

DENIS LANIER

**Leibniz, la nouvelle analyse et la géométrie ou enquête
sur la fenêtre de Viviani**

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1^{re} série, tome 8 (1987), p. 203-227

http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1987__8__203_0

© Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LEIBNIZ, LA NOUVELLE ANALYSE ET LA GEOMETRIE

ou

ENQUETE SUR LA FENETRE DE VIVIANI

par

Denis Lanier★

L'objet de cet exposé est l'étude de la contribution de Leibniz à la remise en cause des méthodes géométriques traditionnelles à la fin du XVII^e siècle. Cette étude porte sur le travail de Leibniz à propos d'un problème "célèbre" proposé, de façon polémique, à l'ensemble des mathématiciens en 1692. Ce problème, dit de la "voûte quarrable" ou de la "fenêtre de Viviani", intervient comme un révélateur des tensions, débats, ambitions et remises en cause qui sont, alors, à l'ordre du jour. Ses différentes résolutions montrent en quoi les méthodes modernes, la nouvelle Analyse, s'opposent aux méthodes géométriques anciennes.

Notre attention a été attirée sur la "fenêtre de Viviani" à la lecture de l'ouvrage de Michel Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*⁽¹⁾, qui donne une très grande importance au travail de Leibniz sur cette courbe. La fenêtre de Viviani serait, selon Serres, l'occasion pour Leibniz, de faire la synthèse des méthodes arguésienne (perspective), cartésienne (géométrie des coordonnées) et leibnizienne (calcul infinitésimal) réunies sur une application pratique. Voilà un programme ambitieux et bien fait pour séduire tout amateur d'histoire des sciences et du XVII^e siècle. L'enquête que nous allons mener sur la fenêtre de Viviani montre, textes à l'appui, que la réalité est plus "banale", mais peut-être plus sérieuse.

Pour comprendre le cadre du travail de Leibniz, il semble important de décrire d'abord et brièvement la vie de l'auteur de l'énigme, son style en mathématiques, ses sources antiques et ses objectifs polémiques. Nous étudierons ensuite le contenu de la réponse de Leibniz à l'énigme.

Viviani, le personnage

Vincenzo Viviani est né à Florence le 5 avril 1622 d'une famille patricienne⁽²⁾. Il est très tôt initié à la géométrie par le père cordelier Sébastien de Petra Santa. A 17 ans, il se consacre aux études sous la direction de Galilée, alors vieux et aveugle, dans sa retraite d'Arcetri. Il est le compagnon fidèle et dévoué des dernières années de Galilée, jusqu'à la mort de ce dernier en 1642. Viviani conçoit une telle estime pour son maître qu'il regardera toujours comme son plus beau titre de gloire celui de

★ Conférence donnée le 14 mai 1986 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

dernier élève de Galilée. Il se place ensuite sous la conduite de Torricelli, qu'il compte bientôt comme son second maître.

Son admiration et son respect pour l'autorité des Anciens va si loin qu'il fait le projet à 24 ans de réparer la perte du traité *De locis solidis* d'Aristée l'Ancien. On sait que la communauté scientifique avait alors connaissance de l'existence de traités de géomètres antiques (en particulier grâce à la *Collection mathématique* de Pappus), mais certains de ces ouvrages étaient réputés perdus ou non encore traduits de manuscrits arabes. C'était le cas (et ce l'est toujours) d'Aristée l'Ancien, contemporain d'Euclide, qui aurait écrit cinq livres sur les coniques et un sixième *De locis solidis* sur les lieux géométriques utilisant celles-ci. C'est ce dernier traité que Viviani se propose de reconstituer. N'ayant à sa disposition qu'un seul passage de Pappus, il se trouve dans l'obligation de deviner ce qu'Aristée avait dit ou pu dire. C'est pour cette raison qu'il intitule son ouvrage *Divinatio in Aristeum*.

Il va d'abord s'entraîner avec Apollonius de Perge. Sur les huit livres d'Apollonius, on n'avait alors que les quatre premiers, les autres étant estimés perdus. Le cinquième livre traite en partie de questions "de maximis et de minimis". Viviani se lance dans sa divination et il est fort avancé dans son travail lorsqu'il apprend en 1656 que le médecin Borelli a retrouvé dans des manuscrits de la bibliothèque des Médicis à Florence une traduction arabe d'Apollonius (en fait il manquait le dernier livre qui n'a pas été retrouvé depuis). Borelli fait porter le manuscrit à Rome et le fait traduire par un savant maronite. Pour ne pas perdre le fruit de ses recherches, Viviani fait constater au Grand Duc de Toscane qu'il ne connaissait pas l'existence du manuscrit arabe et qu'il ne parle pas cette langue. En 1659 la traduction d'Apollonius et la divination de Viviani paraissent simultanément. D'après Fontenelle, Viviani avait fait plus que deviné, c'est-à-dire qu'il avait été plus loin qu'Apollonius sur le même sujet. En fait, comme le remarque Montucla, ce n'était pas si vrai pour les questions les plus difficiles, comme le problème des normales.

A la suite de cet exploit remarquable, la réputation de Viviani s'étend dans toute l'Europe. Les Princes de Médicis le couvrent d'honneurs. Il est nommé géomètre du Grand Duc Ferdinand, puis maître de mathématiques des pages, professeur à l'académie de Florence et enfin premier ingénieur. Le Grand Duc le charge en 1662 de régler avec Cassini (qui représentait alors le pape) les contestations relatives au cours de la Chiana et de ses inondations. Les deux savants se lient d'amitié et en profitent pour faire des observations astronomiques, archéologiques et botaniques.

Colbert, sur la proposition de Chapelain⁽³⁾, l'inscrit sur la liste des savants étrangers auxquels Louis XIV faisait éprouver les effets de sa munificence. Membre de l'Academia del Cimento, de l'Académie des Arcadiens, il est admis en 1699 à l'Académie Royale des Sciences de Paris comme associé étranger. Louis XIV lui offre la place de premier astronome (comme à Cassini), mais Viviani, très attaché à sa ville, refuse; il garde toutefois une vive reconnaissance envers Chapelain et Louis XIV pour leurs bienfaits.

Avec l'argent reçu de Louis XIV il fait construire à Florence un palais qui est une sorte de musée consacré à la gloire de Galilée avec bustes, tableaux, bas-reliefs relatant les expériences et inventions de son maître. Il n'oublie pas le généreux donateur en faisant placer sur la façade l'inscription "Aedes a deo datae" qui serait une heureuse allusion au surnom (Dieudonné) attribué à Louis XIV au début de sa vie⁽⁴⁾.

En 1674 Viviani publie un écrit de Galilée sur la théorie des proportions d'Euclide auquel il joint des amusements géométriques résolus par l'analyse ancienne. Viviani écrit d'autre part une vie de Galilée, en

partie grâce aux manuscrits qu'il avait soustrait de la maison de ce dernier après sa mort. Il avait eu raison en cela puisque, si Galilée eut un fils, Vincenzo, mathématicien, l'un de ses petits enfants, "prêtre bigot ou imbécile ou les deux" (je cite Montucla) supprima une grande partie des écrits de son illustre aïeul. C'est dans cette vie de Galilée, *Racconto istorico della vita di Galilei*, que l'on trouve relatées les célèbres expériences de la tour de Pise et du pendule de la cathédrale de Pise⁽⁶⁾.

Viviani finit par terminer sa divination d'Aristée, qui paraît en 1701⁽⁷⁾. Montucla relève qu'on réduirait ce volumineux ouvrage à quelques pages en se servant de l'analyse algébrique! Viviani meurt, comblé d'honneurs et de gloire, à Florence le 22 septembre 1703 à l'âge de 82 ans. Depuis 1735 ses restes sont unis à ceux de son maître Galilée dans un tombeau de marbre, dans l'église Santa Croce.

Viviani présente donc en plein XVII^e siècle une figure paradoxale: conservateur et même réactionnaire sur le plan scientifique comme sur le plan social, il a pour maître l'un des grands novateurs de l'époque. Son respect pour l'autorité des Anciens n'a d'égale que sa reconnaissance envers les Puissants. Il a une conception que l'on pourrait qualifier d'"intégriste" par rapport aux mathématiques: il s'agit de retrouver, ou de deviner, dans toute leur pureté, les démonstrations et découvertes de l'Antiquité. Comme on le verra plus loin il ne peut que rejeter violemment les méthodes infinitésimales, voire même algébriques⁽⁸⁾. Il a de plus une vie modèle de scientifique officiel, qui pourrait servir à démontrer que le bonheur vient du respect et de l'admiration que tout homme de science doit porter à ses maîtres, à ses glorieux prédécesseurs et aux Princes qui le gouvernent⁽⁹⁾.

Il reste que, sans le succès de sa "fenêtre", le nom même de Viviani ne serait plus guère prononcé.

