une position clef de l'élaboration d'une épistémologie des mathématiques qui se voudrait un peu moins schématique que les points de vue cités ci-dessus (ce qui n'est pas notre propos ici) notamment parce qu'ils constituent une situation dont on ne peut rendre compte si on élimine la dimension historique des mathématiques et le fait qu'elle résultent d'une pratique sociale.

N. BOULEAU
CERMA-ENPC
B.P. 105
93194 Noisy-le-Grand
FRANCE

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. KOYRE - Etudes newtoniennes Gallimard 1968

[2] H. BURKHARD, W.F. MEYER - Potential theorie
Enzyc. Math. Wiss. II A 7b (1900) 464-503
J.L. LAGRANGE - Sur l'équation séculaire de lune
Oeuvres 6 p335-399 Gauthier-Villars (1873)

[3] LAPLACE - Oeuvres 10,11 imprimerie royale (1846)

[4] G. GREEN - An essay on the application of mathematical Analysis to the theory of electricity and magnetism (1828)

[5] C.F. GAUSS - Allgemeine Lehrsätze über Anziehungs- und Abstossungskräfte (1840)

[6] M. BRELOT - La théorie moderne du potentiel
Ann. Inst. Fourier 4 113-140 (1953)
M. BRELOT - Eléments de la théorie classique du potentiel
C.D.U. (1969)

[7] D. HILBERT - Ueber das Dirichletsche Prinzip (1900)

[8] H. LEBESGUE - Sur le cas d'impossiblité du problème de Dirichlet
C.R.A.S. (1912)

[9] M. BRELOT - Axiomatique des fonctions harmoniques
Montréal 1965

[10] H. BAUER - Harmonische Räume und ihre Potenzialtheorie
Lect. Notes 22 Springer 1965

[11] C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA - Potential theory of harmonic spaces
Springer 1972

[12] H. POINCARE - Théorie du potentiel newtonnien
Cours à la Sorbonne 1894-1895, Carré et Naud 1899
notamment chapitre VII p 283-288
- Oeuvres t.I à XI publiées s.l.a. de l'Acad des Sc.
Gauthier-Villars 1956

[13] S.D. POISSON - J. Ec. Polytechnique 18 (1820) p422
- J. Ec. Polytechnique 19 (1823) p150

[14] N. WIENER - Certain notions in potential theory
J. Math. Phys. MIT 3 (1924) 24-51
The Dirichlet problem
J. Math. Phys. MIT 3 (1924) 127-146

[15] M. BRELOT - Familles de Perron et problème de Dirichlet
Acta Szeged, IX (1939) 133-153

[16] O. FROSTMAN - Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles
Meddel. Sunds Univ. Mat. Sem. 3(1935) 1-118

[17] G. MOKOBODZKI, D. SIBONY - Sur une propriété caractéristique des cônes de potentiels
C.R.A.S. 266(1968) 215-218
(voir aussi la bibliographie de [45]

[18] D. FEYEL - Espaces de Banach fonctionnels adaptés, quasi-topologies et balayage
Semi. th. du potentiel n°3
Lect. notes in math. 681 Springer 1978

[19] L. BACHELIER - Théorie de la spéculation
Ann. Sci. Ecole Normale 17 (1900) 21-86
Théorie mathématique du jeu
Ann. Sci Ecole Normale 18 (1901) 143-210

[20] N. WIENER - Differential space
J. Math. Phys. MIT 2(1923) 131-174

[21] A.N. KOLMOGOROV - Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Math. Ann. 104-158 (1931)

[22] P. LEVY - Le mouvement brownien plan
Amer. J. Math 62 (1940) 487-550
- Théorie de l'addition des variables aléatoires
Gauthier-Villars (1937)
- Trois théorèmes sur le mouvement brownien
Assoc. Franç. p. l'Av. des Sc. suppl. au fasc. 9 (janv 1947)

[23] S. KAKUTANI - Two-dimensional brownian motion and harmonic functiions
Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 51944) 706-714

