COMPOSITIO MATHEMATICA

RIDHA BELGRADE

Sur la conjugaison de Kashiwara pour une classe de connexions méromorphes irrégulières

Compositio Mathematica, tome 104, nº 3 (1996), p. 279-292

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1996__104_3_279_0>

Compositio Mathematica **104:** 279–292, 1996.

Sur la conjugaison de Kashiwara pour une classe de connexions méromorphes irrégulières

RIDHA BELGRADE
Université Henri Poincaré-Nancy, 1 Institut Elie Cartan B.P. 239,
F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy, Cedex

Received 16 May 1994; accepted in final form 17 October 1995

Abstract. Let f be a non constant holomorphic function on a connected complex analytic manifold X. Let $\overline{X}$ the conjugated manifold. For all $(a,k) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}, \mathrm{Re}(a) > 0$, we consider the distribution:

$$u = |f|^a (\log|f|)^k \exp\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\overline{f}}\right).$$

We prove that $\mathcal{D}_X u$ is an irregular meromorphic connection, and that its distributions solutions complex $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X u, \mathcal{D}\mathcal{b}_X)$ is quasi-isomorphic, as a complex of $\mathcal{D}_{\overline{X}}$-modules, to $\mathcal{D}_{\overline{X}} u[0]$.

Mots clefs: $\mathcal{D}$-module, dual, localisé, solutions distributions.

1. Introduction

Ce travail trouve son origine dans la tentative de généraliser les résultats de Kashiwara [K] sur la conjugaison des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers, résultats qui s'appuient sur la classification de ces derniers et sur la correspondance de Riemann-Hilbert.

On prendra une variété analytique complexe connexe X de dimension n, et f une fonction holomorphe non constante sur X. $\overline{X}$ désignera la variété conjuguée de X, et $\overline{f}$ la fonction conjuguée de f. On notera O_X le faisceau structural, ω_X le fibré canonique, θ_X le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels holomorphes, et enfin $\mathcal{D}\mathcal{b}_X$ celui des germes de distributions sur X.

On désignera par $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche.

Rappelons que pour tout $\mathcal{D}_X$-module à gauche $\mathcal{M}$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}\mathcal{b}_X)$ possède une structure naturelle de $\mathcal{D}_{\overline{X}}$-module à gauche. D'où le foncteur de Kashiwara:

$$C_X := \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(.,\mathcal{D}\mathcal{b}_X)\colon \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}}).$$

En l'absence d'une classification complète dans le cadre irrégulier pour le moment, on se propose ici comme objectif de démontrer 'directement' le théorème de conjugaison de Kashiwara pour le $\mathcal{D}_X$-module engendré par la distribution (L^1_{loc}, pour $(a,k) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}, \mathrm{Re}(a) > 0$), $u_f^{a,k} = \frac{1}{k!}|f|^{2a}(\log|f|^2)^k \exp(\frac{1}{f} - \frac{1}{\bar{f}})$:

THÉORÈME. *On a un isomorphisme naturel dans* $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$:

$$C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k}) = \mathcal{D}_{\overline{X}} u_f^{a,k}[0].$$

Des versions faibles de ce théorème ont été traitées dans [B1] et dans [B2]. Le théorème occupera toute la Section 4. Faisons quelques rappels avant de donner les arguments de sa démonstration.

Rappelons que pour tout objet $\mathcal{M}$ de $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$, le dual $\mathcal{M}^*$ est l'objet suivant de $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$: $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X))[n]$. Pour un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$, ce dual est concentré en degré 0 si et seulement si $\mathcal{M}$ est holonome.

Soit $\mathcal{O}_X[*Y]$ le faisceau des germes de fonctions méromorphes à pôles dans $Y = f^{-1}(0)$. Pour tout $\mathcal{D}_X$-module à gauche $\mathcal{M}$, son localisé le long de Y: $\mathcal{M}[*Y] = \mathcal{O}_X[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_X$-module (et même de $\mathcal{D}_X[*Y]$-module) à gauche.

Le théorème repose d'abord sur deux propriétés de $\mathcal{M}_f^{a,k} := \mathcal{D}_X u_f^{a,k}$, démontrées dans les Sections 2 et 3, à savoir: ce $\mathcal{D}_X$-module (holonome) et son dual sont égaux à leurs localisés respectifs le long de Y. Cela montre que pour le calcul de $C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k})$, on peut se permettre les dénominateurs (en f) au niveau des coefficients ($\mathcal{D}\mathcal{b}_X$) ainsi que des opérateurs. Ceci a l'avantage de rendre explicitable $C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k})$. En effet, l'annulateur méromorphe de $u_f^{a,k}$ est calculable, et est de plus adéquat pour la détermination d'une $\mathcal{D}_X[*Y]$-résolution de $\mathcal{M}_f^{a,k}$. $C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k})$ se trouve alors représenté par un complexe de courants de types $(.,0)$ avec une différentielle holomorphe 'modifiée'. Or, on sait, grâce au théorème de division [Ma], que $\mathcal{D}\mathcal{b}_X[*Y]$ s'identifie aux quotients $\frac{\mathcal{D}\mathcal{b}_X}{\mathcal{H}^0_{[Y]}(\mathcal{D}\mathcal{b}_X)} = \frac{\mathcal{D}\mathcal{b}_X}{\mathcal{H}^0_Y(\mathcal{D}\mathcal{b}_X)}$.

On s'appuie alors sur des arguments de division dans $\mathcal{D}\mathcal{b}_X$ pour se ramener au lemme classique de Dolbeault-Grothendieck [D].