L'énoncé du problème par Viviani

Viviani propose le 4 avril 1692 au monde savant le problème qui permettra d'y attacher son nom dans les termes suivants⁽¹⁰⁾:

ENIGME GEOMETRIQUE DE LA MERVEILLEUSE CONSTRUCTION DE LA VOUTE HEMISPHERIQUE QUARRABLE

*proposée par D.FIO LISCI PUSILLO géomètre
le 4 avril 1692, dont on espère la résolution par
les arts secrets des fameux Analystes de l'âge
présent, puisque l'homme versé seulement dans les
travaux de la pure Géométrie est incapable,
semble-t-il, d'accéder à de tels mystères.*

*Parmi les vénérables monuments de la savante
Grèce antique, se dresse encore, destiné à durer
éternellement, un Temple très auguste à plan
circulaire, dédié à la FECONDE GEOMETRIE, qui est*

recouvert d'une coupole parfaitement hémisphérique à l'intérieur: mais dans cette coupole quatre fenêtres d'aires égales (disposées autour et sur la base de l'hémisphère même) sont construites de telle configuration, de telle grandeur, avec une telle industrie et une telle intelligence que, celles-ci ôtées, la surface courbe restant de la coupole, ornée d'un travail précieux, peut être quarrée géométriquement.

On demande simplement quelle est cette partie quarrable de la surface hémisphérique tendue comme une voile marine gonflée, par quelle méthode ou par quel art fut-elle obtenue par l'Architecte Géomètre, et à quelle surface plane quarrable enfin elle est égale?

Remarquons d'abord que Viviani propose son énigme sous un pseudonyme: D.Pio Lisci Pusillo geometra, qui est un anagramme transparent de Postremo Galilaei discipulo, encore une marque de la piété filiale dont Viviani entoure le souvenir de son maître. Avant même d'énoncer son problème, Viviani attaque ironiquement les analystes contemporains, en paraissant assuré de leur capacité à résoudre l'énigme, ce que ne semblerait pouvoir faire un géomètre pur.

Le texte de Viviani poursuit ainsi:

La résolution du présent problème (qui permet la construction aussi bien que la quadrature de cette admirable voûte) a été offerte à son Altesse Sérénissime FERDINAND, Prince de Toscane, amateur et patron généreux des sciences et des arts nobles, par l'auteur même de l'énigme. Celui-ci du même coup ne doute point que ce problème ne doive être trouvé aussitôt par chacun des illustres Analystes qui existent aujourd'hui dans le monde des lettres, en partageant en carrés appropriés cette remarquable voûte quarrable découpée sur l'hémisphère, et il attend impatiemment que, les subtiles recherches des mêmes et leurs multiples travaux se ramenant au même et unique géométrique, alors ceux qui osent témérairement lancer des injures à la Géométrie, apprennent à se taire, ou plutôt s'écrient à haute voix:

O unique Science des vérités accessibles, que l'Esprit Divin a répandu dans l'esprit humain, afin que celle-ci méprisant les choses inaccessibles, changeantes et trompeuses, vise seulement les choses éternelles, qui sont toujours et pour tous semblables, et n'ait jamais pour son étude d'objet plus innocent.

Viviani manie donc avec acuité l'ironie: il signale avoir résolu le problème par la seule géométrie, et toute autre solution ne peut que s'y ramener, ce qui permettra de remettre la Géométrie sur le piédestal qu'elle n'aurait pas du quitter. On voit que les polémiques sur les processus infinis dont le XVIII^e siècle sera friand sont déjà bien engagées. Viviani se moque des découpages savants auxquels se livrent les analystes pour leurs quadratures et ne doute pas de l'échec de leurs tentatives, sans recours à la Géométrie.

Le problème est de trouver une courbe sur un quart d'hémisphère (prolongée sur tout l'hémisphère par symétrie) telle que la surface située au-dessus de cette courbe soit exactement quarrable, et donc de donner le carré construit sur la figure qui lui est équivalent. La connaissance approfondie qu'avait Viviani des auteurs grecs, et en particulier de Pappus permet de reconstituer avec vraisemblance la démarche de Viviani⁽¹⁰⁾: ayant rencontré dans Pappus une courbe avec cette propriété de quadrature, il a retourné le problème en demandant de trouver la courbe connaissant sa propriété caractéristique; l'énigme n'en est que plus difficile et, pour Viviani, impossible à résoudre sans Géométrie; assuré du succès de la Géométrie sur l'Analyse il pense ainsi pouvoir ridiculiser les partisans de cette dernière. Son immense vénération pour la science antique ne peut lui laisser penser qu'on pouvait y arriver par d'autres moyens, ni que cela conduirait à d'autres solutions.

Le problème a un succès immédiat: Leibniz, qui le résout le jour même où on lui soumet, publie sa solution dans les *Acta eruditorum* de juin 1692, Jean Bernoulli donne cinq constructions dans les *Acta eruditorum* d'août 1692. Roberval aurait rencontré la courbe avant que Viviani ne pose son énigme (dans Pappus?)⁽¹¹⁾. On trouve aussi des solutions dans les oeuvres de Huygens, dont l'une est due au Marquis de l'Hôpital. En Angleterre, Wallis et Gregory ont aussi fourni des réponses.

Viviani lui-même publie sa solution en 1692 avec d'autres propriétés géométriques, *Formazione e misura di tutti i cieli con la struttura e quadratura esatta dell'intero e delle parti d'un nuovo cielo ammirabile, ed uno degli antichi delle volte regolari degli architetti*. Mais la construction y est donnée sans démonstration. Celle-ci apparaîtra en 1699 dans l'ouvrage du Père Grandi, *Geometrica divinatio Vivianeorum problematum*⁽¹²⁾.

Nous allons essayer de décrire successivement le texte de Pappus source du problème, la modification introduite par Viviani et enfin la réponse de Leibniz, tant sur le plan polémique que mathématique⁽¹³⁾.

Le texte de Pappus

On trouve dans la *Collection mathématique* de Pappus⁽¹⁴⁾ une propriété si proche de la fenêtre de Viviani, qu'elle n'a pu qu'inspirer un lecteur aussi assidu des Anciens. Il s'agit de la proposition 30 du chapitre XXXV du livre IV. Toute la seconde partie de ce livre IV est entièrement consacrée aux courbes transcendantes: hélice plane ou spirale, conchoïde, quadratrice de Dinostrate, hélice sphérique, courbe dite "paradoxe"⁽¹⁵⁾... avec des considérations sur la distinction à faire entre les problèmes

suivant le type de courbe employée. C'est l'hélice sphérique qui nous intéresse.

Pappus n'est sans doute pas lui-même l'inventeur de cette courbe et ses propriétés, puisqu'on trouve des allusions à des hélices sphériques dans les fragments, conservés par Proclus, du traité *Des Mathématiques* de Geminus de Rhodes (I^{er} siècle avant J.C.). Mais la démonstration qui suit semble être une création de Pappus⁽¹⁶⁾.

Voici comment Pappus définit l'hélice sphérique:

De même que l'on conçoit une hélice naissant dans un plan quand un point se meut sur une droite qui décrit un cercle, et naissant sur des solides quand un point se meut sur un côté qui décrit quelque surface, on conçoit conséquemment qu'une hélice soit tracée aussi sur une sphère.

Pappus décrit l'hélice hémisphérique en composant le mouvement d'un point sur un quart de cercle à partir du pôle, tandis que ce quart de grand cercle fait une révolution entière autour de l'axe de l'hémisphère (voir figure 1).★

Pappus affirme que la surface comprise entre l'équateur, l'hélice et le quart de cercle initial est égale au carré construit sur le diamètre de l'hémisphère.

La démonstration, très ramassée et allusive, est fondée sur la méthode d'exhaustion d'Archimède. Pappus encadre la surface étudiée par des surfaces circonscrites et inscrites qui ont un rapport avec la surface de l'hémisphère égal au rapport de surfaces circonscrites et inscrites à un segment circulaire plan avec une portion connue de cercle. Par exhaustion, on peut ainsi comparer le rapport entre la surface étudiée et celle de l'hémisphère et le rapport entre deux surfaces circulaires planes.

Outre cette méthode d'exhaustion, Pappus utilise des théorèmes classiques d'Archimède, du *Traité de la sphère et du cylindre* et *De la méthode relative aux théorèmes mécaniques*. Ces théorèmes rapportent des surfaces sphériques à des surfaces planes, Pappus utilise donc une figure plane annexe, où il recompose les deux mouvements décrits ci-dessus.

En dehors la définition même de la courbe, par composition de deux mouvements, ce qui pose le problème de la construction effective et de la nature des outils géométriques employés, la démonstration est donc parfaitement rigoureuse au sens euclidien ou archimédien du terme. La méthode d'exhaustion permet la démonstration en encadrant la surface étudiée entre des surfaces qui ont des rapports simples avec des surfaces planes. Il reste que ce type de méthode fournit un exposé synthétique, nécessitant toutefois un certain doigté, qui rend le résultat spectaculaire, mais sans indice sur l'analyse utilisée pour inventer le résultat. On peut penser à d'autres quadratures réalisées bien plus tôt, comme les lunules d'Hippocrate. Si la méthode paraît quand même plus générale il reste que c'est un résultat isolé et particulier. L'hélice sphérique de Pappus est le seul exemple disponible jusqu'à la fin du XVII^e siècle de quadrature exacte d'une surface de l'espace.

