COMPOSITIO MATHEMATICA

P. DELORME

Théorème de Paley-Wiener invariant tordu pour le changement de base $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

Compositio Mathematica, tome 80, nº 2 (1991), p. 197-228

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1991__80_2_197_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica **80**: 197–228, 1991.
© 1991 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

Théorème de Paley-Wiener invariant tordu pour le changement de base $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

P. DELORME

Département de Mathématique-Informatique, Faculté des Sciences de Luminy, 163, avenue de Luminy, 13288 Marseille Cedex 9, France

Received 12 June 1990; accepted 31 January 1991

0. Introduction

Soit G un groupe de Lie algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur $\mathbb{R}$, $G(\mathbb{C})$ le groupe des ses points complexes et σ l'action de l'élément non trivial du groupe de Galois de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Dans cet article on commence par classifier les représentations irréductibles $G(\mathbb{C})$ de qui sont invariantes par σ.

Pour une telle représentation, on construit une représentation du produit semi-direct, noté $\sigma \ltimes G(\mathbb{C})$, de $G(\mathbb{C})$ par l'action du groupe de Galois de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Ceci revient à se donner un opérateur d'entrelacement $A(\sigma, \pi)$ entre π et $\pi \circ \sigma$ de carré 1. Le Théorème de Paley-Wiener invariant tordu (Théorème 1) donne une caractérisation des fonctions $\pi \to \mathrm{tr}(\pi(\varphi)A(\sigma, \pi))$ lorsque φ décrit l'espace des fonctions C^∞ à support compact, K-finies à droite et à gauche (où K est le groupe des points fixes d'une involution de Cartan de $G(\mathbb{C})$ commutant à σ).

On calcule également la caractéristique d'Euler-Poincaré tordue des représentations tempérées de $\sigma \ltimes G(\mathbb{C})$ tensorisées par une représentation de dimension finie.

Au dernier paragraphe on donne une application des nos résultats à la formule des traces tordues dans le cas cocompact, en y introduisant essentiellement des pseudocoefficients de séries σ-discretes. Leur existence est déduite de notre théorème de Paley-Wiener tordu. Il est bon ici de mentionner que l'on peut construire ceux-ci de manière plus simple en utilisant une idée de N. Wallach. Ceci est fait dans une note de J.P. Labesse ([19] et aussi [20]). On doit pouvoir faire encore plus simple en utilisant [15]. Signalons enfin que, dans le cadre de $\mathrm{GL}(n)$, le théorème 1 avait été déjà démontré par J. Arthur et L. Clozel (cf. [21]), de même que le théorème 2 a été prouvé par L. Clozel ([9], prop. 3.5). Les paragraphes 7 et 8 sont à comparer aux résultats de J. Rohlfs et B. Speh ([22], §3, §4).

Je tiens à remercier vivement A. Bouaziz, L. Clozel et J.P. Labesse pour de fructueuses discussions durant l'élaboration de ce travail.

En particulier, A. Bouaziz m'a fourni une démonstration du lemme 2 et m'a

permis d'extraire de ses travaux la formule des caractères tordus dont j'avais besoin. Il m'a également permis de corriger des erreurs dans l'énoncé et la démonstration du théorème 2 dans une version antérieure de ce travail.

Je remercie le referee pour d'utiles remarques.

1. Caractères et caractères tordus. Généralités

1.1. Soit G un groupe de Lie réductif au sens de [3] ch. 0, §3, K un sous groupe compact maximal de G et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On notera $C_c^\infty(G, K)$ l'algèbre pour la convolution des fonctions C^∞ à support compact sur G et K-finies à droite et à gauche. On notera $\mathscr{H}(G, K)$ l'algèbre pour la convolution des distributions sur G, à support dans K et K-finies à droite et à gauche. Si V est un $(\mathfrak{g}, K)$-module (cf. [3] ch. 0, §2.6), $\mathscr{H}(G, K)$ opère sur V.

Supposons en outre que V soit admissible (cf. loc. cit) et de type fini. Alors on sait qu'il existe une représentation π de G dans un espace $\bar{V}$, muni d'une topologie d'espace vectoriel localement convexe séparé complet tel que V soit l'espace des vecteurs K-finis de cette représentation (cf. par exemple [3] ch. 4, §2). Alors l'opérateur $\pi(\varphi)$ pour $\varphi \in C_c^\infty(G, K)$ est défini et laisse stable V. D'où une action de $C_c^\infty(G, K)$. Montrons que cette action ne dépend pas de la complétion choisie. Cela résulte immédiatement du lemme suivant.

LEMME 1. *Soit $\bar{V}$ comme ci-dessus, $\bar{P}$ la projection de $\bar{V}$ sur une somme finie de composantes isotypiques sous K de π (parallèlement aux autres). Alors $\bar{P}$ a son image dans V et si $g \in G$, l'endomorphisme de V dans V défini par $v \in V \to \bar{P}\pi(g)v$ est indépendant de la complétion choisie.*

DEMONSTRATION. Soit $v \in V$. Un vecteur K-fini étant analytique et $\bar{P}$ étant continu, l'application $g \mapsto \bar{P}\pi(g)v$ est une fonction analytique sur G à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de V. Soit G_i une composante connexe de G et $k_i \in K \cap G_i$. Alors la restriction de $g \mapsto \bar{P}\pi(g)v$ à $G_i = G^0 k_i$ (où G^0 est la composante neutre de G) est déterminée par le développement de Taylor à l'origine de l'application $g \mapsto \bar{P}\pi(g)(\pi(k_i)v)$. Mais celui-ci ne dépend que de la structure de $(\mathfrak{g}, K)$ module de V.

1.2. Si V est un $(\mathfrak{g}, K)$ module admissible de type fini, on peut alors définir son caractère Θ_V (ou Θ_π si π dénote la représentation de $C_c^\infty(G, K)$ sur V) comme une forme linéaire sur $C_c^\infty(G, K)$ par $\Theta_\pi(\varphi) = \operatorname{tr} \pi(\varphi)$. En effet $\pi(\varphi)$ est une opérateur de rang fini dans V et l'on a alors une notion de trace. Bien sûr ce caractère a les propriétés usuelles des caractères par rapport aux suites exactes et ne dépend donc que du semi simplifié de V. On peut raisoner de même avec $\mathscr{H}(G, K)$.

1.3. Soit maintenant une involution σ de G laissant stable K. On peut alors former le produit semi-direct de $\{1, \sigma\}$ par G qu'on note de façon abrégée $\sigma \ltimes G$.

On définit de même $\sigma \ltimes K$. On a alors une notion de $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module. Un $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module V équivaut à la donnée d'un $(\mathfrak{g}, K)$-module V et d'un entrelacement de carré 1, $A(\sigma)$, entre V et V^σ où V^σ est le $(\mathfrak{g}, K)$-module déduit de V par composition avec σ. Alors on représente σ par $A(\sigma)$. Etant donné un $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module dont le $(\mathfrak{g}, K)$ module sous-jacent est admissible de type fini (on dira alors que le $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module est admissible de type fini), on peut définir son caractère tordu Θ_V^σ ou Θ_π^σ, forme linéaire sur $C_c^\infty(G, K)$, par:

$$\varphi \mapsto \operatorname{tr}(\pi(\varphi)A(\sigma))$$

En fait la donnée simultanée du caractère tordu de V et du caractère ordinaire de V regardé comme $(\mathfrak{g}, K)$-module recouvre la notion de caractère ordinaire du $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module V en introduisant l'isomorphisme

$$C_c^\infty(\sigma \ltimes G, \sigma \ltimes K) \simeq C_c^\infty(G, K) \oplus C_c^\infty(G, K)$$

défini en identifiant $\sigma \ltimes G$ à $\{1\} \times G \cup \{\sigma\} \times G$ et en restreignant les fonctions à ces deux sous ensembles. Toutefois il se peut que $\sigma \ltimes G$ ne soit pas réductif au sens de [3] ch. 0, §3 et par conséquent on doit être prudent par exemple dans l'application du théorème du sous-module. Le caractère tordu d'un $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module ne dépend que de son semi-simplifié.

1.4. Les $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-modules admissibles irréductibles se divisent en deux classes disjointes:

(a) *ceux pour lesquels le* $(\mathfrak{g}, K)$ *module sous-jacent* V *est irréductible.* Alors dans ce cas celui-ci vérifie $V \simeq V^\sigma$. Réciproquement si V est un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible vérifiant $V \simeq V^\sigma$, d'après le lemme de Schur, si A entrelace V et V^σ, A^2 est scalaire. On peut donc choisir A avec $A^2 = \mathrm{Id}_V$. Notons qu'il y a deux choix possibles pour un tel A qui conduisent à des $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-modules distincts (lorsque l'on représente σ par A) dont les caractères tordus sont opposés l'un de l'autre;

(b) *ceux pour lesquels le* $(\mathfrak{g}, K)$ *module sous-jacent* V *est réductible.* Alors nécessairement $V = V_1 \oplus V_1^\sigma$ comme $(\mathfrak{g}, K)$-module où V_1 est un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible tel que V_1 est non isomorphe à V_1^σ et σ est représenté dans cette décomposition par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_{V_1} \\ I_{V_1} & 0 \end{pmatrix}$ et échange V_1 et V_1^σ. Alors le caractère tordu d'un tel $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module est nul. Dans ce cas, à un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible on associe un seul $(g, \sigma \ltimes K)$-module irréductible (à équivalence près).

REMARQUE 1. On n'a pas démontré que les caractères tordus ou non des $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$ (resp. $(\mathfrak{g}, K)$)-modules admissibles de type fini se prolongent en des

distributions sur G. Dans le cas des caractères ordinaires ceci est bien connu. Dans le cas où G est le groupe des points complexes d'un groupe de Lie algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$ et σ l'action de l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, ceci est démontré dans [8] prop. 4.1 et la distribution obtenue est invariante par σ-conjugaison, i.e. par les transformations $x \mapsto gx\sigma(g^{-1})$ pour tout $g \in G$.