Pour les deux propriétés citées de $\mathcal{M}_f^{a,k}$, on procède en deux temps. Dans la Section 2, on les établit pour le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{L}_f^{a,k}$, quotient de $\mathcal{M}_f^{a,k}$ par sa torsion. Et dans la Section 3, on montre que cette torsion est nulle. Dans la Section 2, comme dans la Section 3, on procède en deux étapes: on établit les résultats dans le cas d'une fonction f monomiale sur $\mathbf{C}^n$ (Prop. 2.1 et 3.2), puis en désingularisant f (Prop. 2.3 et 3.3).

2. Etude du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{L}_f^{a,k}$

Dans toute la suite, on aura à considérer les fonctions holomorphes multiformes sur $X \setminus Y$:

$$e_f^{a,j} = \frac{1}{j!} f^a (\log f)^j \exp(f^{-1}), \quad j = 0, \ldots, k \quad (e_f^{a,-1} = 0).$$

Si l'on désigne par $\mathcal{R}$ le faisceau sur X des germes de fonctions holomorphes multiformes sur $X \setminus Y$, on peut aisément se convaincre que le sous-$\mathcal{O}_X[*Y]$-module de $\mathcal{R}$ engendré par les $e_f^{a,j}$ $(j = 0, \ldots, k)$ est libre. On le notera $\mathcal{E}_f^{a,k}$. La structure de $\mathcal{D}_X$-module sur ce dernier est définie de façon évidente. Pour un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ sur X, on pose:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f^{-l} e_f^{a,j}) = f^{-l-2} \frac{\partial f}{\partial x_i}((af - lf - 1)e_f^{a,j} + f e_f^{a,j-1}).$$

Considérons aussi les distributions $u_f^{a,j} = \frac{1}{j!}|f|^{2a}(\log |f|^2)^j \exp\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\bar{f}}\right)$, $j = 0, \ldots, k$, $(u_f^{a,-1} = 0)$. Il est facile de vérifier qu'il n'existe pas de relation $\mathcal{O}_X$-linéaire entre les $u_f^{a,j}$, et que pour $P \in \mathcal{D}_X$, $a_{i,j} \in \mathcal{O}_X[*Y]$, on a:

$$P e_f^{a,j} = \sum_{i=0}^{j} a_{i,j} e_f^{a,i} \Leftrightarrow P u_f^{a,j}\Big| X \setminus Y = \sum_{i=0}^{j} a_{i,j} u_f^{a,i}\Big| X \setminus Y. \tag{1}$$

Notons $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ les idéaux de $\mathcal{D}_X$, annulateurs de $e_f^{a,k}$ et $u_f^{a,k}$ respectivement. Les remarques qui précèdent prouvent l'inclusion $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. Il existe par conséquent une surjection:

$$\rho \colon \mathcal{M}_f^{a,k} := \mathcal{D}_X u_f^{a,k} \to \mathcal{D}_X e_f^{a,k} \tag{2}$$

le noyau de ρ étant égal à la torsion de $\mathcal{M}_f^{a,k}$. $\mathcal{L}_f^{a,k}$ (quotient de $\mathcal{M}_f^{a,k}$ par sa torsion) apparaît donc naturellement égal à $\mathcal{D}_X e_f^{a,k}$ $(\subset \mathcal{E}_f^{a,k})$.

Remarque 1. Pour montrer l'holonomie de $\mathcal{L}_f^{a,k}$ et le fait que son dual est localisé le long de Y, nous aurions pu nous réduire, dans la preuve de la Proposition 2.1, au cas où $k = 0$ par récurrence sur k, grâce à l'inclusion $\mathcal{L}_f^{a,k-1} \subset \mathcal{L}_f^{a,k}$, le quotient s'identifiant à $\mathcal{L}_f^{a,0}$. Nous aurions eu, néanmoins, à calculer le dual de ce dernier. Au lieu de cela, nous avons préféré expliciter directement l'idéal $\mathcal{I}$. La détermination d'un bon système générateur de $\mathcal{I}$, qui ne semble pas absolument nécessaire pour la Proposition 2.1, nous sera néanmoins très utile pour la Proposition 3.2.

2.1. PROPOSITION. *Si la fonction f est monomiale sur $X = \mathbf{C}^n$, $\mathcal{L}_f^{a,k}$ est holonome. De plus, on a:*

$$\mathcal{L}_f^{a,k} = \mathcal{E}_f^{a,k} \quad et \quad (\mathcal{L}_f^{a,k})^* \cong \mathcal{L}_{-f}^{-a,k}.$$

Preuve. Supposons que $f = \prod_{i=1}^r x_i^{c_i}, c_i > 0, r \in [1, n]$. On pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\nabla_i = \frac{1}{c_i} x_i \partial_i$, et $P_s = f(\nabla_1 - a - s) + 1$. On a $\nabla_i(f) = f$ pour $i = 1, \ldots, r$, d'où les identités suivantes:

$$P_s(f^s e_f^{a,j}) = f^{s+1} e_f^{a,j-1} \quad \forall j = 0, \ldots, k. \tag{3}$$

Et donc, par récurrence sur j:

$$P_{s+j} P_{s+j-1} \ldots P_s (f^s e_f^{a,j}) = 0. \tag{4}$$

Or la relation $f\nabla_1 = \nabla_1 f - \nabla_1(f) = \nabla_1 f - f = (\nabla_1 - 1) f$ montre que les opérateurs $1 - P_{s+j} P_{s+j-1} \ldots P_s$ sont divisibles à droite par f. Il existe donc des opérateurs $P_{s,j}$ tels que: $1 - P_{s,j} f = P_{s+j} P_{s+j-1} \ldots P_s$. D'où les relations:

$$P_{s,j}(f^{s+1} e_f^{a,j}) = f^s e_f^{a,j} \quad \forall j = 0, \ldots, k. \tag{5}$$