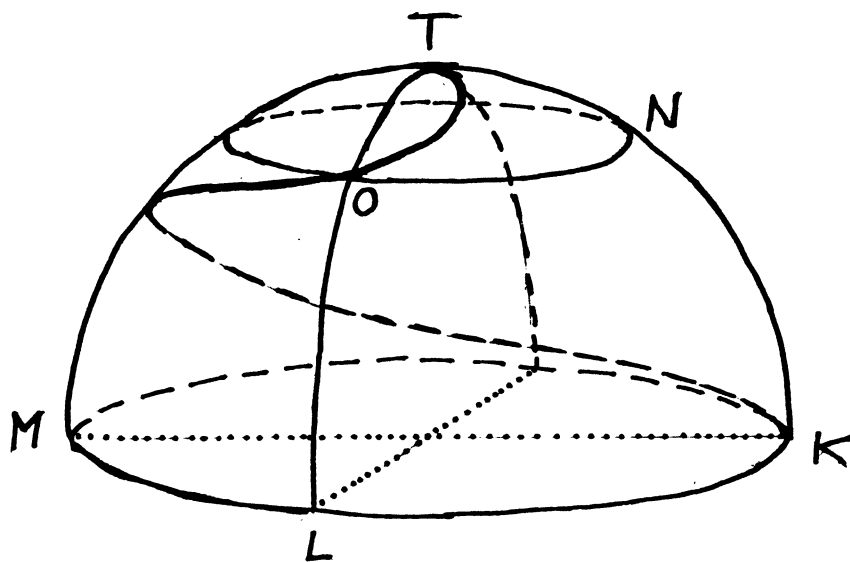


Figure 1

L'apport de Viviani

On a dit plus haut que Viviani donne une construction peu de temps après l'énoncé de son problème⁽¹⁷⁾. On peut penser que le travail de Viviani a consisté à apporter deux modifications importantes à l'énoncé de Pappus, dont il aurait eu connaissance.

Viviani aurait ainsi construit sa courbe dans un quart d'hémisphère. En reprenant les notations de Pappus (voir fig.2)★ le point mobile se déplace toujours sur un quart de grand cercle TNK, à partir de T, ce quart de cercle tourne autour de l'axe sur un quart d'hémisphère de K vers P. Pour tout point O de la courbe on a l'arc TO égal à l'arc KL (pour cette partie de la courbe la fenêtre est donc l'ensemble des points de la sphère ayant mêmes latitude et longitude). Une démonstration calquée sur celle de Pappus permet de conclure que l'aire comprise entre la courbe et l'équateur est égale à celle du carré construit sur le rayon de la sphère.

Le principal apport de Viviani consiste à donner une construction et une définition non cinématique de la courbe. Il suffit de remarquer que la projection O' de O sur le plan de l'équateur appartient au demi-cercle de diamètre PQ. En effet l'égalité des arcs TO et KL conduit à celle de QO' et de QL' (où L' est la projection de L sur PQ). Les deux triangles PO'Q et QLL' sont donc égaux et rectangles tous deux. On peut ainsi conclure que O appartient au demi-cylindre vertical de diamètre PQ.

Viviani n'aurait plus eu qu'à conclure en utilisant les symétries pour améliorer l'esthétique de la figure et rendre vraisemblable l'idée de fenêtres. La courbe est ainsi obtenue comme intersection de l'hémisphère avec deux demi-cylindres horizontaux dont le diamètre est le rayon de la sphère, et qui sont tangents suivant un diamètre (voir fig.3)★. L'aire située au-dessus des quatre fenêtres ainsi découpées est le quadruple de l'aire trouvée plus haut, soit l'aire du carré construit sur le diamètre de la sphère.

L'essentiel du travail de Viviani aurait donc été une mise en forme du résultat de Pappus. Mais cette mise en scène est importante d'une part pour l'aspect esthétique et spectaculaire de la propriété, d'autre part parce que Viviani aurait réalisé ainsi l'idéal géométrique grec: la courbe n'est plus définie par la composition de mouvements mais comme intersection d'objets géométriques simples (sphère, cylindre). La courbe et sa propriété démontrée géométriquement sont ainsi dignes d'être reçues dans le cadre rigoureux de la mathématique euclidienne. On comprend alors l'enthousiasme de Viviani et son ode à la gloire de la Géométrie.

★ Page 211.

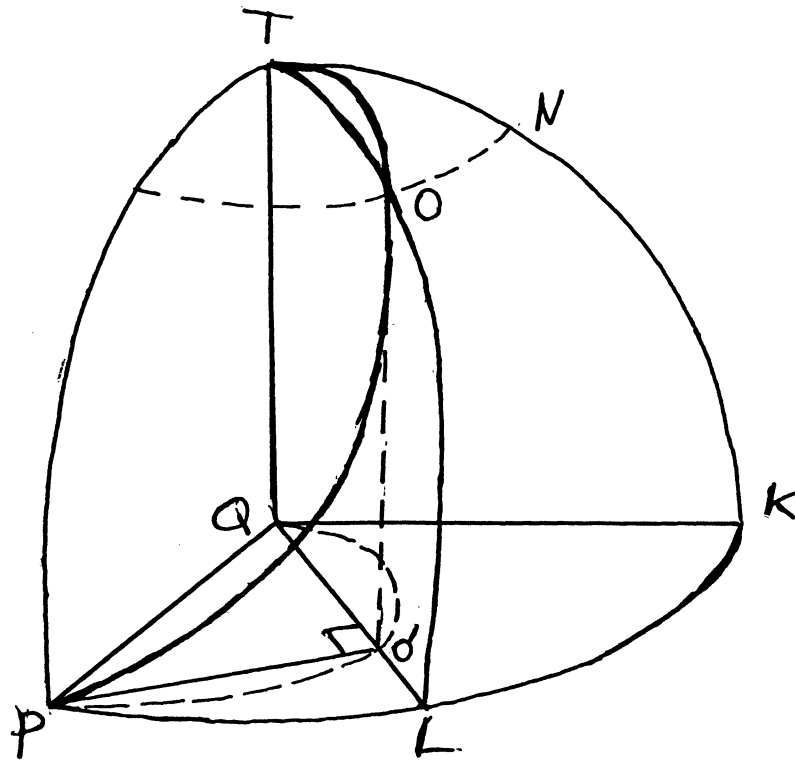


Figure 2

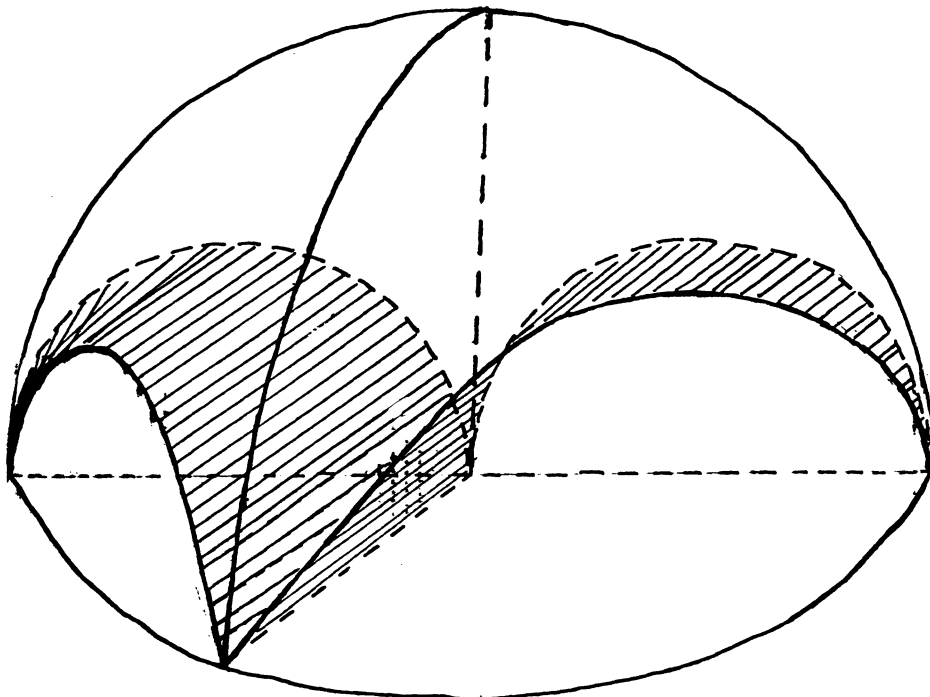


Figure 3

Le cadre du travail de Leibniz

On sait que Leibniz, s'il a lu Cavalieri assez jeune, ne devient vraiment mathématicien qu'après ses voyages à Paris et Londres entre 1672 et 1676, et surtout après sa rencontre avec Huygens qui lui fait lire Pascal, Saint-Vincent, Descartes et Wallis. C'est précisément à partir d'une démonstration de Dettonville (alias Pascal) qu'il a en 1676 l'idée fondamentale du calcul infinitésimal, le "triangle caractéristique", qu'il applique à un certain nombre de problèmes comme celui posé par Florimond de Beaune, dit problème inverse des tangentes (qui avait causé bien des soucis à Descartes). En 1684 et 1686, après son installation à Hanovre, il publie les deux courts mémoires fondateurs dans les *Acta eruditorum* de Leipzig. Il s'agit d'articles assez courts et peu explicites sur la recherche des tangentes à une courbe et les quadratures, en montrant pour la première fois l'aspect réciproque de ces deux questions⁽¹⁸⁾.