2. Classification des classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples d'une algèbre de Lie réelle réductive quasi déployée

2.1. Soit G un groupe de Lie algébrique réductif Zariski-connexe défini sur $\mathbb{R}$, $G(\mathbb{C})$ le groupe de ses points complexes et $G(\mathbb{R})$ le groupe de ses points réels. On suppose en outre G quasi déployé sur $\mathbb{R}$. L'élément non trivial du groupe de Galois de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ définit une involution de $G(\mathbb{C})$ que l'on notera σ. On choisit une involution de Cartan θ de $G(\mathbb{C})$ qui commute à σ. Sa restriction à $G(\mathbb{R})$ est également une involution de Cartan de $G(\mathbb{R})$. On notera K le groupe des points fixes de θ dans $G(\mathbb{C})$ et $K_{\mathbb{R}} = K \cap G(\mathbb{R})$.

Si L est un groupe de Lie réel on notera $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie et $U(\mathfrak{l})$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{l}$. En particulier $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$) désignera l'algèbre de Lie de $G(\mathbb{C})$ (resp. $G(\mathbb{R})$). On remarque que $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ possède une structure complexe et que $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{g}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$. On notera encore σ (resp. θ) la différentielle de σ (resp. θ).

Si P est un sous-groupe parabolique de $G(\mathbb{C})$ ou $G(\mathbb{R})$, on notera N_P son radical unipotent et $L_P = P \cap \theta(P)$. On désignera par A_P la composante neutre du sous-groupe du centre de L_P formé de ses éléments anti-invariants sous θ et M_P l'intersection des noyaux des homomorphismes de L_P dans $\mathbb{R}$. On a alors $P = M_P A_P N_P$ et on appellera cette décomposition la décomposition de Langlands de P (qui dépend en fait de θ).

Si E est un espace vectoriel réel (ou complexe) on notera E^* son dual *réel*.

On souhaite identifier $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{g}(\mathbb{C})^*$. Pour cela on se fixe une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$, B, $\mathrm{Ad}(G(\mathbb{C}))$-invariante, θ-invariante et telle que la forme quadratique $\|X\|^2 = -B(X, \theta X)$ soit définie positive. Alors B est non dégénérée et permet d'identifier $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ à $\mathfrak{g}(\mathbb{C})^*$. Cette identification entrelace l'action adjointe et l'action coadjointe de $G(\mathbb{C})$. D'autre part, si $\mathfrak{h}$ est une sous algèbre de Cartan θ-stable de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$, B restreinte à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée et permet d'identifier $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^*$. Cette identification entrelace les actions du groupe de Weyl de la paire $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \mathfrak{h})$.

Soit $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$. On notera $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ sa complexifiée qui est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. On notera $\mathfrak{t}$ (resp. $\mathfrak{a}$) la composante anisotrope ou compacte (resp. déployée) de $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Par définition $\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{h}(\mathbb{R}) \mid t \to \exp tX$ définit un sous-groupe à un paramètre compact de

$G(\mathbb{R})\}$. Par ailleurs $\mathfrak{a}$ est un supplémentaire de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ sur lequel les racines de $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ sont réelles et qui contient les éléments anti-invariants par θ du centre de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ ($\mathfrak{a}$ dépend du choix de θ). De façon similaire on définit la composante compacte $\tilde{\mathfrak{t}}$ (resp. déployée $\tilde{\mathfrak{a}}$) de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$.

REMARQUE 2. Si $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ est θ-stable, $\mathfrak{t}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{t}}$) est égal à l'ensemble des points fixes de θ de $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$) et $\mathfrak{a}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{a}}$) est égal à l'ensemble des éléments anti-invariants sous θ de $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$). D'autre part, si $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ est semi simple la définition de la composante déployée ne dépend que de $G(\mathbb{R})$ (resp. $G(\mathbb{C})$) et l'on a alors $\tilde{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{a}} = i\tilde{\mathfrak{t}} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{t}$. C'est aussi le cas si l'on a choisi θ antilinéaire sur le centre de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$, ce que nous supposerons dans la suite.

On notera $W(\mathbb{C})$ le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \mathfrak{h}(\mathbb{C}))$ et $W(\mathbb{C})^\sigma$ les éléments de $W(\mathbb{C})$ qui commutent à σ. Les racines de $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ nulles sur $\mathfrak{a}$ sont appelées racines imaginaires et le sous groupe de $W(\mathbb{C})$ engendré par les réflexions par rapport à celles-ci est noté $W(\mathbb{C})_{\mathrm{im}}$. On a $W(\mathbb{C})_{\mathrm{im}} \subset W(\mathbb{C})^\sigma$.

2.2. PROPOSITION 1. *Soit $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ et soit $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ sa complexifiée. Soit $X \in \mathfrak{h}(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $g_0 \in G(\mathbb{C})$ vérifiant* $\mathrm{Ad}\, g_0(X) = \sigma(X)$. *Alors:*

(i) *Il existe un élément semi-simple X_1 de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ et une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$, contenant X_1 et vérifiant:*

(a) *X_1 est $G(\mathbb{C})$-conjugué à X.*

(b) *Parmi les couples $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ vérifiant* (a), *$\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ est telle que la dimension de sa composante déployée est maximale. En particulier $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Cartan de type Iwasawa dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_1}$ (le centralisateur de X_1 dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$.*

(ii) *Si le couple $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ vérifie les conditions* (a) *et* (b) *ci-dessus, X_1 est régulier par rapport aux racines imaginaires de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_1}$ est quasi-déployé.*

(iii) *Si X_2 est un élément de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$, conjugué sous $G(\mathbb{C})$ à X, tel que $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_2}$ soit quasi-déployée et si $\mathfrak{h}_2(\mathbb{R})$ en est une sous algèbre de Cartan de type Iwasawa (par exemple si $(X_2, \mathfrak{h}_2(\mathbb{R}))$ est un autre couple vérifiant les conditions* (a), (b) *ci-dessus), alors le couple $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ est conjugué par $G(\mathbb{C})$ à $(X_2, \mathfrak{h}_2(\mathbb{R}))$. De plus $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{h}_2(\mathbb{R})$ sont conjugués sous $G(\mathbb{R})$. En particulier $(X_2, \mathfrak{h}_2(\mathbb{R}))$ vérifie* (i).

(iv) *La condition* (b) *de* (i) *est équivalente au fait que X_1 est régulier par rapport aux racines imaginaires de $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$.*

(v) *Soit $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ comme dans* (i). *Alors le couple $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{C}))$ est conjugué sous $G(\mathbb{C})$ à $(X, \mathfrak{h}(\mathbb{C}))$.*

2.3. Commençons la démonstration de la proposition 1 par un lemme dont la

démonstration nous a été fournie par A. Bouaziz. C'est une version infinitesimale d'un résultat de Steinberg [25].

LEMME 2. *Soit $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{C})$ et semi-simple qui est conjugué à $\sigma(X)$ par un élément de $G(\mathbb{C})$. Alors il existe $g \in G(\mathbb{C})$ tel que* $(\mathrm{Ad}\,g)(X) \in \mathfrak{g}(\mathbb{R})$.

DEMONSTRATION. Si X' est $G(\mathbb{C})$-conjugué à X comme dans l'énoncé, X' est également conjugué sous $G(\mathbb{C})$ à $\sigma(X')$. En effet, si g, $g' \in G(\mathbb{C})$ sont tels que $\mathrm{Ad}\,g(X) = \sigma(X)$ et $X' = \mathrm{Ad}\,g'(X)$, on a immédiatement $\sigma(X') = \mathrm{Ad}(\sigma(g')gg'^{-1})(X')$. On peut donc supposer que X est élément d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$, telle qu'elle soit la complexifiée d'une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$. Alors X et $\sigma(X)$ qui sont conjugués par un élément de $G(\mathbb{C})$ et qui sont dans $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ sont conjugués par un élément du groupe de Weyl $W(\mathbb{C})$ de $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \mathfrak{h}(\mathbb{C}))$. Soit Δ^+ un ensemble de racines positives du système de racines Δ de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$, correspondant à une sous-algèbre de Borel définie sur $\mathbb{R}$ (qui existe car $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ est quasi-déployée et $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ maximalement déployée). Soit

$$D = \{\alpha \in \Delta \mid \mathrm{Re}\,\alpha(X) > 0, \text{ ou } \mathrm{Re}\,\alpha(X) = 0 \\ \text{et } \mathrm{Im}\,\alpha(X) > 0, \text{ ou } \alpha(X) = 0 \text{ et } \alpha \in \Delta^+\}.$$

Il est clair que D est un ensemble de racines positives de Δ. Il existe donc $x \in W(\mathbb{C})$ tel que $x(D) = \Delta^+$. Alors, quitte à conjuguer X par un élément de $G(\mathbb{C})$ qui implémente x, on peut supposer que $D = \Delta^+$, c'est à dire:

$$\forall \alpha \in \Delta^+, \qquad \mathrm{Re}\,\alpha(X) > 0 \quad \text{ou } \mathrm{Re}\,\alpha(X) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,\alpha(X) \geqslant 0.$$

Montrons maintenant qu'il existe $w \in W(\mathbb{C})$ tel que:

$$w(X) = \sigma(X) \quad \text{et} \quad \sigma(w) = w^{-1}.$$

En effet, d'après les propriétés de X, on voit que $\Delta_X = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(X) = 0\}$ est un sous-système de racines de Δ engendré par les racines simples de Δ^+ qu'il contient. Notons $W(\mathbb{C})_X$ le stabilisateur de X dans $W(\mathbb{C})$ (qui est le sous-groupe de $W(\mathbb{C})$ engendré par les réflexions s_α, $\alpha \in \Delta_X$) et

$$W(\mathbb{C})_u = \{w \in W(\mathbb{C}) \mid (w^{-1}(-\Delta^+) \cap \Delta^+) \subset \Delta^+ - \Delta_X\}.$$

On sait (cf. e.g. [28], I.1.1.2.13) que tout élément w de $W(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique sous la forme d'un produit d'un élément de $W(\mathbb{C})_X$ par un élément de $W(\mathbb{C})_u$. Alors, si $w \in W(\mathbb{C})$ vérifie $w(X) = \sigma(X)$, $w^{-1} = w_s w_u$ avec $w_s \in W(\mathbb{C})_X$ et $w_u \in W(\mathbb{C})_u$. On a $w_u^{-1}(X) = \sigma(X)$. On peut donc supposer $w^{-1} \in W(\mathbb{C})_u$ et

$w(X) = \sigma(X)$. Montrons que sous ces conditions $\sigma(w) = w^{-1}$. A cette fin introduisons une action de σ sur Δ et $W(\mathbb{C})$.