Les équations (3) et (5) suffisent à démontrer l'égalité $\mathcal{L}_f^{a,k} = \mathcal{E}_f^{a,k}$. En effet, il s'agit juste de vérifier que:

$$O_X[*Y] e_f^{a,j} \subset \mathcal{L}_f^{a,k} \quad \forall j = 0, \ldots, k. \tag{6}$$

Or (5) permet de voir, par récurrence sur l'ordre du pôle, que:

$$O_X[*Y] e_f^{a,j} \subset \mathcal{D}_X e_f^{a,j} \quad \forall j = 0, \ldots, k.$$

Ceci permet, cette fois-ci par une récurrence descendante sur j, de réduire la preuve de (6) à celle de:

$$e_f^{a,j-1} \in \mathcal{D}_X e_f^{a,j} \quad \forall j = 1, \ldots, k.$$

Pour cela, on a les identités précises: $e_f^{a,j-1} = P_{-1} P_{-1,j}(e_f^{a,j})$. $\square$

A présent, calculons $\mathcal{I}$. Soient $Q_i, i = 1, \ldots, n$, les opérateurs:

$$Q_i = \begin{cases} P_k P_{k-1} \ldots, P_1 P_0 & \text{si } i = 1, \\ \nabla_i - \nabla_1 & \text{si } i \in [2, r], \\ \partial_i & \text{si } i \in [r+1, n]. \end{cases}$$

D'après (4) on a l'inclusion d'idéaux: $\mathcal{I}_0 := \mathcal{D}_X Q_1 + \cdots + \mathcal{D}_X Q_n \subset \mathcal{I}$. En fait, on a le

2.2. LEMME. *On a l'égalité:* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$.

Preuve. Il suffit évidemment de vérifier les deux inclusions:

(a) $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_0 + \mathcal{I} \cap O_X[\partial_1]$,
(b) $\mathcal{I} \cap O_X[\partial_1] \subset O_X[\partial_1]Q_1$.

Pour (a), il suffit, par une récurrence sur l'ordre des opérateurs en les ∂_i, $i = 2, \dots, r$ de vérifier que:

$$\partial_i \in \partial_i Q_1 + \mathcal{D}_X Q_i + O_X[\partial_1] \quad \forall i = 2, \dots, r$$

ce qui s'établit par récurrence sur k. En effet, supposons que:

$$\partial_i P_{k-1} \dots P_1 P_0 = \partial_i + AQ_i + B \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{D}_X \quad \text{et} \quad B \in O_X[\partial_1].$$

Or, si $f_i = \frac{c_i f}{x_i}$, on a bien $\partial_i f = f_i(\nabla_i + 1)$, et donc:

$$\begin{aligned} \partial_i P_s &= \partial_i + \partial_i f(\nabla_1 - a - s) = \partial_i + f_i(\nabla_1 - a - s)(\nabla_i + 1) \\ &= \partial_i + f_i(\nabla_1 - a - s)Q_i + f_i(\nabla_1 - a - s)(\nabla_1 + 1). \end{aligned}$$

En conséquence: $\partial_i Q_1 = \partial_i P_{k-1} \dots P_1 P_0 + f_i(\nabla_1 - a - k)Q_i P_{k-1} \dots, P_1 P_0 + f_i(\nabla_1 - a - k)(\nabla_1 + 1)P_{k-1} \dots P_1 P_0$ et $[Q_i, f] = [Q_i, \nabla_1] = 0$ donnent alors en définitive $\partial_i Q_1 = \partial_i + CQ_i + D$ avec:

$$\begin{aligned} C &= A + f_i(\nabla_1 - a - k)P_{k-1} \dots P_1 P_0; \\ D &= B + f_i(\nabla_1 - a - k)(\nabla_1 + 1)P_{k-1} \dots P_1 P_0. \end{aligned}$$

Pour établir (b), nous aurons besoin de préciser l'action de $O_X[\partial_1]$ sur les $f^s e_f^{a,j}$. D'abord, on vérifie, par récurrence sur l, que:

$$\nabla_1^l (f^s e_f^{a,j}) = f^s \sum_{i=0}^{\min(j,l)} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} S_{i,l}(s, f^{-1}) e_f^{a,j-i}$$

où $S_{i,l}(s,t) \in \mathbf{C}[s,t]$ est unitaire de degré $l - i$ en t. Les relations $x_1^l \partial_1^l = \prod_{h=0}^{l-1}(c_1 \nabla_1 - h)$ donnent:

$$x_1^l \partial_1^l (f^s e_f^{a,j}) = f^s \sum_{i=0}^{\min(j,l)} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} c_1^l T_{i,l}(s, f^{-1}) e_f^{a,j-i}$$

où $T_{i,l} \in \mathbf{C}[s,t]$ est unitaire et de degré $l - i$ en t.

Si $U_{i,l}(s,t) = (-t)^{l-i}\binom{l}{i} c_1^l T_{i,l}(s, t^{-1})$, les fonctions $V_{i,l}^s(x) = U_{i,l}(s, f(x))$ sont alors holomorphes inversibles au voisinage de Y, pour tout s fixé. Pour tout opérateur $P = \sum_{l=0}^m b_l \partial_1^l \in O_X[\partial_1]$, on aura donc:

$$P(f^s e_f^{a,j}) = f^s \sum_{i=0}^{\min(j,m)} \left(\sum_{l=i}^m \frac{b_l(x)}{(x_1 f)^l} V_{i,l}^s \right) f^i e_f^{a,j-i}.$$

Nous aurons alors besoin de deux sous-lemmes intermédiaires.