En 1692 Leibniz a donc besoin de montrer que ses méthodes sont bien plus efficaces que celles des Anciens, et surtout qu'elles permettent d'aller beaucoup plus loin, en ne donnant pas seulement des solutions mais une véritable méthode de recherche: une "analyse". De plus le monde savant n'est pas encore convaincu de l'intérêt ni de la validité de ses théories. Huygens et Malebranche, par exemple, le pressent de donner plus de détails et d'applications. Vu l'ampleur des préoccupations de Leibniz, il aura bien besoin de disciples comme les frères Bernoulli ou le Marquis de l'Hôpital pour vulgariser et développer ses théories. Son traité *De scientia infiniti* restera à l'état de projet.

Le problème de Viviani tombe donc au moment le plus opportun. Son aspect provoquant et spectaculaire, le fait qu'il soit adressé au Grand-Duc de Toscane, protecteur des savants, ne peuvent qu'inciter Leibniz à y faire la démonstration de la puissance de ses théories.

On trouve dans les *Mathematische Schriften* (V pp.270-278) deux textes en latin sur le problème de Viviani. La première partie est une adresse au Grand Duc de Toscane. Le second texte comporte l'énoncé de l'énigme par Viviani, que nous avons déjà commenté, et le court traité de Leibniz sur la question⁽¹⁹⁾.

La lettre au Grand Duc

Nous donnons en annexe la traduction du texte intégral de cette lettre, traduction qui est, à notre connaissance, inédite. Nous en citons ci-dessous de larges extraits. Le premier paragraphe comporte les formules courtoises de rigueur:

A SON ALTESSE SERENISSIME PRINCE DE TOSCANE

L'occasion que j'ai si longtemps désirée de vous témoigner mon dévouement, c'est par votre grâce, Monseigneur, que je l'ai aujourd'hui enfin trouvée. Car depuis le jour où il m'a été donné de saluer face à face l'éminent génie, la généreuse bonté, la divine intelligence (...) depuis ce jour, donc, mon âme brûlait de proclamer son admiration.

(...) Jusqu'au jour où une question de géométrie qu'on m'a portée sur votre ordre, comme on voit, me donna le droit d'exprimer mes sentiments par l'obligation même où j'étais de parler.

Leibniz poursuit en signalant l'intérêt du problème, en ce qu'il lui permet de donner un exemple d'application de ses méthodes infinitésimales pour résoudre facilement des problèmes trop compliqués pour les géomètres classiques.

Le problème que vous m'avez soumis est très beau et très avantageux pour l'accroissement de la science; car sa résolution m'a donné l'occasion de réduire d'une infinité de manières les portions de surfaces sphériques non seulement à des surfaces planes, mais même à des carrés, ce que sans doute personne n'avait trouvé avant qu'apparaisse la question qui se pose maintenant au public sous vos auspices.

Leibniz, qui semble ignorer le travail de Pappus, répond à l'interpellation polémique de Viviani de façon beaucoup plus feutrée. Il souligne les défauts et insuffisances des quadratures d'Hippocrate, une sorte de diversion: la critique du mathématicien grec ne peut que toucher Viviani autant qu'une réponse directe.

Hippocrate de Chio a effectué la quadrature de sa lunule, déjà connue d'Aristote; mais elle est plane et n'a de courbe que son périmètre. Les lunules sphériques (qu'on peut aussi appelées "voiles") ne peuvent être projetées à la perpendiculaire, et elles sont pourtant maintenant converties en figures rectilignes. Et la recherche d'Hippocrate n'était pas difficile; la nôtre est beaucoup plus compliquée, surtout pour qui ignore les nouvelles méthodes que nous utilisons.

(...) Pour nous, le sujet nous a si bien réussi qu'à partir d'une surface sphérique donnée, nous pouvons en détacher des arches de grandeur donnée (en dessous pourtant d'une certaine grandeur), ce qui est construire le problème posé d'une infinité de manières.

Pour l'auteur de l'énigme, Leibniz n'a que des mots d'éloge, pour avoir posé et résolu un tel problème: encore que Leibniz lui-même, l'avait déjà rencontré et l'aurait résolu s'il n'avait pas tant d'occupations.

Si nous avons quelque'avantage, c'est à vous, Altesse Sérénissime, que nous le devons en premier, je pense. Car l'auteur de la question semble avoir tiré son audace de votre inclination aux sciences. (...) Je reconnais que l'on doit remercier en second lieu l'auteur même de la question, me contentant moi-même de la troisième place: car quand il a dénoué le noeud, comme il le proclame dans l'énoncé, ce qui de toute façon n'est pas le fait d'un médiocre géomètre, quoi qu'il dise par modestie, il ne réclame pas seulement la primeur à juste titre, mais encore, si cachée que reste la solution, il fait en sorte que les autres comprennent, et dit ce qu'on peut faire, ce qui aide beaucoup pour la découverte, bien que je me souvienne avoir moi aussi noté depuis longtemps un moyen d'arriver à cela par l'Analyse.

Leibniz pose ensuite le cadre dans lequel doit travailler la nouvelle Analyse: dépasser la Géométrie en la réduisant à un cas particulier.

En ces matières (pour me borner maintenant à la Géométrie) il n'est pas de peu d'importance (ce que j'ai depuis longtemps établi et fort bien, désormais, mis en lumière par les règles et exemples que j'ai donnés) d'étendre par une nouvelle manière de calculer l'Analyse à des objets plus hauts et qui transcendent l'Algèbre, auxquels jusqu'ici s'est arrêtée la Géométrie, même après la publication des méthodes de Descartes. (...) Je souhaite - et ce souhait, si d'autres y travaillent, n'est pas irréalisable - voir la Géométrie réduite à l'Analyse absolue (si nous visons au plus haut), de sorte que le genre humain, délivré de cette difficulté, puisse appliquer désormais, pour son plus grand plaisir et son plus grand profit, son étude à la nature même et aux éléments concrets et puisse ainsi y reconnaître l'Etude Divine.

L'envolée se poursuit avec un bel optimisme sur les bienfaits de tous ordres qui retomberont sur l'humanité instruite de la nouvelle Analyse.

Si l'esprit humain, armé de la véritable méthode, se tourne sérieusement de ce côté, je ne doute point qu'il ne produira un jour de grandes merveilles pour vaincre les maladies, pour accroître les commodités de l'existence, pour connaître les miracles que Dieu fait dans la nature. (...) Il semble, à présent, que s'ouvre peu à peu un art d'inventer plus grand, que nos

prédécesseurs ne soupçonnaient même pas, et qui servira autant les esprits que la puissance des yeux se trouve aidée par vos célèbres Lentilles et Lunettes.

Cet optimisme est tempéré par la faute des contemporains auxquels Leibniz reproche leur aveuglement, leur inconstance, et finalement le peu de reconnaissance accordé à ses propres travaux. On voit déjà poindre ici l'amertume de la fin de la vie de Leibniz. Le texte se termine, sans surprise, par un appel renouvelé à la faveur du Prince.

Je crains que nous ne préparions ces grandes choses pour la postérité plutôt que de les goûter nous-mêmes. Mais je crois que c'est la faute des hommes actuels, qui traitent si négligemment les choses nécessaires et si soigneusement les choses vaines voire dangereuses. Certes quand je regarde ce qui déjà aujourd'hui, à notre époque surtout, est au pouvoir des mortels pour accroître leur bonheur et pour écarter tant de maux, j'ai peine à pardonner au siècle, et je déplore son volontaire aveuglement comme le châtiment extrême du ciel en courroux. (...) Remédier à ce mal commun, c'est d'abord la tâche des Princes, mais des grands Princes, semblable à vous et comme le Monde devrait en avoir beaucoup!

Le traité mathématique de Leibniz

Le traité mathématique lui-même, qui suit l'énoncé de l'énigme, comporte 9 propositions. Le texte est accompagné de 3 figures (voir fig.4★ peu lisibles (qu'on pense par exemple que sur la figure 130 les lignes (HFA) et (QB) sont des directrices du cylindre vertical construit sur le diamètre de la sphère!).

Leibniz explique d'abord comment le problème lui a été posé (par l'intermédiaire de l'Abbé de Monte Acuto sur l'ordre du Prince de Toscane), qu'il l'a résolu le jour même et que sa solution mérite publication car mettant en oeuvre des procédés infinitésimaux permettant d'accéder à des résultats bien supérieurs à ceux d'Archimède ou de ses successeurs⁽²⁰⁾. Il s'agit de quelque chose de plus grand puisqu'il faut évaluer des surfaces sphériques contenues entre des lignes plus générales que des cercles.

Leibniz utilise d'abord une propriété différentielle du cercle (établie dans ses articles précédents des *Acta eruditorum*). Il applique le fameux "triangle caractéristique" au cercle (voir fig.5)★. Pour un point L du quart de cercle HP de centre K et de rayon r, dont la projection sur PK est S, Leibniz note, de façon tout à fait traditionnelle, $y=SL$ le "sinus rectus" de l'arc $PL=a$ et $x=PS$ son "sinus versus". Pour une petite variation de l'arc, soit $da=LM$, on a une variation $dx=ST$ du sinus versus. Soit Z la projection de L sur MT. Les triangles LMZ et LSK sont semblables (leurs côtés sont perpendiculaires), d'où $LM/LZ=LK/LS$ ou encore $da/dx=r/y$ et donc $da=(r/y)dx$. Ceci revient à montrer que la dérivée de la fonction $1-\cos$ est $\sin$.