Si $\alpha \in \Delta$, on notera $\alpha^\sigma = \overline{\alpha \circ \sigma}$ qui est élément de Δ comme on le vérifie aisément. On vérifie aussi que si s_α est la symétrie définie par α on a $\sigma \circ s_\alpha \circ \sigma = s_{\alpha^\sigma}$. Alors, si $x \in W(\mathbb{C})$, on a aussi $\sigma \circ x \circ \sigma \in W(\mathbb{C})$ et l'on notera $\sigma(x)$ cet élément de $W(\mathbb{C})$. Alors on vérifie facilement que:

$$\sigma(w)w(X) = X \quad \text{i.e. } wX = \sigma(w)^{-1}X$$

et que $\sigma(w) \in W_u$. Alors $\sigma(w)w \in W(\mathbb{C})_X$. On a donc $w^{-1} = y\sigma(w)$ avec $y \in W(\mathbb{C})_X$ et $\sigma(w) \in W(\mathbb{C})_u$. L'unicité de la décomposition de w sous la forme d'un produit d'éléments de $W(\mathbb{C})_X$ et $W(\mathbb{C})_u$ montre que $w^{-1} = \sigma(w)$, ce que l'on voulait démontrer.

Supposons maintenant qu'il existe $g \in G(\mathbb{C})$ tel que: $\forall Y \in \mathfrak{h}(\mathbb{C})$, $w(Y) = (\sigma \circ \operatorname{Ad} g \circ \sigma \circ \operatorname{Ad} g^{-1})(Y)$. Alors $\sigma(X) = w(X)$ implique

$$\sigma(X) = \sigma(\operatorname{Ad} g \circ \sigma \circ \operatorname{Ad} g^{-1})(X) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ad} g^{-1}(X) = \sigma(\operatorname{Ad} g^{-1}(X))$$

i.e.

$$\operatorname{Ad} g^{-1}(X) \in \mathfrak{g}(\mathbb{R}).$$

Il suffit donc pour achever la démonstration de prouver:

LEMME 3. *Avec les notations ci-dessus, soit $w \in W(\mathbb{C})$ tel que $\sigma(w) = w^{-1}$. Alors il existe $g \in G(\mathbb{C})$ tel que*

$$\forall Y \in \mathfrak{h}(\mathbb{C}). \qquad w(Y) = (\sigma \circ \operatorname{Ad} g \circ \sigma \circ \operatorname{Ad} g^{-1})(Y).$$

DEMONSTRATION. On définit la longueur des éléments de $W(\mathbb{C})$ relativement à Δ^+. On raisonne par récurrence sur la longueur de w. Si $l(w) = 0$, il suffit de prendre pour g l'élément neutre.

Soit maintenant $w \in W(\mathbb{C})$ tel que $\sigma(w) = w^{-1}$ et $l(w) \geqslant 1$. Alors il existe une racine simple α telle que $l(ws_\alpha) < l(w)$, ce qui équivaut à $w\alpha \in -\Delta^+$. Alors

$$\begin{aligned} w^{-1}\alpha^\sigma &= \alpha^\sigma \circ w = \alpha^\sigma \circ \sigma(w)^{-1} \\ &= (\alpha \circ \sigma \circ \sigma \circ w^{-1} \circ \sigma)^- \\ &= (\alpha \circ w^{-1} \circ \sigma)^- = (w\alpha)^\sigma. \end{aligned}$$

Alors, comme l'action de σ préserve Δ^+, on a

$$w^{-1}\alpha^\sigma \in -\Delta^+.$$

Distinguons deux cas:

(a) $w^{-1}\alpha^\sigma \neq -\alpha$; on a alors $s_\alpha(w^{-1}\alpha^\sigma) \in -\Delta^+$ puisque α simple implique que $s_\alpha(\Delta^+ - \{\alpha\}) \subset \Delta^+$. D'autre part, α^σ est simple. Alors $l(s_\alpha w^{-1} s_{\alpha^\sigma}) = l(s_\alpha w^{-1}) - 1 = l(w^{-1}) - 2$ et en passant aux inverses:

$$l(s_{\alpha^\sigma} w s_\alpha) = l(w) - 2.$$

Posons $y = s_{\alpha^\sigma} w s_\alpha$. On a immédiatement $\sigma(y) = y^{-1}$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à y. Soit $g \in G(\mathbb{C})$ tel que $\sigma \circ \mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}$ implémente y. Soit $g' \in G(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Ad}\, g$ implémente s_α. Alors $\mathrm{Ad}\, \sigma(g')$ implemente s_{α^σ} et un calcul immédiat montre que $\sigma \circ \mathrm{Ad}(g'g) \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}(g'g)^{-1}$ implémente $w(= s_{\alpha^\sigma} y s_\alpha)$. *c.q.f.d.*

(b) $w^{-1}\alpha^\sigma = -\alpha$. Dans ce cas on pose $x = w s_\alpha$. On a alors $l(x) = l(w) - 1$. On vérifie immédiatement que $x^{-1}\alpha^\sigma = \alpha$ et $\sigma(x) = x^{-1}$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à x et soit $g \in G(\mathbb{C})$ tel que $\sigma \circ \mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}$ implémente x.

Si $\beta \in \Delta$, on note $\mathfrak{g}(\mathbb{C})^\beta$ le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ correspondant. Soit $\mathfrak{s}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ engendrée par $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. C'est une algèbre isomorphe à $\mathfrak{s}(2, \mathbb{C})$. De plus, $\mathfrak{s}$ est laissée stable par $\mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}$ comme le montre un calcul immédiat. On note φ la restriction de $\mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}$ à $\mathfrak{s} + \mathfrak{h}(\mathbb{C})$. Il est clair que $\varphi^2 = \mathrm{Id}$, que φ est antilinéaire et que $\alpha^\varphi = \overline{\alpha \circ \varphi}$ est égal à α. Sur $\mathfrak{s}$ φ est la conjugaison par rapport à une forme réelle de $\mathfrak{s}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Cartan déployée de cette forme réelle.

Montrons qu'il existe g' dans le sous-groupe analytique S de $G(\mathbb{C})$ d'algèbre de lie $\mathfrak{s}$ tel que s_α soit implémenté par $\varphi \circ \mathrm{Ad}\, g' \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}\, g'^{-1}$. Remarquons d'abord que si $Y \in \mathrm{Ker}\, \alpha$ et $g' \in S$ on a $\mathrm{Ad}\, g'(Y) = Y$. Donc, si $Y \in \mathrm{Ker}\, \alpha$,

$$s_\alpha(Y) = (\varphi \circ \mathrm{Ad}\, g' \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}\, g'^{-1})(Y).$$

Maintenant, si A est la matrice

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix},$$

on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \bar{A}^{-1} A \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} A^{-1} \bar{A} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{bmatrix}.$$

D'où l'on déduit par transport de structure qu'il existe $g' \in S$ tel que $\varphi \circ \mathrm{Ad}\, g' \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}\, g'^{-1}$ implémente s_α restreinte à $\mathfrak{h}(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{s}$. D'après ce que l'on a vu plus haut on a

$$\forall Y \in \mathfrak{h}(\mathbb{C}), \quad (\varphi \circ \mathrm{Ad}\, g' \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}\, g'^{-1})(Y) = s_\alpha(Y).$$

Alors:

$$\begin{aligned}
&\forall Y \in \mathfrak{h}(\mathbb{C}), \qquad w(Y) = (xs_\alpha)(Y) \\
&= (\sigma \circ \mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}) \circ (\mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}) \circ \mathrm{Ad}\, g' \circ (\mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}) \circ \mathrm{Ad}\, g'^{-1} \\
&= \sigma \circ \mathrm{Ad}(g'g) \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}(g'g)^{-1}
\end{aligned}$$

et ceci achève la démonstration du lemme 3.

2.4. Le lemme 2 achève la démonstration du point (i) de la proposition 1. Montrons (ii). Soit $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ vérifiant (a) et (b). Supposons qu'il existe une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ vérifiant $\alpha(X_1) = 0$. Alors la transformation de Cayley définie par α permet de construire une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}'_1(\mathbb{R})$ contenant X_1 et dont la composante compacte est de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ (cf. par exemple [26] th. 5.3.1). Ceci contredit le fait que $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ satisfait (b). Donc X_1 est régulier par rapport aux racines imaginaires non compactes de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$.

Supposons maintenant qu'il existe une racine imaginaire telle que $\alpha(X_1) = 0$. Alors d'après [24] th. 2.2.4(ii), il existe un élément w du groupe de Weyl imaginaire, $W(\mathbb{C})_{\mathrm{im}}$, tel que $w\alpha$ soit imaginaire non compacte, car G est quasi-déployé sur $\mathbb{R}$. L'inclusion de $W(\mathbb{C})_{\mathrm{im}}$ dans $W(\mathbb{C})^\sigma$ implique $w(\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})) = \mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ et l'on a $(wX_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ qui vérifie les conditions (a) et (b) de (i). Or $w\alpha(wX_1) = \alpha(X_1) = 0$ où $w\alpha$ est imaginaire non compacte. Une contradiction avec ce que l'on a vu plus haut et qui achève de prouver que X_1 est régulier par rapport aux racines imaginaires de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$. Alors $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ n'a pas de racines imaginaires dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_1}$. De plus la condition (b) montre que $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Cartan de type Iwasawa de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_1}$. Ces deux faits montrent que $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_1}$ est quasi déployée et (ii) est prouvé.