[24] E. HILLE - Functional Analysis and semigroups
Colloq. Publ. A.M.S. (1948)

[25] K. YOSIDA - On the differentiability and the representation of one parameter semigroups of linear operators
J. Math. Soc. Japan 1 (1948) 15-21

[26] G.A. HUNT - Markoff processes and potentials I
Ill. J. Math. 1 (1957) 44-93

Markoff processes and potential II
Ill. J. Math. 1 (1957) 316-369
Markoff processes and potential III
Ill. J. Math. 2 (1958) 151-213

[27] J.L. DOOB - Conditional brownian motion and the boundary limits of harmonic functions
Bull. Soc. Math. Fr. 85 (1957) 431-458
A non-probabilistic proof of the relative Fatou theorem
Ann. Inst. Fourier 9(1959) 293-300

[28] J.M. BONY - Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel
C.I.M.E. Stresa 1969

[29] R.M. BLUMENTHAL, R.K. GETOOR : Markov processes and potential theory
Acad. Press 1968

[30] P.A. MEYER - Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory
Am. Inst. Fourier 13,2 (1963) 357-372

[31] H. BAUER - Harmonic spaces and associated Markov processes
C.I.M.E. Stresa (1969)

[32] F. HIRSCH - Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs potentiels
Am. Inst. Fourier 22, 1972 fasc 1

[33] R.K. GETOOR - Markov processes : Ray processes ans Right processes
Springer

[34] E.P. SMYRNELIS - Axiomatique des fonctions biharmoniques
I Am. Inst. Fourier 25-1 (1975) 35-97
II Am. Inst. Fourier 26-3 (1976) 1-47

[35] N. BOULEAU - Théorie du potentiel associée à certains systèmes différentiels
Math. Am. 255 (1981) 335-350

[36] M.L. SYLVERSTEIN - Symmetric Markov processes
Lect. notes in Math. 426 Springer 1974

[37] Y. LE JAN - Mesures associées à une forme de Dirichlet, Applications
Bull. Soc. Math. Fr. 106 (1978) 297-319

[38] M. FUKUSHIMA - Dirichlet Forms and Markov processes
North Holland (1980)

[39] P. MALLIAVIN - Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators.
Proc. Symp. SDE Kyoto 1976 Tokyo 29(1982)

[40] S. KUSUOKA Dirichlet forms and diffusion processes ou Banach spaces
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 29(1982)

[41] N. BOULEAU, F. HIRSCH - Calculs fonctionnels dans les espaces de Dirichlet et application aux équations différentielles stochastiques lipschitziennes
C.R.A.S. janvier 1985

[42] P.A. MEYER - Martingales locales fonctionnelles additives I et II
Sem. Probabilités XII Lect. notes 649 Springer 1978

[43] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER - Probabilités et potentiel théorie des martingales
Hermann 1980

On trouvera des compléments sur les thèmes abordés dans cet exposé et dans les ouvrages et articles suivants :

[44] P.A. MEYER - Probabilités et Potentiel
Hermann 1966
- Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 672-676

[44] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER - Probabilités et Potentiel
Théorie discrète du Potentiel
Hermann 1983

[46] J.L. DOOB - Classical Potential Theory and its Probabilistic counterpart
Springer 1984

[47] Théorie du Potentiel (Colloque en l'honneur de J. DENY)
Proceedings Orsay 1983. Lect. notes in Math 1096
Springer 1984

ainsi que dans les cahiers du séminaire Brelot-Choquet-Deny maintenant séminaire Hirsch-Mokobodzki et dans le séminaire de Probabilités, tous deux publiés dans les lectures notes in math. de Springer.

Il n'est pas possible de faire la liste des travaux récents qui complètent ou précisent ces dictionnaires. Mentionnons seulement

. [48] G.A. BROSAMLER - Quadratic variations of potentials and harmonics functions
Transaction A.M.S. 149 (1970), 243-247,

qui est important et n'est pas cité dans la bibliographie de [46].