Leibniz commence le travail sur la sphère en évaluant l'aire d'une surface élémentaire, comprise entre deux parallèles et deux méridiens.

★ Voir page 217.

Un point L de la sphère (voir fig.6)★est repéré, sur le grand cercle (PLH) passant par L et le pôle, par $a=\text{arc}(PL)$ (c'est la latitude) et par la position de ce grand cercle sur l'équateur soit $v=\text{arc}(QH)$ (longitude). D'après la propriété précédente on a $da=r(dx/y)$, d'autre part, pour une petite variation de la longitude $dv=GH$, on a $\text{arc}(NM)/\text{arc}(GH) = LS/HK$, soit $\text{arc}(NM)=(ydv)/r$. la surface élémentaire (LNM) est égale à $\text{arc}(LM).\text{arc}(NM)$, soit $dv.dx$. Conclusion:

La surface élémentaire est égale au produit de l'élément d'équateur compris entre les deux méridiens et de l'élément d'axe entre les parallèles.

L'étape suivante consiste au calcul du triangle (ou triligne) élémentaire entre deux méridiens et un parallèle (voir fig.7)★ L'aire de (PMN) est la somme des surfaces du type (LMN), soit avec dv constante,

$$\int dx dv$$

ce qui donne $x dv$. Cette aire est donc égale au rectangle construit sur le sinus versus PT du méridien et l'élément d'équateur GH entre les méridiens, soit encore la surface cylindrique (GHAD), portée par le cylindre de base l'équateur, avec $HA=GD=PT=x$.

On passe ensuite au calcul d'une surface comprise entre deux méridiens et une ligne quelconque (RXM sur la figure 8)★ On fait la somme des trilignes élémentaires précédents, donc la somme des surfaces cylindriques (GHAD) correspondantes. On obtient ainsi une surface cylindrique HQBA (ou "sabot") qui est construit en reportant les sinus versus PT, PS, PV sur le cylindre, respectivement en HA, GD, QB.

La première partie du travail consiste donc à transformer une aire sphérique quelconque en une aire cylindrique. Leibniz propose ensuite une propriété des surfaces cylindriques qui va lui permettre de conclure. La surface obtenue (voir fig.9)★ en reportant des longueurs BC égales aux sinus rectus correspondants, soit $BC=AB$, est quarrable. Par exemple l'aire de (BB'C'C) est égale à $r.AA'$, c'est à dire au produit du rayon par la portion d'axe entre les sinus rectus extrêmes. En effet si on pose $AA_1=dx$ et $AB=y$, on a $BB_1=da=rdx/y$, donc l'aire de $(BB_1CC_1)=da.BC=da.AB=rdx$. En sommant, il vient

$$\text{aire } (BB'C'C) = \int r dx = r AA'.$$

C'est donc en fait la quadrature de la sinusoïde. Leibniz signale qu'il n'y a pas lieu de s'attarder à ce genre de choses, évidentes par son calcul, mais très compliquées et nécessitant des outils comme la cycloïde pour les géomètres classiques.

En traçant sur la sphère une courbe (voir fig.10)★ telle que le sinus rectus de la longitude (soit FS) soit égal au sinus versus de la latitude (soit PB) on a d'après les propriétés précédentes l'aire de la voile ou lunule (PEALP) qui est égale à l'aire cylindrique (ACMQ) égale enfin à $r.KQ$ soit r^2 .

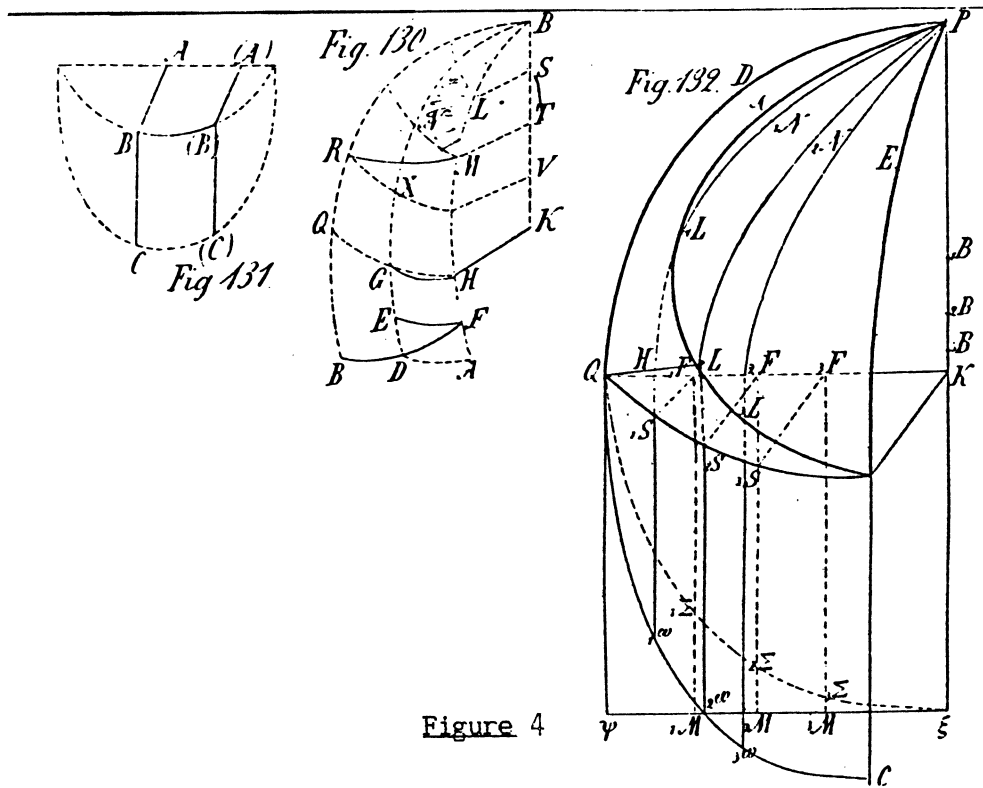


Figure 4

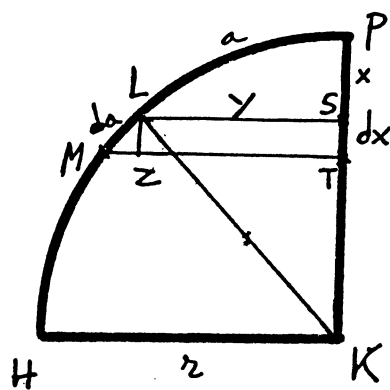


Figure 5

Leibniz souligne ensuite que l'on peut imposer, à la place de $FS=PB$, un rapport constant, qu'on retrouve alors entre l'aire de la voile et r^2 .

Revenant au problème posé par Viviani, Leibniz remarque bien qu'il a quarré une surface sphérique et qu'en répétant l'opération dans les quatre quarts d'hémisphère on obtient quatre voiles d'aire totale $4r^2$. Mais il est clair que cela ne peut passer pour des fenêtres. Il reste donc à mettre en scène le résultat.

De plus, le problème n'est pas entièrement résolu puisque c'est l'aire des fenêtres qui est carrable, et non l'aire de la voûte.

Leibniz propose d'utiliser des symétries pour retourner la figure dans divers sens. Peu convaincu du résultat architectural, il finit par donner sa solution: on découpe chaque voile en deux par le plan médiateur de (QSA) qui passe donc par le méridien PLS . Puis on trace la courbe (QL) symétrique de (AL) par rapport au plan (PLS) . La surface au dessus de ces arcs est quarrable suivant la même méthode. La surface totale de la voûte située au dessus de (QLA) et des fenêtres des autres quarts d'hémisphère est égale au rectangle construit sur le diamètre de la sphère et la diagonale du carré construit sur ce diamètre. Le problème est donc résolu dans sa généralité, comme dans son application "pratique". Leibniz conclut en remarquant qu'il serait possible de faire encore tout cela d'une infinité de manières. Une scolie pour finir:

Il ne serait ni sans élégance ni inutile de reproduire la forme des voûtes par des délinéations, mais la brièveté du temps a fait que nous soyons maintenant satisfait d'écrire pour des yeux Géométriques.

Remarquons tout de suite que la courbe trouvée par Leibniz n'est pas la fenêtre de Viviani. Elle peut aussi être décrite comme intersection de la sphère avec des cylindres, mais à base non circulaire (cardioïde ou conchoïde). La différence vient de la définition du sinus versus à partir de l'extrémité du diamètre (au lieu de le définir comme notre cosinus à partir du centre). On peut donc ainsi trouver et démontrer la solution de Viviani à la manière de Leibniz: il suffit de prendre sur l'hémisphère la courbe telle que $FS=r-PB=KB$. La courbe tracée sur le cylindre est alors la symétrique de la sinusoïde précédente par rapport à la droite, $x=1/r$, et c'est alors l'aire au-dessus de la courbe (la voûte) qui est quarrable. Son aire est le quadruple de l'aire trouvée par Leibniz en dessous, soit $4r^2$, ou encore le carré construit sur le diamètre.