Montrons (iii). Soit $(X_2, \mathfrak{h}_2(\mathbb{R}))$ comme dans (iii). En utilisant le fait que deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ sont conjuguées par un élément de $G(\mathbb{C})$, et que deux éléments d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ conjugués par un élément de $G(\mathbb{C})$ le sont par un élément de $G(\mathbb{C})$ qui normalise cette sous-algèbre de Cartan, on conclut aisément qu'il existe $g \in G(\mathbb{C})$ tel que $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) = (\mathrm{Ad}\, g(X_2), \mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h}_2(\mathbb{C})))$. Notant $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_i}$, $\mathfrak{g}_i(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}(\mathbb{C})^{X_i}$ pour $i = 1, 2$, la complexifiée de $\mathfrak{g}_i$ est égale à $\mathfrak{g}_i(\mathbb{C})$ car $X_i \in \mathfrak{g}(\mathbb{R})$. En outre $\mathrm{Ad}\, g(X_2) = X_1$ implique $\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})) = \mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$. Notons $\mathfrak{g}'_1 = \mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{g}_2)$ et $\mathfrak{h}'_1(\mathbb{R}) = \mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h}_2(\mathbb{R}))$. $\mathfrak{g}'_1$ est également une forme réelle de $\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$. Notons σ_1 (resp. σ_2, σ'_1) la conjugaison de $\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$) par rapport à $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}'_1$). Clairement σ_1 (resp. σ_2) est la restriction de σ à $\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$). Par ailleurs σ'_1 s'obtient par transport de structure, i.e.:

$$\sigma'_1 = \mathrm{Ad}\, g_{|\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})} \circ \sigma_2 \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}{}_{|\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})}$$

soit encore

$$\sigma'_1 = \mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}{}_{|\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})}$$

Alors $\sigma_1\sigma'_1 = \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}{}_{|\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})}$. D'où $\sigma_1\sigma'_1 = \mathrm{Ad}\, g^\sigma g^{-1}{}_{|\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})}$. Mais $g^\sigma g^{-1}$ est dans le stabilisateur dans $G(\mathbb{G})$ de X_1. En effet

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g^\sigma g^{-1})(X_1) &= \mathrm{Ad}(g^\sigma)(X_2) = (\sigma \circ \mathrm{Ad}\, g \circ \sigma)(X_2)\\ &= \sigma((\mathrm{Ad}\, g)(X_2)) = \sigma(X_1) = X_1\end{aligned}$$

De façon similaire on voit que

$$\mathrm{Ad}(g^\sigma g^{-1})(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) = (\mathfrak{h}_1(\mathbb{C}))$$

Notons $m = g^\sigma g^{-1}$. On a $\mathrm{Ad}\, m$ qui stabilise X_1. Comme $G(\mathbb{C})$ est complexe et connexe et X_1 semi-simple, m est élément du sous-groupe analytique de $G(\mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\mathbb{C})^{X_1}$ qui est aussi égal au stabilisateur dans $G(\mathbb{C})$ de X_1, que l'on notera $G_1(\mathbb{C})$. On notera G_1 (resp. G'_1) les sous-groupes analytiques de $G_1(\mathbb{C})$ d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}'_1$). Alors G_1 et G'_1 sont quasi déployés. Pour G_1 cela résulte de (ii) et pour G'_1 cela se déduit de l'hypothèse sur $\mathfrak{g}_2$ par transport de structure.

L'égalité $\sigma_1\sigma'_1 = \mathrm{Ad}\, m$ avec $m \in G_1(\mathbb{C})$ montre que $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}'_1$ ont la même intersection avec le centre de $\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$. En passant au quotient par celui-ci on peut raisonner comme si $\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$ était semi-simple ainsi que $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}'_1$, $G_1(\mathbb{C})$, ce que nous ferons dans la suite. On a alors une bonne notion de composante compacte et composante déployée pour les sous-algèbres de Cartan (cf. la remarque 2 du paragraphe 2.1).

$\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{h}'_1(\mathbb{R})$) étant une sous-algèbre de Cartan de type Iwasawa de $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}'_1$) on construit facilement une involution de Cartan θ_1 de $\mathfrak{g}_1$ (resp. θ'_1 de $\mathfrak{g}'_1$) pour laquelle $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{h}'_1(\mathbb{R})$) est stable.

Notons $\mathfrak{t}_1$ (resp. $\mathfrak{t}'_1$) la composante compacte de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{h}'_1(\mathbb{R})$) et $\mathfrak{a}_1$ (resp. $\mathfrak{a}'_1$) sa composante déployée. Alors, à l'aide de la remarque 2, §2.1, on voit que $\mathfrak{t}_1 \oplus i\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{t}'_1 \oplus i\mathfrak{a}'_1$ coincident avec la composante compacte de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$, $\tilde{\mathfrak{t}}_1$ (relativement à $G_1(\mathbb{C})$ ou $G(\mathbb{C})$) et $i\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$, $i\mathfrak{t}'_1 \oplus \mathfrak{a}'_1$ coincident avec sa composante déployée $\tilde{\mathfrak{a}}_1$. Notons encore θ_1 et θ'_1 les prolongements $\mathbb{C}$-linéaires de θ_1 et θ'_1 à $\mathfrak{g}_1(\mathbb{C})$. Alors on a

$$\theta_{1|\tilde{\mathfrak{a}}_1} = -\sigma_{1|\tilde{\mathfrak{a}}_1}, \qquad \theta'_{1|\tilde{\mathfrak{a}}_1} = -\sigma'_{1|\tilde{\mathfrak{a}}_1}. \tag{*}$$

Or $\sigma_1\sigma'_1 = \mathrm{Ad}\ m$, où $m \in G_1(\mathbb{C})$ vérifie $\mathrm{Ad}\ m(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) = \mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$. Alors $\mathrm{Ad}\, m$ normalise $\tilde{\mathfrak{a}}_1$ et l'on a

$$\sigma'_{1|\tilde{\mathfrak{a}}_1} = \sigma_{1|\tilde{\mathfrak{a}}_1} \circ \mathrm{Ad}\, m_{|\tilde{\mathfrak{a}}_1}.$$

D'où, grâce aux égalités (*) ci-dessus:

$$\theta'_{1|\tilde{\mathfrak{a}}_1} = \theta_{1|\tilde{\mathfrak{a}}_1} \circ \operatorname{Ad} m_{|\tilde{\mathfrak{a}}_1}.$$

Par $\mathbb{C}$-linéarité de θ_1, θ'_1 et $\operatorname{Ad} m$ on déduit

$$\theta'_{1|\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})} = \theta_1 \circ \operatorname{Ad} m_{|\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})}. \tag{**}$$

Notons w l'élément du groupe de Weyl $W_1(\mathbb{C})$ de la paire $(\mathfrak{g}_1(\mathbb{C}), \mathfrak{h}_1(\mathbb{C}))$, induit par $\operatorname{Ad} m$. Par abus de notation on note encore θ_1 et θ'_1 les restrictions de θ_1 et θ'_1 à $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$. Comme $\mathfrak{g}_1(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}'_1(\mathbb{R})$ sont quasi-déployés, il existe des ensembles de racines positives Σ et Σ' du système de racines Δ_1 de $(\mathfrak{g}_1(\mathbb{C}), \mathfrak{h}_1(\mathbb{C}))$ tels que:

$$(-\theta_1)(\Sigma) = \Sigma, \qquad (-\theta'_1)(\Sigma') = \Sigma'.$$

Soit $w_1 \in W_1(\mathbb{C})$ tel que $w_1(\Sigma') = \Sigma$. Comme θ_1 conserve l'ensemble des racines pour tout $u \in W_1(\mathbb{C})$, on a $u^{\theta_1} \in W_1(\mathbb{C})$ où $u^{\theta_1} = \theta_1 \circ u \circ \theta_1$. On va montrer que $\theta'_1 = w_1^{-1} \circ \theta_1 \circ w_1$ et $w = (w^{-1})^{\theta_1} w_1$. Notons $\theta''_1 = w_1^{-1} \circ \theta_1 \circ w_1$. C'est une involution de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$ qui vérifie vérifie $(-\theta''_1)(\Sigma') = \Sigma'$. Alors on déduit des définitions et de (**) que

$$\theta''_1\theta'_1 = w_1^{-1} \circ \theta_1 \circ w_1 \circ \theta_1 \circ w$$

$$\theta''_1\theta'_1 = w_1^{-1} w_1^{\theta_1} w \in W_1(\mathbb{C}).$$

De plus $\theta''_1\theta'_1(\Sigma') = \Sigma'$, d'où l'égalité:

$$1 = w_1^{-1} w_1^{\theta_1} w = \theta''_1\theta'_1$$

soit encore:

$$w = (w_1^{-1})^{\theta_1} w_1 \quad \text{et} \quad \theta'_1 = w_1^{-1} \circ \theta_1 \circ w_1 \tag{***}$$

comme annoncé.