2.2.1. Sous-lemme. *Soit* $(h,j) \in \mathbf{N} \times [0,k]$. *On a alors:*

$$P(f^h e_f^{a,j}) \in \bigoplus_{i=0}^{j-1} \mathcal{O}_X[*Y] e_f^{a,i} \Rightarrow \exists Q \in \mathcal{O}_X[\partial_1] \quad \text{tel que} \quad P = QP_h.$$

Preuve. Par récurrence sur l'ordre de P. Le coefficient de $e_f^{a,j}$ dans $P(f^h e_f^{a,j})$ vaut:

$$f^h \sum_{l=0}^{m} \frac{b_l(x)}{(x_1 f)} V_{j,l}^h.$$

L'hypothèse implique alors que b_m est divisible par $x_1 f$. Il existe donc A et B dans $\mathcal{O}_X[\partial_1]$ d'ordres $\leq$ ordre$(P) - 1$ et tels que $P = AP_h + B$. Or, du fait que $P_h(f^h e_f^{a,j}) = f^{h+1} e_f^{a,j-1}$, les coefficients en $e_f^{a,j}$ de $P(f^h e_f^{a,j})$ et de $B(f^h e_f^{a,j})$ sont égaux. L'hypothèse de récurrence conclut. □

2.2.2. Sous-lemme. *Soit* $(h,j) \in \mathbf{N} \times [0,k]$. *On a alors:*

$$P(f^h e_f^{a,j}) = 0 \Rightarrow \exists R \in \mathcal{O}_X[\partial_1] \quad \text{tel que} \quad P = RP_{h+j}P_{h+j-1} \cdots P_h.$$

Preuve. Le sous-lemme précédent fournit $Q \in \mathcal{O}_X[\partial_1]$ d'ordre $\leq$ ordre$(P) - 1$ et tel que $P = QP_h$. On en déduit que:

$$Q(f^{h+1} e_f^{a,j-1}) = QP_h(f^h e_f^{a,j}) = P(f^h e^{a,j}) = 0$$

d'où le résultat par récurrence sur l'ordre de P. □

En faisant $j = k$ et $h = 0$ dans le sous-lemme 2.2.2, on obtient (b). □

Achevons de prouver la proposition maintenant. Il est facile de voir que les Q_i commutent entre eux deux à deux, et que la suite de leurs symboles principaux $(\sigma(Q_i))_{1 \leq i \leq n}$ est régulière dans $\mathcal{O}_{T^*X}$. On en déduit d'une part que $\mathcal{L}_f^{a,k}$ est holonome, et d'autre part que le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{D}_X\, ;\, Q_1, \ldots, Q_n)$ en est une résolution.

Le dual $(\mathcal{L}_f^{a,k})^*$ s'identifie alors au quotient de $\mathcal{D}_X$ par l'idéal engendré par les opérateurs adjoints $R_i := Q_i^*$. Par ailleurs, si l'on pose $g = \prod_{i=1}^r x_i$, on peut se convaincre, par les mêmes arguments de division dans $\mathcal{D}_X$ précédemment utilisés, que les opérateurs R_i engendrent l'idéal annulateur de:

$$e = g^{-1} f^{-a-k-1} (\log f)^k \exp(-f^{-1}).$$

On conclut alors en remarquant que l'égalité $\mathcal{L}_{-f}^{-a,k} = \mathcal{L}_{-f}^{-a,k}[*Y]$ permet de voir que e est également générateur de $\mathcal{L}_{-f}^{-a,k}$. □

2.3. PROPOSITION. *Pour une fonction f quelconque, $\mathcal{L}_f^{a,k}$ est holonome. De plus:*

$$\mathcal{L}_f^{a,k} = \mathcal{E}_f^{a,k} \quad et \quad (\mathcal{L}_f^{a,k})^* = (\mathcal{L}_f^{a,k})^*[*Y].$$

Preuve. Considérons $\pi: Z \to X$ un morphisme propre où Z est lisse telle que, pour $T = \pi^{-1}(Y)$, π est un isomorphisme entre $Z \setminus T$ et $X \setminus Y$ et telle que $g = f \circ \pi$ est à croisement normaux [H]. L'égalité $\mathcal{L}_g^{a,k} = \mathcal{L}_g^{a,k}[*T]$ implique (cf. [Bj], p. 109) que:

$$\int_{\pi_*} \mathcal{L}_g^{a,k} = \pi_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Z} \otimes_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{L}_g^{a,k})[0].$$

De plus, cette image est holonome et sans $\mathcal{O}_X$-torsion. Les sections globales $e_f^{a,k}$ et $1_{X \leftarrow Z} \otimes e_g^{a,k}$ de $\mathcal{L}_f^{a,k}$ et $\int_{\pi_*}^0 \mathcal{L}_g^{a,k}$ respectivement permettent de définir une flèche:

$$\mathcal{L}_f^{a,k} \to \int_{\pi_*}^0 \mathcal{L}_g^{a,k}.$$

L'absence de $\mathcal{O}_X$-torsion dans $\mathcal{L}_f^{a,k}$ montre alors que cette flèche est injective. Ceci établit déjà l'holonomie de $\mathcal{L}_f^{a,k}$, et donc celle de $\mathcal{K}_f^{a,k} := \mathcal{L}_f^{a,k}[*Y]$ (cf. [Me], p. 98). La proposition découlerait alors des deux propriétés:

$$\mathcal{K}_f^{a,k} = \mathcal{E}_f^{a,k} \tag{7}$$

et

$$(\mathcal{K}_f^{a,k})^* = (\mathcal{K}_f^{a,k})^*[*Y]. \tag{8}$$

En effet, il resterait juste à vérifier que $\mathcal{L}_f^{a,k} = \mathcal{K}_f^{a,k}$, égalité équivalente à la nullité de $\mathcal{H}_{[Y]}^1(\mathcal{L}_f^{a,k})$, ce qui découlerait de (8) puisque le dual de ce $\mathcal{D}_X$-module est de $\mathcal{O}_X$-torsion dans $(\mathcal{K}_f^{a,k})^*$. L'inclusion $\mathcal{K}_f^{a,k} = \mathcal{D}_X[*Y]e_f^{a,k} \subset \mathcal{E}_f^{a,k}$ est évidente. Une récurrence descendante sur j permet de voir que (7) découle de:

$$e_f^{a,j-1} \in \mathcal{D}_X[*Y]e_f^{a,j} \quad \forall j = 1, \ldots, k$$

ce qui provient de l'appartenance de f au radical de son idéal jacobien. En effet, pour un champ de vecteurs V tel que $V(f) = f^r$, on a:

$$(V + (1 - af)f^{r-2})e_f^{a,j} = f^{r-1}e_f^{a,j-1}.$$

Par ailleurs, (7) montre que $\mathcal{K}_f^{a,k}$ est plat sur O_X. On aura alors:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k}) &= \pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k})[0] = \mathcal{D}_{Z\to X} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)} \pi^{-1}(\mathcal{K}_f^{a,k})[0] \\ &= \mathcal{D}_Z[*T](1_{Z\to X} \otimes \pi^{-1}(e_f^{a,k}))[0].\end{aligned}$$

Les sections globales $e_g^{a,k}$ et $1_{Z\to X} \otimes \pi^{-1}(e_f^{a,k})$ de $\mathcal{L}_g^{a,k}$ et $\mathbf{L}\pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k})$ respectivement permettent d'établir un isomorphisme:

$$\mathcal{L}_g^{a,k}[0] \cong \mathbf{L}\pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k}).$$

Comme $(\mathcal{L}_g^{a,k})^* = (\mathcal{L}_g^{a,k})^*[*T]$ (Prop. 2.1), on obtient (8) grâce à la relation:

$$\int_{\pi_*} (\mathcal{L}_g^{a,k})^* \cong (\mathcal{K}_f^{a,k})^*[0],$$

laquelle découle de la précédente et des isomorphismes (cf. [Me], p. 72 et p. 97):

$$\int_{\pi_*} (\mathcal{L}_g^{a,k})^* \cong \left(\int_{\pi_!} \mathcal{L}_g^{a,k}\right)^* \quad \text{et} \quad \int_{\pi_!} \mathbf{L}\pi^*(\mathcal{K}_f^{a,k}) \cong \mathcal{K}_f^{a,k}[0]. \qquad \square$$

3. Etude du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}_f^{a,k}$

Pour la suite, nous aurons à nous servir du

3.1. LEMME. *Soient $u_1 \in L^\infty(X) \cap C^1(X \setminus Y)$, $u_2 \in L^\infty(X) \cap C^0(X \setminus Y)$, P un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 et à coefficients de classe C^1, tels que la distribution $Pu_1 - u_2$ soit portée par Y. Alors $Pu_1 = u_2$.*

Preuve. Le problème est local. Soit X un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Prenons $P = b + \sum_{i=1}^n a_i \partial_i$ et une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(X)$. On a:

$$\begin{aligned}\langle Pu_1, \varphi\rangle &= \langle u_1, P^*\varphi\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|f|\geqslant\varepsilon} u_1 P^*\varphi dx \wedge d\overline{x} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|f|\geqslant\varepsilon} u_2\varphi dx \wedge d\overline{x} + \int_{|f|=\varepsilon} u_1\psi\right) = \langle u_2, \varphi\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|f|=\varepsilon} u_1\psi,\end{aligned}$$

avec $\psi = \varphi dx \wedge d\overline{x} \rightharpoonup (P-b) = \varphi\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \check{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge d\overline{x}$.

La dernière limite est nulle du fait que $\mathrm{Vol}(|f| = \varepsilon) = O(\varepsilon^{1/m})$ au voisinage d'un point de multiplicité m pour f [I: 2e partie, p. 4–6]. $\square$

Rappelons l'existence d'un épimorphisme $\rho: \mathcal{M}_f^{a,k} \to \mathcal{L}_f^{a,k}$ (cf. (2) dans Section 2). On a:

3.2. PROPOSITION. *Si la fonction f est monomiale sur $X = \mathbf{C}^n$, ρ est un isomorphisme.*

Preuve. Il suffit de prouver l'inclusion $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. On reprendra les notations de la Proposition 2.1. En vertu du Lemme 2.2, il suffit de prouver que $Q_i u_f^{a,k} = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Or pour $i = 2, \ldots, n$, c'est directement le Lemme 3.1. Reste Q_1. Or les relations (3) dans la Proposition 2.1 appuyées de (1) donnent (pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$), toujours en vertu du Lemme 3.1:

$$P_s(f^s u_f^{a,j}) = f^{s+1} u_f^{a,j-1} \quad \forall j = 0, \ldots, k.$$

On en déduit, par récurrence sur k, que l'on a bien $Q_i u_f^{a,k} = 0$. □

3.3. PROPOSITION. *Pour une fonction f quelconque, ρ est un isomorphisme.*

Preuve. Il s'agit de prouver que:

$$\mathcal{H}_Y^0(\mathcal{M}_f^{a,k}) = 0. \tag{9}$$

Le problème et local. Prenons pour X un ouvert de $\mathbf{C}^n$, et $dx := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \omega_X$. Le courant de type $(n, 0)$: $v_f = u_f^{a,k} \otimes dx$ engendre un $\mathcal{D}_X$-module à droite $\mathcal{N}_f^{a,k} = v_f \mathcal{D}_X$ qui n'est rien d'autre que $\mathcal{M}_f^{a,k} \otimes_{O_X} \omega_X$. (9) est alors équivalent à:

$$\mathcal{H}_Y^0(\mathcal{N}_f^{a,k}) = 0. \tag{10}$$

On fera appel, encore ici, à une désingularisation de Hironaka de f, $\pi: Z \to X$ (cf. notations de la Proposition 2.3). π étant propre, l'image directe:

$$\pi_*: \pi_*(\theta_Z)[*Y] \to \theta_X[*Y],$$

est un isomorphisme ([Bj], p. 108). D'où un autre isomorphisme:

$$\pi_*: \mathcal{A}[*Y] \to \mathcal{D}_X[*Y],$$

où $\mathcal{A}$ est le sous-anneau de $\pi_*(\mathcal{D}_Z)$ engendré par $\pi_*(\theta_Z)$ (sachant que $\pi_*(O_Z) = O_X$). En conséquence, on aura:

$$\forall P \in \mathcal{D}_X \;\; \exists m \in \mathbf{N} \;\; \exists Q \in \pi_*(\mathcal{D}_Z) \quad \text{tels que} \quad f^m P = \pi_*(Q). \tag{11}$$

Par ailleurs, le courant sur $Z: v_g = u_g^{a,k} \otimes \pi^*(dx)$ vérifie deux choses: d'une part, son image directe $\pi_*(v_g)$ coïncide avec v_f ; d'autre part, il engendre un $\mathcal{D}_Z$-module à droite $\mathcal{N}_g^{a,k} := v_g \mathcal{D}_X$ qui n'est rien d'autre que $\mathcal{M}_g^{a,k} \otimes_{O_z} \omega_Z$.

Vérifions cela rapidement. D'abord, v_g est une section globale de $\mathcal{M}_g^{a,k} \otimes_{O_z} \omega_Z$, et donc $\mathcal{N}_g^{a,k}$ est un sous-module de ce dernier. L'égalité cherchée est donc locale. Soient $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées sur Z, on a $v_g = \Delta u_g^{a,k} \otimes dz$, où Δ est le déterminant jacobien de π. Comme $\Delta^{-1}(0) \subset T$, il existe $r \in \mathbf{N}^*$, $h \in O_Z$ tels que: $f^r = h\Delta$. La relation (5) de la Proposition 2.1 donne:

$$P_{0,k} P_{1,k} \ldots P_{r-1,k}(f^r u_g^{a,k}) = u_g^{a,k}.$$

Si l'on pose $R = P_{0,k} P_{1,k} \ldots P_{r-1,k} h$, on aura:

$$R(\Delta u_g^{a,k}) = u_g^{a,k} \quad \text{i.e.} \quad u_g^{a,k} \otimes dz = v_g R^*.$$

D'où l'assertion, du fait que $u_g^{a,k} \otimes dz$ est un générateur de $\mathcal{M}_g^{a,k} \otimes_{O_z} \omega_Z$. En conséquence $\mathcal{N}_g^{a,k} = \mathcal{N}_g^{a,k}[*T]$, et donc:

$$\pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k}) = \pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k}[*T]). \tag{12}$$

Ce module est donc sans torsion. Ainsi, d'une part, l'image directe des courants définit une injection:

$$\pi_* : \pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k}) \to \mathcal{D}b_X \otimes_{O_X} \omega_X$$

et, d'autre part, (10) sera établie pourvu que l'on vérifie que: $\mathcal{N}_f^{a,k} \subset \mathrm{Im}(\pi_*)$.

Soient alors $v \in \mathcal{N}_f^{a,k}$ et $P \in \mathcal{D}_X$ tels que $v = v_f P$. Soient m et Q fournis par (11). La multiplication par g^m est bijective sur $\pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k})$ (cf. (12)). Il existe donc $w \in \pi_*(\mathcal{N}_g^{a,k})$ tel que $v_g = g^m w$. Il s'ensuit que: $v_f = \pi_*(v_g) = \pi_*(g^m w) = f^m \pi_*(w)$.

J'affirme alors que $v = \pi_*(wQ)$. En effet, soit φ une forme de type $(0, n)$ sur X, C^∞ et à support compact. On aura:

$$\begin{aligned} \langle \pi_*(wQ), \varphi \rangle &= \langle wQ, \pi^*(\varphi) \rangle = \langle w, Q\pi^*(\varphi) \rangle = \langle w, \pi^*(f^m P\varphi) \rangle \\ &= \langle \pi_*(w), f^m P\varphi \rangle = \langle f^m \pi_*(w), P\varphi \rangle = \langle v_f, P\varphi \rangle \\ &= \langle v_f P, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

Remarque 2. Le passage aux courants se justifie bien. En effet, on aurait eu, sinon, à traduire la relation (11) par une action à droite sur des formes test de type (n, n), laquelle se transforme en une action à gauche (par adjonction) sur des formes test de type $(0, n)$. Or il se trouve que cette adjonction n'est pas une opération globale et n'est donc pas bien définie sur l'opérateur Q dans (11).