Remarquons aussi que les outils employés par Leibniz sont le calcul d'une surface sphérique par sommation (infinie) de surfaces infinitésimales, puis le passage à des surfaces cylindriques ou planes, et enfin le calcul de l'aire comprise sous une courbe plane (qui est presque définie comme une représentation graphique de fonction), ici une sinusoïde. La différence essentielle avec la méthode de Pappus-Viviani tient à la finitude des sommes de surfaces utilisées et au caractère infinitésimal des surfaces initiales. En revanche les deux méthodes utilisent une surface plane annexe pour mener à bien la quadrature.

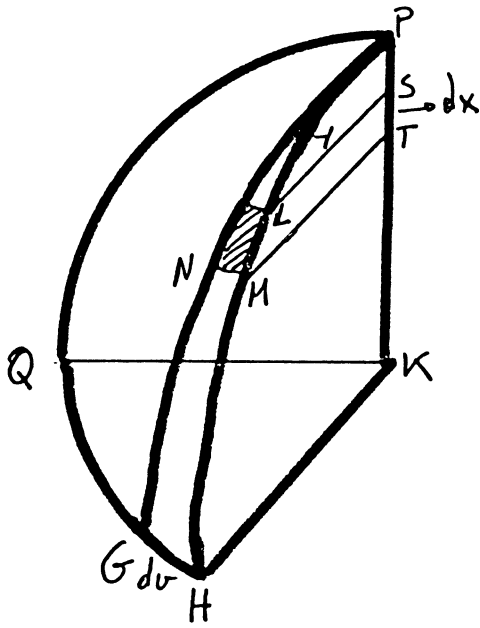


Figure 6

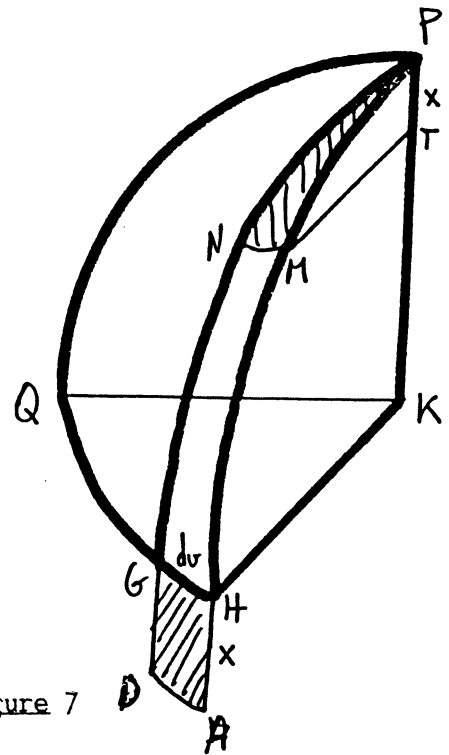


Figure 7

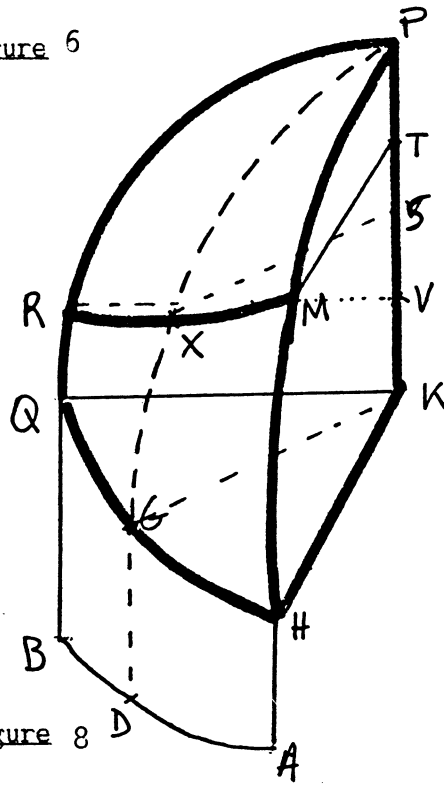


Figure 8

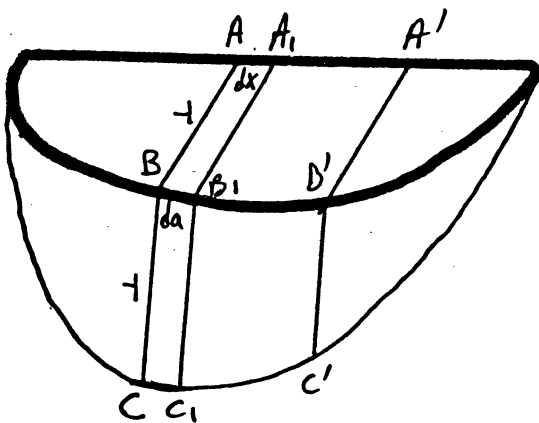


Figure 9

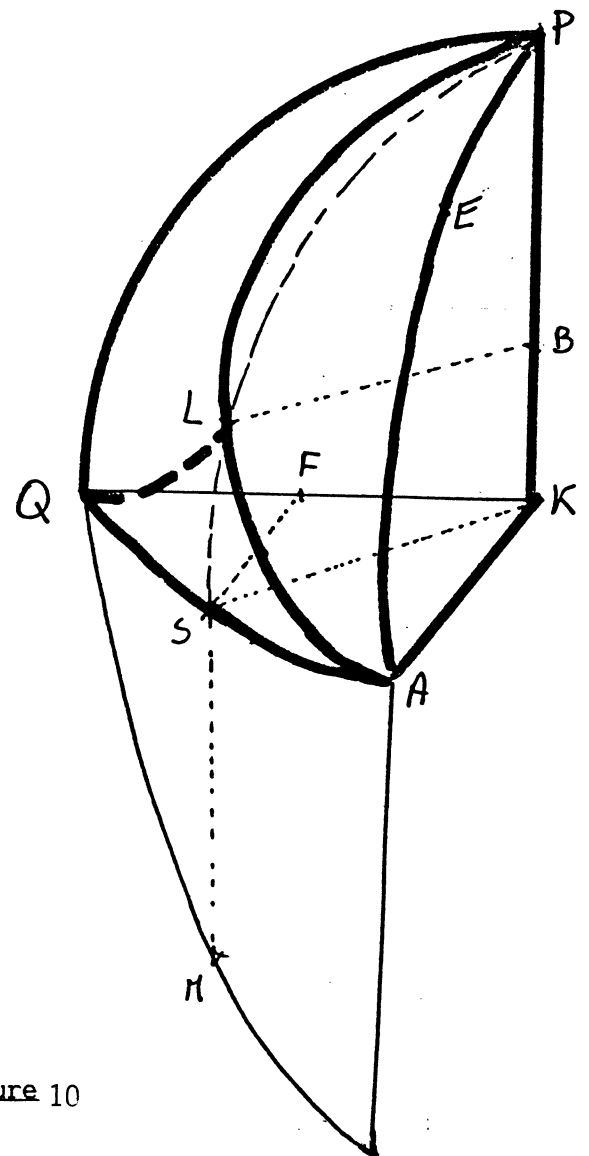


Figure 10

Notons enfin le caractère profondément géométrique de la définition et de certaines démonstrations de Leibniz. La nouvelle Analyse n'est pas encore un calcul et Leibniz, malgré son désir de supplanter définitivement la Géométrie, a encore besoin d'elle pour les démonstrations et leur compréhension. La définition de la courbe serait plus "cartésienne" au sens moderne du terme, mais évite la définition cinématique de Pappus. On ne trouve pas trace dans cette étude d'une géométrie projective de type arguésien.

On peut donc s'étonner qu'un lecteur de Leibniz aussi éminent que Michel Serres utilise, à l'appui de sa thèse, l'exemple de la fenêtre de Viviani pour montrer la pluralité des ordres de la pensée de Leibniz:

*Mais surtout, tel résultat - par exemple, la
fenêtre de Viviani - peut être obtenue par un
chemin géométrique, analytique, infinitésimal,
(...),⁽²¹⁾*

Ce texte fait référence à *Mathematische Schriften*, V 270. Serres cite encore⁽²²⁾ la fenêtre de Viviani à propos de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère; si c'est bien la définition vivianienne de la fenêtre, on a vu que ce n'était pas du tout celle de la courbe trouvée par Leibniz.

Toujours dans le même ouvrage à propos des problèmes de projections sur des surfaces planes ou gauches:

*Leibniz a traité mathématiquement de telles
questions à l'occasion du fameux problème de
Viviani sur le dôme de Florence, problème à la
fois architectural et géométrique (Math. V 270-
278). Sa solution représente la synthèse de trois
méthodes: arguésienne (perspective), cartésienne
(géométrie analytique), leibnizienne (calcul
infinitésimal), réunies sur une application
technique.⁽²³⁾*

Rappelons qu'il s'agit bien là d'une référence aux textes étudiés dans cet exposé! L'allusion à un problème technique architectural lié au dôme de Florence laisse rêveur. On pourrait penser à une lecture un peu simpliste de l'énoncé lui-même: faut-il souligner que le temple en question sort de l'imagination de Viviani et qu'il se trouverait en Grèce! Le seul rapprochement que l'on peut trouver entre Viviani et le Dôme est une étude qu'il a réalisée à l'occasion de la réfection de la coupole: elle concerne surtout des applications de la trigonométrie à la résistance des matériaux⁽²⁴⁾.