Soit m' un élément de $G_1(\mathbb{C})$ qui normalise $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$ et qui implémente l'action de w_1 sur $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$. On a d'abord $\operatorname{Ad} m'(\tilde{\mathfrak{a}}_1) = \tilde{\mathfrak{a}}_1$. Puis (***) implique que $\operatorname{Ad} m'$ envoie le sous-espace propre de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$ pour la valeur propre 1 (resp. -1) de θ'_1 sur le sous-espace propre de θ_1 pour la même valeur propre. En rassemblant ces résultats on a:

$$\operatorname{Ad} m'(\mathfrak{t}'_1 \oplus i\mathfrak{t}'_1) = \mathfrak{t}_1 \oplus i\mathfrak{t}_1$$

$$\operatorname{Ad} m'(\mathfrak{a}'_1 \oplus i\mathfrak{a}'_1) = \mathfrak{a}_1 \oplus i\mathfrak{a}_1$$

$$\operatorname{Ad} m'(i\mathfrak{t}'_1 \oplus \mathfrak{a}'_1) = i\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$$

D'où l'on déduit:

$$\mathrm{Ad}\, m'(\mathfrak{t}_1') = \mathfrak{t}_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ad}\, m'\ \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1.$$

Donc $\mathrm{Ad}\, m'(\mathfrak{h}_1'(\mathbb{R})) = \mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ et comme $m \in G_1(\mathbb{C})$ on a $\mathrm{Ad}\, m' X_1 = X_1$. Alors $\mathrm{Ad}(m'g)(\mathfrak{h}_2(\mathbb{R})) = \mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ad}(m'g)(X_2) = X_1$.

Ce qui prouve que les paires $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$, $(X_2, \mathfrak{h}_2(\mathbb{R}))$ sont conjuguées par un élément de $G(\mathbb{C})$.

Pour achever de prouver (iii), il suffit d'utiliser le fait que deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ qui sont conjuguées par $G(\mathbb{C})$ le sont par $G(\mathbb{R})$ ([21], cor. 2.4).

Prouvons (iv). Soit $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ satisfaisant la condition (a) de (i) et tel que $X_1 \in \mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ soit régulier par rapport aux racines imaginaires de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$. Alors $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ est une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_1}$ sans racines imaginaires. Donc $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_1}$ est quasi-déployée et $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Cartan de type Iwasawa de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^{X_1}$. Alors on en déduit grâce à (iii) que $(X_1, \mathfrak{h}_1\mathbb{R})$ satisfait les conditions (a), (b) de (i). L'implication dans l'autre sens résulte de (ii). Donc (iv) est prouvé.

Prouvons (v). Soit $(X_1, \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}))$ comme dans (i) et $g \in G(\mathbb{C})$ tel que $(\mathrm{Ad}\, g)(X) = X_1$. Soit $g' \in G(\mathbb{C})$ tel que $(\mathrm{Ad}\, g')(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) = \mathfrak{h}(\mathbb{C})$. Alors $X' = (\mathrm{Ad}(g'g))(X)$ est dans $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ et conjugué sous $G(\mathbb{C})$ à X donc conjugué par un élément g'' de $G(\mathbb{C})$ qui normalise $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$, i.e. $\mathrm{Ad}\, g''(X') = X$ et $\mathrm{Ad}\, g''(\mathfrak{h}(\mathbb{C})) = (\mathfrak{h}(\mathbb{C}))$. Alors $\mathrm{Ad}(g''g')(X_1) = X$ et $\mathrm{Ad}(g''g')(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) = \mathfrak{h}(\mathbb{C})$ et la proposition est démontrée.

2.5. COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 1. Soit $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ et $X, X' \in \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ réguliers par rapport aux racines imaginaires. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) X et X' sont conjugués par un élément de $G(\mathbb{C})$.
(ii) X et X' sont conjugués par un élément w du groupe de Weyl, $W(\mathbb{C})$, de $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \mathfrak{h}(\mathbb{C}))$ qui laisse stable $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qui commute à la conjugaison σ par rapport à $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$.

DEMONSTRATION. Il suffit de prouver que (i) implique (ii). Mais d'après la proposition 1(iii), $(X, \mathfrak{h}(\mathbb{R}))$ et $(X', \mathfrak{h}(\mathbb{R}))$ sont conjugués par un élément de $G(\mathbb{C})$ dès que X et X' le sont et l'implication voulue en résulte.

3. Classification des représentations tempérées irréductibles et σ-stables de $G(\mathbb{C})$

3.1. Nous rappelons ici des résultats bien connus sur les représentations tempérées de $G(\mathbb{C})$ (cf. [16]).

Soit H un sous-groupe de Cartan de $G(\mathbb{C})$ et B un sous-groupe de Borel de $G(\mathbb{C})$ ayant H comme sous-groupe de Levi. Notons N le radical unipotent de B. Si χ est un caractère unitaire de H, l'induite unitaire de B à $G(\mathbb{C})$ de la

représentation $\chi \otimes 1_N$ de $B = HN$ est unitaire irréductible et tempérée. En outre sa classe d'équivalence ne dépend pas de B mais de χ. On la notera π_χ.

Soit H' un autre sous-groupe de Cartan et χ' un caractère unitaire de H'. Alors π_χ est équivalente à $\pi_{\chi'}$ si et seulement si (H, χ) et (H', χ') sont conjugués sous $G(\mathbb{C})$. Toute représentation tempérée irréductible est de la forme π_χ pour un $\chi \in \hat{H}$.

On choisit maintenant une sous-algèbre de Cartan θ-stable $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$. Soient $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ sa complexifiée et $H(\mathbb{C})$ le sous-groupe de Cartan de $G(\mathbb{C})$ correspondant. Clairement $H(\mathbb{C})$ est σ-stable, donc σ agit sur le dual unitaire de $H(\mathbb{C})$, $\widehat{H(\mathbb{C})}$. On note $\chi \mapsto \chi^\sigma$ cette action. De façon analogue, si π est une représentation de $G(\mathbb{C})$ on notera π^σ pour $\pi \circ \sigma$. Si $\chi \in \widehat{H(\mathbb{C})}$ on a $(\pi_\chi)^\sigma \simeq \pi_{\chi^\sigma}$.

3.2. On se fixe des représentants des classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ sous $G(\mathbb{R})$ (ou $G(\mathbb{C})$ puisque cela revient au même d'après [21], cor. 2.4) que l'on choisit θ-stables, $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R}), \ldots, \mathfrak{h}_s(\mathbb{R})$.

Pour $j \in \{1, \ldots, s\}$ on note $\mathfrak{a}_j$ (resp. $\mathfrak{t}_j$) la composante déployée (resp. compacte) de $\mathfrak{h}_j(\mathbb{R})$. On note $\mathfrak{h}_j(\mathbb{C})$ la complexifiée de $\mathfrak{h}_j(\mathbb{R})$, et $\tilde{\mathfrak{a}}_j$ (resp. $\tilde{\mathfrak{t}}_j$) la composante déployée (resp. compacte) de $\mathfrak{h}_j(\mathbb{C})$ et $H_j(\mathbb{C})$, $\tilde{T}_j$, $\tilde{A}_j$ les sous-groupes analytiques de $G(\mathbb{C})$ correspondants. On a $\tilde{\mathfrak{t}}_j = \mathfrak{t}_j \oplus i\mathfrak{a}_j$ et $\tilde{\mathfrak{a}}_j = \mathfrak{a}_j \oplus i\mathfrak{t}_j$ (cf. Remarque du §2.1) et des décompositions correspondantes de leurs duaux réels. On a $H_j(\mathbb{C}) = \tilde{T}_j \tilde{A}_j$ et $\widehat{H_j(\mathbb{C})}$ s'identifie à $\hat{\tilde{T}}_j \times \hat{\tilde{A}}_j$. Comme $\tilde{A}_j$ est un groupe vectoriel, $\hat{\tilde{A}}_j$ s'identifie à $i(\tilde{\mathfrak{a}}_j)^*$. Si $\mu \in \hat{\tilde{T}}_j$ et $\lambda \in i\tilde{\mathfrak{a}}_j^*$ on note (μ, λ) l'élément de $\widehat{H_j(\mathbb{C})}$ correspondent et $\pi_{\mu,\lambda}$ la représentation tempérée de $G(\mathbb{C})$ associée.

PROPOSITION 2. (i) *Toute représentation tempérée irréductible σ-stable de $G(\mathbb{C})$ est équivalente à une représentation $\pi_{\mu,\lambda}$ où $\mu \in \hat{\tilde{T}}_j$, $\lambda \in i\tilde{\mathfrak{a}}_j^*$ satisfont:*

(a) *la différentielle de μ est nulle sur $i\mathfrak{a}_j \subset \tilde{\mathfrak{t}}_j$ et s'identifie donc à un élément de $i\mathfrak{t}_j^*$,*

(b) *cet élément de $i\mathfrak{t}_j^*$ est régulier par rapport aux racines imaginaires de $\mathfrak{h}_j(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$,*

(c) *λ est nulle sur $i\mathfrak{t}_j$, c'est à dire est un élément de $i\mathfrak{a}_j^*$.*

(ii) *Réciproquement toute représentation $\pi_{\mu,\lambda}$ où $(\mu, \lambda) \in \hat{\tilde{T}}_j \times i\tilde{\mathfrak{a}}_j^*$ satisfait* (a), (b), (c) *est σ-stable.*

(iii) *Si $(\mu, \lambda) \in \hat{\tilde{T}}_j \times i\tilde{\mathfrak{a}}_j^*$, $(\mu', \lambda') \in \hat{\tilde{T}}_{j'} \times i\tilde{\mathfrak{a}}_{j'}^*$ satisfont* (a), (b), (c) *et que $\pi_{\mu,\lambda} \simeq \pi_{\mu',\lambda'}$, on a nécessairement $j = j'$. De plus, il existe un élément du groupe de Weyl de $\mathfrak{h}_j(\mathbb{C})$ qui commute à l'action de σ et qui conjugue (μ, λ) et (μ', λ').*

Dans la suite on notera $(\hat{\tilde{T}}_j)^\sigma_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments de $\hat{\tilde{T}}_j$ vérifiant (a) *et* (b).