4. Conjugaison de $\mathcal{M}_f^{a,k}$ et de $\mathcal{E}_f^{a,k}$

Si l'on note, comme avant, $\mathcal{J}$ l'annulateur (holomorphe) de $u_f^{a,k}$, on aura:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X u_f^{a,k}, \mathcal{D}b_X) \cong \{v \in \mathcal{D}b_X;\ \mathcal{J}v = 0\}.$$

Il s'ensuit une injection $i\colon \mathcal{D}_{\overline{X}} u_f^{a,k} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X u_f^{a,k}, \mathcal{D}\mathcal{b}_X)$ qui définit une flèche dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$:

$$i\colon \mathcal{D}_{\overline{X}} u_f^{a,k}[0] \to C_X(\mathcal{D}_X u_f^{a,k}).$$

4.1. THÉORÈME. *Cette flèche est un isomorphisme.*

Preuve. Nous ferons cela en trois étapes: (a) Montrons d'abord que l'on 'peut permettre les dénominateurs'. En effet, par les Propositions 2.3 et 3.3, on a:

$$(\mathcal{M}_f^{a,k})^* = (\mathcal{M}_f^{a,k})^*[*Y].$$

Ceci donne les isomorphismes suivants dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$:

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}\mathcal{b}_X) \cong \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \big((\mathcal{M}_f^{a,k})^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}\mathcal{b}_X\big)[-n]$$

$$\cong \omega_X \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \big((\mathcal{M}_f^{a,k})^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}\mathcal{b}_X[*Y]\big)[-n] \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}\mathcal{b}_X[*Y]).$$

Par ailleurs, toujours par les Propositions 2.3 et 3.3, on a:

$$\mathcal{M}_f^{a,k} = \mathcal{M}_f^{a,k}[*Y]. \tag{13}$$

Il s'ensuit l'isomorphisme suivant dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$:

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}\mathcal{b}_X[*Y]) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}\mathcal{b}_X[*Y]). \tag{14}$$

Cela découle de l'existence de résolutions libres pour $\mathcal{M}_f^{a,k}$, ce que l'on peut supposer vrai, puisque notre problème initial est local. □

(b) Le deuxième complexe dans (14) est plus aisé à calculer explicitement. On va, pour cela, construire une résolution de $\mathcal{M}_f^{a,k}$ en tant que $\mathcal{D}_X[*Y]$-module. D'abord, on sait plus précisément que (13), à savoir:

$$\mathcal{M}_f^{a,k} = \bigoplus_{j=0}^{k} \mathcal{O}_X[*Y] u_f^{a,j} = \sum_{j=0}^{k} \mathcal{D}_X[*Y] u_f^{a,j}. \tag{15}$$

On a donc une surjection $d_0\colon \mathcal{D}_X^{k+1}[*Y] \to \mathcal{M}_f^{a,k}$ définie par:

$$d_0(P_1, \dots, P_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k} P_{k+1-j} u_f^{a,j}.$$

Or, pour tout $v \in \theta_X$, on a:

$$\Big(v + \frac{(1-af)}{f^2} v(f)\Big) u_f^{a,j} = \frac{v(f)}{f} u_f^{a,j-1} \quad \forall j = 0, \dots, k.$$

Par une récurrence sur k et des calculs locaux (récurrence sur les ordres des opérateurs), on peut facilement se convaincre que $\mathrm{Ker}(d_0) = \mathrm{Im}(d_{-1})$ où

$$d_{-1} : \mathcal{D}_X^{k+1}[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \theta_X \to \mathcal{D}_X^{k+1}[*Y]$$

est définie par:

$$d_{-1}\big((P_1, \dots, P_{k+1}) \otimes v\big) = (Q_1, \dots, Q_{k+1}) \quad \text{avec}$$

$$Q_j = P_j\Big(v + \frac{(1-af)}{f^2} v(f)\Big) - P_{j+1}\frac{v(f)}{f}.$$

Ceci suggère de considérer le complexe $(\mathcal{SP}_\bullet, d_\bullet) : \mathcal{SP}_{-p} = \mathcal{D}_X^{k+1}[*Y] \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^p \theta_X$ et:

$$d_{-p}\big((P_1, \dots, P_{k+1}) \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_p\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} (Q_{1,i}, \dots, Q_{k+1,i}) \otimes (v_1 \wedge \dots \wedge \check{v}_i \wedge \dots \wedge v_p)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} (P_1, \dots, P_{k+1})$$

$$\otimes([v_i, v_j] \wedge v_1 \wedge \dots \wedge \check{v}_i \wedge \dots \wedge \check{v}_j \wedge \dots \wedge v_p) \quad \text{avec}$$

$$Q_{j,i} = P_j\Big(v_i + \frac{(1-af)}{f^2} v_i(f)\Big) - P_{j+1}\frac{v_i(f)}{f}.$$

Il est également aisé de vérifier que $(\mathcal{SP}_\bullet, d_\bullet)$ est acyclique en degrés $\leqslant -1$. En effet, $(\mathcal{SP}_\bullet, d_\bullet)$ coïncide localement avec le complexe de Koszul:

$$\mathcal{K}^\bullet(\mathcal{D}_X^{k+1}[*Y]\,;\, A_1, \dots, A_n),$$

associé aux endomorphismes $\mathcal{D}_X[*Y]$-linéaires de $\mathcal{D}_X^{k+1}[*Y], A_1, \dots, A_n$ (commutant entre eux deux à deux), définis par:

$$A_i(P_1, \dots, P_{k+1}) = (Q_{1,i}, \dots, Q_{k+1,i}) \quad \text{avec}$$

$$Q_{j,i} = P_j\Big(\partial_i + \frac{(1-af)}{f^2} \partial_i(f)\Big) - P_{j+1}\frac{\partial_i(f)}{f}.$$

$(\mathcal{SP}_\bullet, d_\bullet)$ est donc une résolution $\mathcal{D}_X[*Y]$-libre (localement) de $\mathcal{M}_f^{a,k}$. □

(c) Considérons le complexe de $(k+1)$-uplets de courants sur X (localisés le long de Y) de types $(\bullet, 0)$, noté $(\Omega^\bullet(\mathcal{D}\mathcal{B}_X^{k+1}[*Y])\,;\, d')$, d' étant la différentielle holomorphe. Le complexe $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{M}_f^{a,k}, \mathcal{D}\mathcal{b}_X[*Y])$ est donc représenté dans $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$ par:

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[*Y]}(\mathcal{SP}_\bullet, \mathcal{D}\mathcal{b}_X[*Y]), (d_\bullet)^\bullet) = (\Omega^\bullet(\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}[*Y]);\ \mathrm{d}_f)$$

où d_f est obtenue à partir de d' par la modification:

$$d_f(\omega \otimes T) = d'(\omega \otimes T) + \frac{df}{f^2} \wedge \omega \otimes ((1 - af)I - fN)T$$

I étant l'identité et N l'endomorphisme de $\mathcal{D}_X^{k+1}[*Y]$ défini par:

$$N(T_1, \ldots, T_{k+1}) = (T_2, \ldots, T_{k+1}, 0).$$

Il est facile de voir que le lemme de Dolbeault-Grothendieck d'une part, et le théorème de division dans $\mathcal{D}\mathcal{b}_X$ d'autre part, montrent que $(\Omega^\bullet(\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}[*Y]);\ \mathrm{d}')$ est une résolution de $\mathcal{O}_{\overline{X}}^{k+1}[*\overline{Y}]$.

Notons également I et N les matrices naturelles associées aux morphismes I et N précédents. La matrice $U_f^{a,N} = |f|^{2(aI+N)} \exp\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\overline{f}}\right)$ est $C^\infty(X \setminus Y)$, à croissance lente le long de Y, ainsi que toutes ses dérivées. Le théorème de division [Ma] montre alors que $U_f^{a,N}$ agit sur $\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}[*Y]$. En effet, pour tout $T \in \mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}$, $\overline{f}^q U_f^{a,N}(T)$ est dans $\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}$ pour $q \gg 0$ (par finitude locale de l'ordre dans $\mathcal{D}\mathcal{b}_X$). Par le théorème de division, il existe $S \in \mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}$ telle que $\overline{f}^q U_f^{a,N}(T) = \overline{f}^q S$. On définit alors $U_f^{a,N}(T)$ comme la classe de S dans le quotient $\frac{\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}}{\mathcal{H}_Y^0(\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1})} = \mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}[*Y]$.

Cette action se prolonge en un isomorphisme de complexes de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-modules:

$$U_f^{a,N} = (\Omega^\bullet(\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}[*Y]);\ \mathrm{d}') \to (\Omega^\bullet(\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}[*Y]);\ \mathrm{d}_f).$$

On vérifie, en effet, que $\left(U_f^{a,N}\right)^{-1} = U_{-f}^{-a,-N}$ est $C^\infty(X \setminus Y)$, à croissance lente le long de Y, ainsi que toutes ses dérivées, et de plus: $U_f^{a,N} \circ d' = d_f \circ U_f^{a,N}$.

On déduit de tout cela que $\left(\Omega^\bullet(\mathcal{D}\mathcal{b}_X^{k+1}[*Y])\, ;\, d_f\right)$ est une résolution de:

$$\begin{aligned} U_f^{a,N}(\mathcal{O}_{\overline{X}}^{k+1}[*\overline{Y}]) &= \bigoplus_{j=0}^{k} \mathcal{O}_{\overline{X}}[*\overline{Y}]|f|^{2a}(\log|f|^2)^j \exp\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{\overline{f}}\right) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{k} \mathcal{O}_{\overline{X}}[*\overline{Y}]u_f^{a,j} = \mathcal{M}_{-\overline{f}}^{a,k} = \mathcal{D}_{\overline{X}}u_f^{a,k}, \end{aligned}$$

par conjugaison de (15). Ceci achève la preuve du théorème. □

4.2. COROLLAIRE. *On a un isomorphisme naturel dans* $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$*:*

$$C_X(\mathcal{E}_f^{a,k}) \cong \mathcal{E}_{-\overline{f}}^{a,k}[0].$$

Preuve. Ceci découle des isomorphismes suivants (cf. Prop. 3.3 et Théo. 4.1):

$$\rho^* : C_X(\mathcal{E}_f^{a,k}) \to C_X(\mathcal{M}_f^{a,k})$$

$$i : \mathcal{M}_{-\overline{f}}^{a,k} \to C_X(\mathcal{M}_f^{a,k}) \quad \text{et} \quad \overline{\rho} : \mathcal{M}_{-\overline{f}}^{a,k} \to \mathcal{E}_{-\overline{f}}^{a,k}.$$

Je tiens à remercier D. Barlet et C. Sabbah pour des discussions très fructueuses qui ont permis de réaliser ce travail.

Bibliographie

[B1] Belgrade, R., *Sur un complexe de Dolbeault-Grothendieck à différentielle modifiée.* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série I, p. 1009–1012, 1994.

[B2] Belgrade, R., *Un exemple de conjugaison d'un $\mathcal{D}$-module holonome irrégulier.* Prépublication de l'Institut Elie Cartan, n° 29, 1993.

[Bj] Björk, J. E., *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications.* Kluwer Academic Publishers, 1993.

[D] Dolbeault, P., *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes.* C.R. Acad. Sci. Paris, 263, 1953.

[H] Hironaka, H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero.* Annals of math. 79, p. 109–326, 1964.

[I] Revue de l'Institut Elie Cartan, Séminaire de Géométrie Analytique, volume n° 5, 1980.

[K] Kashiwara, M., *Regular $\mathcal{D}$-modules and distributions on complex manifolds.* Advanced Studies in Pure Math. 8, p. 199–206, 1986.

[Ma] Malgrange, B., *Théorème de division des distributions.* Séminaire Laurent Schwartz, 1959–1960, exposés n° 21 à 25.

[Me] Mebkhout, Z., *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents.* Hermann, Collection Travaux en cours, 1989.