Le contresens sur la méthode et les ambitions de Leibniz paraît plus grave: dans ces textes - encore ne faut-il pas se contenter d'un "simple coup d'oeil", Serres, op.cit, p.245 - on a pu voir clairement l'assurance qu'a Leibniz d'avoir trouvé La Méthode qui permet de transcender toutes les autres qu'elles soient géométriques ou algébriques. Si tant est qu'ils soient pensés, l'irénisme et la synthèse en mathématiques restent alors à l'état de programme de travail, ou de science fiction.

L'étude précise des textes révèle un affrontement entre deux conceptions des mathématiques: le purisme géométrique de Viviani - qui reste curieusement une spécialité italienne - et l'optimisme analytique de Leibniz. La rupture avec la tradition grecque est sûrement plus facile pour ce dernier, qui n'a pas commencé ses études mathématiques par la lecture attentive des textes fondateurs. Il n'y aurait que Descartes, au XVII^e siècle, pour se penser aussi fortement comme initiateur d'une Mathématique Moderne dans laquelle les générations futures peuvent s'avancer sur les traces du Maître. Bien qu'encore attaché à la géométrie par la forme des problèmes, on a en germe la puissance du Calcul, même si ses fondements ne sont encore guère assurés, mais aussi ses limites. On peut noter qu'en dehors de ces grands novateurs, les mathématiciens du siècle (que ce soit Desargues, Roberval, Fermat, Huygens ou même Newton) sont plus réformistes. Nourris de culture classique, ils ont bien conscience de la nouveauté de leurs démarches, mais la filiation avec la Géométrie grecque est très marquée, voire revendiquée.

Avec Leibniz se termine une époque de la science, ce n'est pas seulement l'Autorité des Anciens qui se fera moins sentir, mais encore la recherche de l'élégance, de la virtuosité, de la mise en scène. C'est la fin de ce qu'on pourrait appeler la période "baroque" en mathématiques.

-

ANNEXE

Lettre de Leibniz au Prince de Toscane précédant le traité mathématique sur la fenêtre de Viviani (*Mathematische Schriften*, V pp.270-272). Traduction de Claude Lang.

A SON ALTESSE SERENISSIME PRINCE DE TOSCANE

L'occasion que j'ai si longtemps désirée de vous témoigner mon dévouement, c'est par votre grâce, Monseigneur, que je l'ai aujourd'hui enfin trouvée. Car depuis le jour où il m'a été donné de saluer face à face l'éminent génie, la généreuse bonté, la divine intelligence, et (pour ne pas diminuer dans mes discours tout ce qui reste hors de portée de mes louanges) la gloire ancestrale de votre illustre famille désormais inscrite au ciel par Galilée, d'avoir bien mérité du genre humain par le progrès des sciences, en quoi vous faites plus que de rivaliser avec votre père et votre grand-père; depuis ce jour, donc, mon âme brûlait de proclamer son admiration. Mais j'ai cru qu'il valait mieux garder un silence respectueux sur ce qu'on ne peut jamais assez louer, et il n'est pas dans mes usages de faire facilement du bruit par mes écrits, jusqu'au jour où une question de géométrie qu'on m'a portée sur votre ordre, comme on voit, me donna le droit d'exprimer mes sentiments par l'obligation même où j'étais de parler.

Le problème que vous m'avez soumis est très beau et très avantageux pour l'accroissement de la science; car sa résolution m'a donné l'occasion de réduire d'une infinité de manières les portions de surfaces sphériques non seulement à des surfaces planes, mais même à des carrés, ce que sans doute personne n'avait trouvé avant qu'apparaisse la question qui se pose maintenant au public sous vos auspices. Hippocrate de Chio a effectué la quadrature de sa lunule, déjà connue d'Aristote; mais elle est plane et n'a de courbe que son périmètre. Les lunules sphériques (qu'on peut aussi appelées "voiles") ne peuvent être projetées à la perpendiculaire, et elles sont pourtant maintenant converties en figures rectilignes. Et la recherche d'Hippocrate n'était pas difficile; la nôtre est beaucoup plus compliquée, surtout pour qui ignore les nouvelles méthodes que nous utilisons. Et il est probable qu'Hippocrate est tombé sur sa découverte sans la chercher - ce qui relève davantage de la "Synthèse". Nous, nous avons rapidement résolu une question posée par autrui, ce qui est le propre, évidemment, de l'"Analyse". Le raisonnement d'Hippocrate se renferme dans des limites étroites; car il est à la mesure d'un cas unique, et encore très simple. Et il ne semble pas qu'il ait trouvé - ce qui est très simple, mais n'a été pourtant trouvé qu'à notre époque - que, deux secteurs ayant une corde commune, on peut quarrer la lunule, pourvu que les angles des secteurs soient en double raison réciproque des rayons. Pour nous, le sujet nous a si bien réussi qu'à partir d'une surface sphérique donnée, nous pouvons en détacher des arches de grandeur donnée (en dessous pourtant d'une certaine grandeur), ce qui est construire le problème posé d'une infinité de manières.

Si nous avons quelque'avantage, c'est à vous, Altesse Sérénissime, que nous le devons en premier, je pense. Car l'auteur de la question semble avoir tiré son audace de votre inclination aux sciences. Pour moi, je l'avouerais, si votre autorité ne m'y avait poussé, je n'aurais pas facilement abordé cette recherche, fort distrait que je suis par tant de travaux qu'on exige partout de moi, et habitué à estimer en Géométrie moins les problèmes particuliers, sauf s'ils se recommandent par leur singulière

utilité, que les méthodes générales. Je reconnais que l'on doit remercier en second lieu l'auteur même de la question, me contentant moi-même de la troisième place: car quand il a dénoué le noeud, comme il le proclame dans l'énoncé, ce qui de toute façon n'est pas le fait d'un médiocre géomètre, quoi qu'il dise par modestie, il ne réclame pas seulement la primeur à juste titre, mais encore, si cachée que reste la solution, il fait en sorte que les autres comprennent, et dit ce qu'on peut faire, ce qui aide beaucoup pour la découverte, bien que je me souvienne avoir moi aussi noté depuis longtemps un moyen d'arriver à cela par l'Analyse. Mais d'y parvenir je n'ai eu ni le loisir ni même le désir au milieu de la foule de choses que j'ai depuis longtemps à ma disposition, soit mis en notes, soit marquées en esprit simplement, et qui ne doivent jamais sortir, à moins (dans une telle variété d'objets et en un temps si mesuré) que ne viennent des mains secourables ou qu'une raison particulière à un moment ne tourne mon esprit de ce côté.

En ces matières (pour me borner maintenant à la Géométrie) il n'est pas de peu d'importance (ce que j'ai depuis longtemps établi et fort bien, désormais, mis en lumière par les règles et exemples que j'ai donnés) d'étendre par une nouvelle manière de calculer l'Analyse à des objets plus hauts et qui transcendent l'Algèbre, auxquels jusqu'ici s'est arrêtée la Géométrie, même après la publication des méthodes de Descartes. Et la solution présentée ici pourra s'ajouter à ces exemples. Je souhaite - et ce souhait, si d'autres y travaillent, n'est pas irréalisable - voir la Géométrie réduite à l'Analyse absolue (si nous visons au plus haut), de sorte que le genre humain, délivré de cette difficulté, puisse appliquer désormais, pour son plus grand plaisir et son plus grand profit, son étude à la nature même et aux éléments concrets et puisse ainsi y reconnaître l'Etude Divine. Si l'esprit humain, armé de la véritable méthode, se tourne sérieusement de ce côté, je ne doute point qu'il ne produira un jour de grandes merveilles pour vaincre les maladies, pour accroître les commodités de l'existence, pour connaître les miracles que Dieu fait dans la nature; et en ce domaine nous sommes encouragés par les tentatives mêmes de ce siècle et par celles, illustres, de votre Maison. Il semble, à présent, que s'ouvre peu à peu un art d'inventer plus grand, que nos prédécesseurs ne soupçonnaient même pas, et qui servira autant les esprits que la puissance des yeux se trouve aidée par vos célèbres Lentilles et Lunettes.

Je crains que nous ne préparions ces grandes choses pour la postérité plutôt que de les goûter nous-mêmes. Mais je crois que c'est la faute des hommes actuels, qui traitent si négligemment les choses nécessaires et si soigneusement les choses vaines voire dangereuses. Certes quand je regarde ce qui déjà aujourd'hui, à notre époque surtout, est au pouvoir des mortels pour accroître leur bonheur et pour écarter tant de maux, j'ai peine à pardonner au siècle, et je déplore son volontaire aveuglement comme le châtiment extrême du ciel en courroux. Si nous voulions nous réveiller, nous pourrions nous-mêmes recueillir le fruit de nos travaux et dans le court espace de quelques années devancer plusieurs siècles futurs. Remédier à ce mal commun, c'est d'abord la tâche des Princes, mais des grands Princes, semblable à vous et comme le Monde devrait en avoir beaucoup! Combien j'attends de Vous-même pour le bien général et le profit de l'humanité, je préfère que les autres le comprennent ici par mon silence plutôt que d'en affliger vos oreilles. Et je dois prendre garde que la lettre que je vous adresse ne soit pas plus longue que le traité même que je vous destine, bien que de telles matières ne doivent pas être appréciées à l'étendue des phrases, et qu'il ne soit rien de plus facile que de délayer en un grand volume ce que nous nous contentons d'indiquer en quelques mots.