DEMONSTRATION. (i) Soit π tempérée irréductible σ-stable. Soit $H(\mathbb{C})$ comme en 3.1. Alors on a $\pi \simeq \pi_\chi$ pour un $\chi \in \widehat{H(\mathbb{C})}$ et $\pi_\chi \simeq \pi_\chi^\sigma$. Notons if la différentielle de χ avec $f \in \mathfrak{h}(\mathbb{C})^*$ et X l'élément de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ correspondant à f dans l'identification de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{h}(\mathbb{C})^*$ décrite au §2.1. Alors X vérifie les hypothèses de la proposition 1. On en déduit l'existence d'un couple $(X', \mathfrak{h}'(\mathbb{R}))$ vérifiant les

conditions (a), (b) de cette proposition et l'existence d'un $g \in G(\mathbb{C})$ qui conjugue $(X, \mathfrak{h}(\mathbb{C}))$ et $(X', \mathfrak{h}'(\mathbb{C}))$. Quitte à conjuguer encore par un élément de $G(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\mathfrak{h}'(\mathbb{R})$ est égal à l'un des $\mathfrak{h}_j(\mathbb{R})$. Alors, par transport de structure, X' correspond à un élément f' de $\mathfrak{h}_j(\mathbb{C})^*$ (dans l'identification de $\mathfrak{h}_j(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{h}_j(\mathbb{C})^*$ décrite au §2.1) telle que if' soit la différentielle d'un caractère χ' de $H_j(\mathbb{C})$. De plus $(\chi, H(\mathbb{C}))$ et $(\chi', H_j(\mathbb{C}))$ sont conjugués sous $G(\mathbb{C})$. D'où l'équivalence de π_χ et $\pi_{\chi'}$. Mais des propriétés de $(X', \mathfrak{h}_j(\mathbb{R}))$ il résulte facilement que χ' s'écrit sous la forme (μ, λ) où μ et λ satisfont les conditions (a), (b) et (c) désirées.

(ii) Clairement, si $\chi = (\mu, \lambda) \in \widehat{H_j(\mathbb{C})}$ où μ et λ satisfont les conditions (a), (b), (c) de (i), on a $\chi^\sigma = \chi$. Donc $\pi_{\mu,\lambda}$ est σ-stable.

(iii) Soit (μ, λ) et (μ', λ') comme dans l'énoncé. Notons if (resp. if') la différentielle de (μ, λ) (resp. (μ', λ')) avec f (resp. $f') \in \mathfrak{h}_j(\mathbb{C})^*$ (resp. $\mathfrak{h}_{j'}(\mathbb{C})^*$) et X (resp. X') l'élément correspondant de $\mathfrak{h}_j(\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{h}_{j'}(\mathbb{C})$). En fait on a $X \in \mathfrak{h}_j(\mathbb{R})$ et $X' \in \mathfrak{h}_{j'}(\mathbb{R})$, grâce aux hypothèses sur (μ, λ). L'équivalence de $\pi_{\mu,\lambda}$ et $\pi_{\mu',\lambda'}$ implique que les paires $(\chi, H_j(\mathbb{C}))$ et $(\chi', H_j(\mathbb{C}))$ sont $G(\mathbb{C})$-conjuguées. Il en est donc de même de X et X'. Appliquons la proposition 1 à X et X'. Grâce au point (iv) de cette proposition, nos hypothèses impliquent que les couples $(X, \mathfrak{h}_j(\mathbb{R}))$ et $(X', \mathfrak{h}_{j'}(\mathbb{R}))$ vérifient les conditions (a) et (b) du point (i) de cette proposition. D'où, d'après la proposition 1(iii), on a $\mathfrak{h}_j(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{h}_{j'}(\mathbb{R})$ qui sont $G(\mathbb{R})$-conjuguées. D'où $j = j'$. Mais alors, d'après le corollaire 1 de la proposition 1, X et X' sont conjugués par un élément du groupe de Weyl qui commute à la conjugaison réelle. En traduisant au niveau de (μ, λ) et (μ', λ') on obtient le résultat désiré.

4. Représentations admissibles σ-stables de $G(\mathbb{C})$

4.1. Rappelons la classification de Langlands pour les modules de Harish Chandra de $G(\mathbb{C})$ (cf. [16] par exemple). Soit B un sous-groupe de Borel de $G(\mathbb{C})$, $B = \tilde{T}\tilde{A}N$ sa décomposition de Langlands (cf. 2.1). Soit V un module de Harish Chandra admissible irréductible de $G(\mathbb{C})$. Alors il existe P parabolique de $G(\mathbb{C})$ contenant B, de décomposition de Langlands $P = M_P A_P N_P$, ω une représentation tempérée irréductible de M_P, $v \in (\mathfrak{a}_P^*)_\mathbb{C}$ avec $(\operatorname{Re} v, \alpha) > 0$ pour tout α racine de $\mathfrak{a}_P$ dans N_P tels que π soit l'unique quotient simple de $I_{P,\omega,v} = \operatorname{Ind}_{P\uparrow G(\mathbb{C})}\omega \otimes e^v \otimes 1_{N_P}$ (vecteurs K finis de l'induite C^∞) que l'on note $J_{P,\omega,v}$. De plus le triplet (P, ω, v) vérifiant les conditions ci-dessus est unique.

4.2. Supposons maintenant en outre que B soit σ-stable (un tel B existe puisque G est quasi déployé sur $\mathbb{R}$). Alors il résulte de ce qui précède:

PROPOSITION 3. *Si V est un module irréductible σ-stable, il existe un unique triplet (P, ω, v) comme ci-dessus, tel que $V \approx J_{P,\omega,v}$. De plus, P, M_P, A_P, N_P sont σ-stables ainsi que ω et v.*

Il est aisé de voir que $I_{P,\omega,v}$ avec (P, ω, v) comme ci-dessus vérifie

$I_{P,\omega,\nu} \approx I_{P,\omega,\nu} \circ \sigma$. Par ailleurs, $I_{P,\omega,\nu}$ possèdant un unique quotient simple, il existe, au signe près, un seul opérateur $A(\sigma)$ de carré 1 réalisant cette équivalence. Choisissons l'un d'eux (on reviendra plus loin sur ce choix) et notons $\Theta^{\sigma}_{\omega,\nu}$ le caractère tordu correspondant du $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module défini à l'aide de $A(\sigma)$. On omet P dans la notation car $\omega \in \hat{M}_P$ et $\nu \in (\mathfrak{a}^*_P)_{\mathbb{C}}$ déterminent le Levi de P et la condition sur Re ν détermine N_P. Par passage au quotient on a une structure de $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module sur $J_{P,\omega,\nu}$ et on note $\bar{\Theta}^{\sigma}_{\omega,\nu}$ son caractère tordu. Alors, par un procédé de récurrence standard sur la longueur du K-type minimal de $J_{P,\omega,\nu}$ et en regardant la suite de composition du $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module $I_{P,\omega,\nu}$ on a facilement:

PROPOSITION 4. *Avec (P, ω, ν) comme ci-dessus la différence $\bar{\Theta}_{\omega,\nu} - \Theta_{\omega,\nu}$ peut s'écrire sous la forme $\Sigma_i n_i \Theta^{\sigma}_{\omega_i,\nu_i}$ où les (ω_i, ν_i) vérifient des conditions similaires à celles satisfaites par (ω, ν). En outre, pour tout i le K-type minimal des I_{P_i,ω_i,ν_i} est de longueur strictement plus grande que celle du K-type minimal de $I_{P,\omega,\nu}$ et les n_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$.*

5. Représentations σ-stables et caractères tordus standards

5.1. Soit $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \mathfrak{h}_j(\mathbb{R})$ l'une des sous-algèbres de Cartan définies ci-dessus. Pour alléger les notations on omettra l'indice j. On se fixe un ordre sur $\mathfrak{a}^*$ et $(i\mathfrak{t})^*$ et on définit un ensemble de raciness positives Δ^+ pour le système de racines Δ de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ par $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha_{|\mathfrak{a}} > 0$ ou bien $\alpha_{|\mathfrak{a}} = 0$ et $\alpha_{|i\mathfrak{t}} > 0$. On en déduit un ordre sur le système des racines imaginaires noté Δ_{im} de $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$. On note w_0 l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl W_{im} de Δ_{im} (relativement à $\Delta^+_{\text{im}} = \Delta^+ \cap \Delta_{\text{im}}$). Noter que W_{im} agit trivialement sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$ et laisse stable $\mathfrak{t}$.

On considère le sous-groupe de Borel B dont l'algèbre de Lie est égale à $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$ et les $\mathfrak{g}^{\alpha}$ sont les sous-espaces de poids $\alpha \in \Delta^+$ sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. La décomposition de Langlands de B s'écrit alors $B = H(\mathbb{C})N$ où N est le sous-groupe analytique de $G(\mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$.

Notons $(\hat{\tilde{T}})^{\sigma}$ l'ensemble des caractères unitaires de $\tilde{T}$ σ-invariants. Si μ est un caractère unitaire de $\tilde{T}$, on a $\mu \in (\hat{\tilde{T}})^{\sigma}$ si et seulement si la différentielle de μ est nulle sur $i\mathfrak{a}$.

Soit $\lambda \in (\mathfrak{a}^*)_{\mathbb{C}}$ qu'on regarde comme une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathbb{C}$. Grâce à la décomposition $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{t}$, λ s'identifie à un élément de $(\tilde{\mathfrak{a}})^*_{\mathbb{C}}$ nul sur $i\mathfrak{t}$. Alors il existe un caractère, non nécessairement unitaire, de $H(\mathbb{C})$ dont la restriction à $\tilde{T}$ coincide avec μ et dont la différentielle restreinte à $\tilde{\mathfrak{a}}$ coincide avec λ, qu'on note (comme dans le cas où λ est imaginaire pure) $\chi = (\mu, \lambda)$. On note $\pi_{\mu,\lambda}$ la représentation $\text{Ind}_{B \uparrow G(\mathbb{C})} \chi \otimes 1_N$. On désignera par $I_{\mu,\lambda}$ le $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-module correspondant (qui est unitaire et même tempéré si λ est imaginaire pur). En utilisant la réalisation compacte des séries principales, on peut réaliser le $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-module $I_{\mu,\lambda}$ dans l'espace I_{μ} des vecteurs K-finis de $\text{Ind}_{\tilde{T} \uparrow K} \mu$.

On notera $\rho = \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\in\Delta^+}\alpha_{|\tilde{\mathfrak{a}}}$. C'est la différentielle d'un caractère de $\tilde{A}$ qu'on notera $a \to a^\rho$. On emploie une notation similaire pour λ. Alors on a:

$$I_{\mu,\lambda} = \{\varphi: G(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ est } C^\infty, K\text{-finie à gauche et vérifie } \varphi(g\,\mathrm{tan}) = t^{-\mu}a^{-2\rho-\lambda}\varphi(g), \text{ pour tout } g\in G(\mathbb{C}),\ t\in\tilde{T},\ a\in\tilde{A},\ n\in N\},$$

$$I_\mu = \{\varphi: K \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ est } C^\infty, K\text{-finie et } \varphi(kt) = t^{-\mu}\varphi(k) \text{ pour tout } k\in K,\ t\in\tilde{T}\}.$$

L'isomorphisme entre $I_{\mu,\lambda}$ et I_μ est donné par la restriction des fonctions de $G(\mathbb{C})$ à K.

5.2. LEMME 4. *On conserve les notations ci-dessus. On choisit un représentant w de w_0 dans K. Alors:*

(i) *L'opérateur T_λ défini sur $I_{\mu,\lambda}$ par:*

$$\forall\varphi\in I_{\mu,\lambda},\quad (T_\lambda\varphi)(g) = \varphi(g^\sigma w^{-1})$$

envoie $I_{\mu,\lambda}$ sur $I_{w_0\mu,w_0\lambda} = I_{w_0\mu,\lambda}$ (puisque $w_0\lambda = \lambda$) et entrelace $\pi_{\mu,\lambda}$ et $\pi_{w_0\mu,\lambda}\circ\sigma$.

(ii) *L'opérateur induit par transport de structure entre I_μ et $I_{w_0\mu}$ est indépendant de λ et on le note T. Il est défini par:*

$$\forall\varphi\in I_\mu,\quad (T\varphi)(k) = \varphi(k^\sigma w^{-1}).$$

Il est unitaire pour la structure préhilbertienne naturelle sur I_μ et $I_{w_0\mu}$.

DEMONSTRATION. (i) Clairement $T_\lambda\varphi$ est K-finie à gauche puisque φ l'est. Etudions $(T_\lambda\varphi)(g\,\mathrm{tan})$ pour $g\in G(\mathbb{C})$, $t\in\tilde{T}$, $a\in\tilde{A}$ et $n\in N$. On a:

$$\begin{aligned}(T_\lambda\varphi)(g\,\mathrm{tan}) &= \varphi(g^\sigma \mathrm{t}^\sigma \mathrm{a}^\sigma \mathrm{n}^\sigma w^{-1})\\ &= \varphi(g^\sigma w^{-1}(wt^\sigma w^{-1})(wa^\sigma w^{-1})(wn^\sigma w^{-1})).\end{aligned}$$

Mais $w(\sigma(N))w^{-1} = N$. En effet son algèbre de Lie est égale à $\mathrm{Ad}\, w(\sigma(\mathfrak{n})) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} g^{w_0(\alpha^\sigma)}$. Mais w_0 agit trivialement sur $\mathfrak{a}$ de même que σ. Donc $w_0(\alpha^\sigma)_{|\mathfrak{a}} = \alpha_{|\mathfrak{a}}$ pour tout $\alpha\in\Delta^+$. Donc, si $\alpha\in\Delta^+$ et $\alpha_{|\mathfrak{a}} \neq 0$, on a $w_0(\alpha^\sigma)\in\Delta^+$. Si $\alpha_{|\mathfrak{a}} = 0$ et $\alpha\in\Delta^+$, on a $\alpha^\sigma = -\alpha$ et $\alpha\in\Delta^+_{\mathrm{im}}$. Mais $w_0\Delta^+_{\mathrm{im}} = -\Delta^+_{\mathrm{im}}$. Par suite on a encore $w_0(\alpha^\sigma)\in\Delta^+$. Finalement les algèbres de Lie des sous-groupes analytiques de $G(\mathbb{C})$, N et $w^{-1}(\sigma(N))w$ coincident. D'où l'égalité $N = w^{-1}(\sigma(N))w$. Donc:

$$(T_\lambda\varphi)(g\,\mathrm{tan}) = \varphi(g^\sigma w^{-1})(t^\sigma)^{-w_0\mu}(a^\sigma)^{-w_0 2\rho - w_0\lambda}.$$

Mais $w_0\mu$ est clairement trivial sur $\exp i\mathfrak{a} \subset \tilde{T}$ et l'on en déduit $(w_0\mu)\circ\sigma = w_0\mu$. D'autre part w_0 et σ agissant trivialement sur $\mathfrak{a}$ et λ étant nulle sur $i\mathfrak{t}$, on a

$w_0\lambda = \lambda$ et $(a^\sigma)^{-w_0\lambda} = a^{-\lambda}$. Enfin $(w_0\rho)\circ\sigma = \rho$ puisque, pour tout $\alpha \in \Delta^+$, $w_0\alpha^\sigma \in \Delta^+$. Finalement on a:

$$(T_\lambda\varphi)(g\tan) = (T_\lambda\varphi)(g)(w_0\mu)^{-1}(t)a^{-\lambda-2\rho}.$$

Donc T_λ envoie $I_{\mu,\lambda}$ dans $I_{w_0\mu,\lambda}$ et il est immédiat de vérifier que T_λ entrelace $\pi_{\mu,\lambda}$ et $\pi_{w_0\mu,\lambda}$.

(ii) est immédiat et le lemme est prouvé.

5.3. Introduisons maintenant les intégrales d'entrelacement. Il existe un opérateur d'entrelacement $A(w, \mu, \lambda)$ qui entrelace $\pi_{\mu,\lambda}$ et $\pi_{w_0\mu,w_0\lambda} = \pi_{w_0\mu,\lambda}$ obtenu par normalisation des intégrales d'entrelacement qui est bien défini au moins pour λ imaginaire pur et qui coincide sur le K-type minimal de $\pi_{\mu,\lambda}$ avec l'opérateur $R(w)$ défini par $(R(w)\varphi)(k) = \varphi(kw^{-1})$ (dans la réalisation compacte). Une rapide inspection de la situation montre que l'intégrale d'entrelacement se passe entièrement dans le centralisateur M de $\mathfrak{a}$ dans $G(\mathbb{C})$ et que l'opérateur $A(w, \mu, \lambda)$ apparait comme un opérateur d'entrelacement induit de M à $G(\mathbb{C})$ d'un opérateur d'entrelacement au niveau de M. Il en résulte facilement que dans la réalisation compacte, l'opérateur $A(w, \mu, \lambda)$ est indépendant de λ et on le notera $A(w)$. Comme pour λ imaginaire pur $A(w, \mu, \lambda)$ est unitaire, $A(w)$ est unitaire et en particulier inversible. On définit alors un opérateur $A(\sigma)$ de I_μ dans I_μ par

$$A(\sigma) = t_w^\mu A(w)^{-1} \circ T$$

où $t_w = w^\sigma w^{-1} \in \tilde{T}$.

Pour voir que t_w est dans $\tilde{T}$ il suffit de constater que w et w^σ définissent le même élément du groupe de Weyl. De plus, comme $\sigma(t_w) = t_w^{-1}$, on a $t_w^\mu = t_w^{-\mu}$ i.e. $t_w^\mu = \pm 1$. Alors:

LEMME 5

(i) *$A(\sigma)$ entrelace $\pi_{\mu,\lambda}$ et $\pi_{\mu,\lambda}\circ\sigma$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.*
(ii) *$A(\sigma)$ est unitaire pour la structure préhilbertienne sur I_μ.*
(iii) *$A(\sigma)$ coincide sur le K-type minimal de I_μ avec l'opérateur $\varphi \to \varphi\circ\sigma$.*
(iv) *$A(\sigma)^2$ est l'opérateur identique sur I_μ.*
(v) *$A(\sigma)$ laisse fixe les vecteurs de poids μ sous T dans le K-type minimal de I_μ.*

DEMONSTRATION. Si λ est imaginaire pur l'assertion de (i) est claire. On en déduit le résultat pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ par prolongement holomorphe des identités. Ensuite le seul point qui n'est pas une conséquence immédiate des définitions est (iv).

Mais $A(\sigma)^2$ commute à $\pi_{\mu,\lambda}$ pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$. Or dans ce cas $\pi_{\mu,\lambda}$ est unitaire irréductible, donc $A(\sigma)^2$ est scalaire. Mais d'après (iii) $A(\sigma)^2$ est l'identité sur le K-

type minimal de $\pi_{\mu,\lambda}$. Le scalaire est donc bien égal à 1. Le point (v) résulte des définitions.

Dans la suite on notera $\Theta^{\sigma}_{\mu,\lambda}$ le caractère tordu du $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module associé à $\pi_{\mu,\lambda}$ et $A(\sigma)$ et on notera $(\pi^{\sigma}_{\mu,\lambda}, H^{\sigma}_{\mu,\lambda})$ représentation de $\sigma \ltimes G(\mathbb{C})$ correspondante.