Salût, *PRINCE SERENISSIME*, avec votre Père et votre illustre frère, prince doté d'un esprit supérieur et, pour le dire d'un mot, semblable au vôtre, et comme vous me l'avez fait dire quelquefois en mon absence, autrefois par le Baron Bodenhuis, remarquable savant en ces matières, et tout récemment encore par votre Magliabecchus connu pour ses relations avec toute l'Europe savante, personnages éminents, mes amis, conservez-moi votre faveur.

De Hanovre, le 28 mai 1692

NOTES

- (1) Michel SERRES, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Presses Universitaires de France 1968.
- (2) Les sources pour la biographie de Viviani sont principalement les *Eloges* de FONTENELLE, l'*Histoire des mathématiques* de MONTUCLA et la *Biographie universelle ancienne et moderne* de MILHAUD.
- (3) Sur le rôle de Chapelain comme conseiller scientifique de Colbert on peut, par exemple, consulter notre article, *La naissance de l'Académie Royale des Sciences*, Actes du Séminaire interdisciplinaire d'histoire des sciences du Lycée Malherbe, n°1, *La science à l'âge baroque*, IREM de Basse-Normandie, 1984.
- (4) On sait que Louis XIV est né le 16 septembre 1638, après 23 ans de mariage stérile de ses parents. Le surnom de Dieudonné souligne cette heureuse mais tardive naissance, on l'oublia pendant la Fronde et Louis XIV lui même le fit encore plus oublier quand il rechercha et obtint celui de Grand.
- (5) Ces écrits ont été depuis fort critiqués, voir Alexandre KOYRE, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, Gallimard, 1973, pp.213, 217 et 297.
- (6) Cet ouvrage est évidemment dédié à Louis XIV. On sait qu'il suffisait de lui dédier un ouvrage pour obtenir une pension du Grand Roi. Tout le monde n'est pas Spinoza qui refusa toujours cet honneur. L'oeuvre de Viviani est donc la suivante:
**De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergaei nunc desideratum*, Florence, 1659. C'est la divination du cinquième livre d'Apollonius.
**Quinto libro degli Elementi d'Euclide, ovvero la scienza universale delle proportioni spiegata colla dottrina di Galileo*, suivi de *Diporto geometrico*, Florence, 1674. Commentaires de la théorie des proportions d'Euclide à l'aide de la doctrine de Galilée suivis des récréations géométriques.
**Enodatio problematum universis geometris propositorum...*, Florence, 1677. Il s'agit de solutions à quelques problèmes posés par Comiers, prévôt de Ternant, dédiées aux mânes de Chapelain.
**Formazione e misura di tutti i cieli con la struttura e quadratura esatta dell'intero e delle parti d'un nuovo cielo ammirabile, ed uno degli antichi delle volte regolari degli architetti*, Florence, 1692. Viviani y présente sa fenêtre.
**De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinte libros injuria temporum amissos Aristaei senioris geometrae*, Florence, 1701. C'est la fameuse divination d'Aristée l'Ancien.
**Euclidis i dodici libri degli elementi piani et solidi, tradotti, spiegati et illustrati*, Florence, 1769. Edition commentée et illustrée des douze livres des Eléments d'Euclide.
On sait de plus que Viviani avait composé un traité dans lequel il appliquait la géométrie à la morale chrétienne. Malheureusement cette *Geometra moralis* n'a pas été retrouvée.
- (7) Il est vrai que ces méthodes ont été souvent inventées de l'aveu même de leurs auteurs pour se dégager de la Géométrie, pour se libérer de la contemplation fastidieuse des figures.
- (8) On peut comparer avec profit le personnage de Viviani avec celui de Roberval, voir par exemple notre article déjà cité, *La naissance de l'Académie Royale des Sciences*, Roberval, issu d'un milieu tout différent, présente dans son oeuvre comme dans ses relations sociales un irrespect et une absence de conformisme qui en ferait un précurseur des Lumières.

- (9) Le texte du problème paraît dans les *Acta Eruditorum Lipsiens*, et est reproduit, en latin, au début de la réponse de Leibniz, *Mathematische Schriften*, V, p.270. Nous utilisons une traduction réalisée pour nous par Claude Lang.
- (10) Clara Silvia ROERO dans son article *I matematici italiani e il celebre "Aenigma" di Vincenzo Viviani del 4 aprile 1692* (Atti del Convegno "La Storia delle Matematiche in Italia", Cagliari, 1982) note deux faits qui semblent contredire cette reconstitution: -Viviani déclare lui-même être le premier à avoir trouvé une surface sphérique quarrable, -Viviani n'a pas donné de démonstration pour sa construction pratique. On peut remarquer que la revendication de la primauté de la découverte est à replacer dans le cadre de sa polémique avec Leibniz à propos de Galilée et plus généralement des méthodes géométriques et infinitésimales. On peut donc envisager une certaine mauvaise foi chez l'auteur de l'énigme. D'autre part, on voit mal comment Viviani, si amateur des textes anciens, et après une aussi longue recherche, aurait pu inventer le problème et surtout en donner une solution exacte, sans avoir rencontré le travail de Pappus, à défaut d'une transposition de la démonstration. Il reste qu'en l'absence d'un texte précis de Viviani, on ne peut conclure complètement sur ce point.
- (11) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, tome V, p.293.
- (12) On trouvera une étude très complète de toutes ces solutions dans la communication de C.S.ROERO (Actes de l'Université d'été interdisciplinaire d'histoire des mathématiques, Université Paul Sabatier, Toulouse, 6-12 juillet 1986). Dans sa solution, Viviani donne deux constructions mécaniques de modèles en bois de sa voûte. Le Père Grandi fait allusion au texte de Pappus, mais donne une démonstration qui utilise la méthode des indivisibles.
- (13) Pour un point de vue plus moderne sur cette courbe, ainsi que d'autres de ses propriétés, on peut consulter, outre les ouvrages classiques, BROCARD et LEMOYNE, *Courbes spéciales, planes et gauches*, SERRET, *Des méthodes en géométrie*, et *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*.
- (14) PAPPUS d'Alexandrie a vécu entre la fin du III^e siècle et la première moitié du IV^e siècle de notre ère. Son oeuvre capitale nous est parvenue sous le titre de *Collection mathématique*. C'est un recueil de propositions reprises de mathématiciens antérieurs, commentées, critiquées, reformulées ou redémontrées. Nous utilisons la traduction de Paul VER ECKE, Albert Blanchard.
- (15) Paul Tannery a émis l'hypothèse que cette "ligne paradoxale" ou "paradoxos" devait être identique ou analogue à la fenêtre de Viviani.
- (16) Nous avons proposé une étude beaucoup plus détaillée du texte de Pappus à l'Université d'été interdisciplinaire d'histoire des mathématiques, Université Paul Sabatier, Toulouse, 6-12 juillet 1986.
- (17) Comme nous l'avons signalé (voir note (10)) on ne dispose pas d'indices sur la méthode ou une éventuelle démonstration de Viviani. Ce qui suit est donc, de notre part, une "divination" très vraisemblable.
- (18) Leibniz décrit lui-même son invention du calcul infinitésimal dans *Histoire et origine du Calcul Différentiel* traduit par R.SZEFTET-ZYLBERBAUM, Cahiers de Fontenay, n°1, 1975. On peut trouver un commentaire de ce texte par G.WALLET dans *La rigueur et le calcul*, Groupe inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, CEDIC, 1982.
- (19) Ce texte mathématique a été traduit et édité par Jean Peyroux (*Oeuvre concernant le calcul infinitésimal*, A.Blanchard). Malheureusement la traduction est d'assez mauvaise qualité, et on peut regretter que ce texte et les articles fondamentaux sur le calcul infinitésimal, publiés aussi par Peyroux, n'aient pas encore trouvé l'édition

française qu'ils méritent. Nous pensons par ailleurs que les textes non mathématiques d'accompagnement sont tout aussi dignes d'intérêt. Nous utilisons une traduction réalisée par Claude Lang.

- (20) Ces résultats sont, par exemple, les suivants:
-la surface de la sphère est égale à celle du cercle de diamètre double de celui de la sphère,
-le quadruple de la surface d'un triangle sphérique compris entre trois grands cercles est à la surface de la sphère comme la somme des angles du triangle, diminuée de deux droits, est à deux droits.
Leibniz fait vraisemblablement allusion, en plus d'Archimède, à des travaux comme Albert GIRARD, *Invention nouvelle en algèbre*, 1629 et CAVALIERI, *Directorium universale uranometrium*, 1632.
- (21) SERRES, op.cit, I 13.
- (22) idem p.245.
- (23) ibidem p.168, note (1).
- (24) Paolo GALUZZI, *Le colonne "fesse" degli Uffizi e gli "screpoli" della Cupola*, Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza, 1977, fasc.I, p.71.
Guglielmo RIGHINI, *Considerazioni sui teoremi del Viviani a proposito degli "screpoli" della cupola brunelleschiana*, ibid, 1978, fasc.I, p.105.
Ces deux articles font le point sur la participation de Viviani aux travaux de réfection de la coupole de Brunelleschi du Duomo de Florence entre 1694 et 1697.