Soit $(\bar{\pi}_{\mu,\lambda}, J_{\mu,\lambda})$ l'unique sous-quotient irréductible de $\pi_{\mu,\lambda}$ contenant le K-type minimal $\tilde{\mu}$ de $\pi_{\mu,\lambda}$. Comme $\mu \in (\hat{\tilde{T}})^{\sigma}$, ce K-type est stable sous σ. Alors l'isomorphisme $\pi_{\mu,\lambda} \circ \sigma \simeq \pi_{\mu,\lambda}$ montre que $\bar{\pi}_{\mu,\lambda} \simeq \bar{\pi}_{\mu,\lambda} \circ \sigma$. Dans le cas où $\operatorname{Re} \lambda$ est dans l'adhérence $\bar{C}$ de la chambre de Weyl définie par Δ^{+}, $\bar{\pi}_{\mu,\lambda}$ (resp. $\bar{\pi}_{\mu,\lambda} \circ \sigma$) est l'unique quotient simple de $\pi_{\mu,\lambda}$ (resp. $\pi_{\mu,\lambda} \circ \sigma$). Alors $A(\sigma)$ passe au quotient et permet de définir une structure de $(\mathfrak{g}, \sigma \ltimes K)$-module sur $\bar{\pi}_{\mu,\lambda}$ dont le caractère tordu sera noté $\bar{\Theta}^{\sigma}_{\mu,\lambda}$ dans la suite. Alors, en appliquant les résultats sur les représentations tempérées irréductibles σ-stables aux sous-groupes de Levi σ-stables de $G(\mathbb{C})$, on déduit de la classification de Langlands (cf. proposition 3):

PROPOSITION 5

(i) *Tout* $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$*-module irréductible et* σ*-stable est de la forme* $\bar{\pi}_{\mu,\lambda}$ *(lorsque* $\mathfrak{h}(\mathbb{R})$ *décrit les différents* $\mathfrak{h}_j(\mathbb{R})$*) avec* $\mu \in (\tilde{T})^{\sigma}_{\mathrm{reg}}$ *et* $\lambda \in (\mathfrak{a}^*)_{\mathbb{C}}$ *avec* $\operatorname{Re} \lambda \in \bar{C}$.

(ii) *Avec* μ, λ *comme ci-dessus,* $\Theta^{\sigma}_{\mu,\lambda} - \bar{\Theta}^{\sigma}_{\mu,\lambda}$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients entiers de* $\Theta^{\sigma}_{\mu',\lambda'}$ *ou* $\bar{\Theta}^{\sigma}_{\mu',\lambda'}$ *avec* $\|\mu'\| > \|\mu\|$ *(on utilise la norme* $(it)^*$ *déduite de la forme bilinéaire* B *(cf.* §2.1)).

REMARQUE 3. Notez que, même pour λ imaginaire pur, $\Theta^{\sigma}_{\mu,\lambda}$ ne dépend pas seulement de la classe de la représentation $\pi_{\mu,\lambda}$ mais si w est un élément du groupe de Weyl qui commute à σ on a:

$$\Theta^{\sigma}_{w\mu,w\lambda} = \varepsilon(w, \mu)\Theta^{\sigma}_{\mu,\lambda}$$

où $\varepsilon(\mu, w)$ est un signe qui dépend de μ et w.

6. Théorème de Paley-Wiener invariant tordu pour l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G(\mathbb{C}), K)$ et $C_c^{\infty}(G(\mathbb{C}), K)$

6.1. THEOREME 1. *Soit* $(F_i)_{i \in \{1,\ldots,s\}}$ *une famille de fonctions* $F_i : (\hat{\tilde{T}}_i)^{\sigma}_{\mathrm{reg}} \times (\mathfrak{a}_i)^*_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. *Alors il existe* $\varphi \in \mathscr{H}(G(\mathbb{C}), K)$ *(resp.* $\varphi \in C_c^{\infty}(G(\mathbb{C}), K)$*) telle que* $\Theta^{\sigma}_{\mu,\lambda}(\varphi) = F_i(\mu, \lambda)$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, s\}$ *et tout* $(\mu, \lambda) \in (\hat{\tilde{T}}_i)^{\sigma}_{\mathrm{reg}} \times (\mathfrak{a}_i)^*_{\mathbb{C}}$ *si et seulement si pour tout* $i \in \{1, \ldots, s\}$:

(i) *l'application* F_i *est à support fini en* $\mu \in (\hat{\tilde{T}}_i)^{\sigma}_{\mathrm{reg}}$,

(ii) $\forall \mu \in (\tilde{T}_i)^{\sigma}_{\mathrm{reg}}$, *l'application* $\lambda \to F_i(\mu, \lambda)$ *est polynomiale en* λ *(resp. est la transformée de Fourier d'une fonction* C^{∞} *à support compact sur* $\mathfrak{a}_i$*),*

(iii) $\forall w \in W_i(\mathbb{C})^{\sigma}$, $\forall (\mu, \lambda) \in (\hat{\tilde{T}}_i)^{\sigma}_{\mathrm{reg}} \times (\mathfrak{a}_i^*)_{\mathbb{C}}$, $F_i(w\mu, w\lambda) = \varepsilon(w, \mu)F_i(\mu, \lambda)$, *où* $W_i(\mathbb{C})^{\sigma}$ *est l'ensemble des éléments de* $W_i(\mathbb{C})$ *qui commutent à* σ *et* $\varepsilon(w, \mu)$ *est défini dans la remarque* 3 *suivant la proposition* 5,

(iv) *si, pour chaque i, F_i est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact contenu dans une boule de centre O, de rayon r dans $\mathfrak{a}_i$ (pour la norme sur $\mathfrak{a}_i$ déduite de la forme bilinéaire B), on peut trouver φ comme ci-dessus avec φ à support compact contenu dans K $\exp(B_r)$ où B_r est la boule de centre 0 et de rayon r de $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}) \mid \theta(X) = -X\}$ pour la norme déduite de B sur $\mathfrak{p}$.*

6.2. Avant de passer à la démonstration du théorème, on établit une proposition:

PROPOSITION 6. *On conserve les notations ci-dessus. Soit $\tilde{T}$ égal à l'un des $\tilde{T}_j$ (on omet l'indice j dans la suite) et $\mu \in (\hat{\tilde{T}})^{\sigma}_{\mathrm{reg}}$. Soit $W_\mu = \{w \in W(\mathbb{C}) \mid w\mu = \mu\}$ et $W_\mu^\sigma = W_\mu \cap W(\mathbb{C})^\sigma$. Alors l'homomorphisme de restriction des fonctions polynomiales sur $\tilde{\mathfrak{a}}^*$ à $\mathfrak{a}^*$ induit une surjection de $S(\tilde{\mathfrak{a}})^{W_\mu}$ sur $S(\mathfrak{a})^{W_\mu^\sigma}$.*

DEMONSTRATION. Soit $X \in \mathfrak{t}$ l'élément correspondant à $i\mu \in \mathfrak{t}^*$ dans l'identification entre $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}^*$. Alors $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^X$ est quasi-déployé et $\mathfrak{h}(\mathbb{R}) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de type Iwasawa de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})^X$ dont la partie déployée est égale à $\mathfrak{a}$. De plus W^μ est le groupe de Weyl de la paire $(\mathfrak{g}(\mathbb{C})^X, \mathfrak{h}(\mathbb{C}))$ et W_μ^σ est le groupe de Weyl de la paire $(\mathfrak{g}(\mathbb{R})^X, \mathfrak{a})$. Alors l'assertion résulte de [8], prop. A.1.

6.3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1. Ayant remarqué que l'opérateur d'entrelacement entre $\pi_{\mu,\lambda}$ et $\pi_{\mu,\lambda} \circ \sigma$ ne dépend pas de λ lorsque μ est fixe dans $(\hat{\tilde{T}}_j)^{\sigma}_{\mathrm{reg}}$ (cf. sa construction au §5) on procède exactement comme dans la démonstration du théorème 1 de [10] (dans le cas connexe). Afin d'éviter les "ε" qui s'introduisent dans le lemme 7, on utilise le résultat de M. Cowling [13].

Le théorème en résulte.

7. Caractéristique d'Euler-Poincaré tordue

Dans tout ce paragraphe on suppose $G(\mathbb{C})$ semi-simple.

7.1. Si V est un $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \sigma \ltimes K)$-module, on a une action de σ sur l'espace des cochaînes de cohomologie relative $C^*(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \mathfrak{k}, V)$ (action sur les arguments des cochaînes et sur V) qui passe au quotient. On définit alors la caractéristique d'Euler-Poincaré tordue de V

$$\mathrm{ep}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K, \sigma, V) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K, V)^\sigma$$

où l'indice supérieur, σ, désigne les invariants sous σ. Cette formule a un sens dès que les espaces de cohomologie sont de dimension finie, par exemple si V est admissible. On voit facilement que

$$\mathrm{ep}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K, \sigma, V) = \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Hom}_{\sigma \ltimes K}(\Lambda^i(\mathfrak{g}(\mathbb{C})/\mathfrak{k}), V).$$

On notera parfois la caractéristique d'Euler-Poincaré tordue de V, $\mathrm{ep}(\sigma, V)$. Par ailleurs, si F est une représentation de dimension finie de $\sigma \ltimes G(\mathbb{C})$ (ou encore un $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \sigma \ltimes K)$-module) on notera, pour V un $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-module admissible, $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K, \sigma, F, V) = \mathrm{ep}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K, \sigma, F^* \otimes V)$, ou en abrégé $\mathrm{ep}(\sigma, F, V)$. Alors on a:

LEMME 6. *Si V est un $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \sigma \ltimes V)$-module admissible de type fini et V' le $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \sigma \ltimes K)$-module déduit de V en gardant la même action de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ et en multipliant l'action de σ par -1, on a:*

$$\mathrm{ep}(\sigma, V) = -\mathrm{ep}(\sigma, V').$$

DEMONSTRATION. En effet $\mathrm{ep}(\sigma, V) + \mathrm{ep}(\sigma, V')$ est clairement égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré ordinaire du $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-module V. Or celle-ci est toujours nulle puisque $G(\mathbb{C})$ n'a pas de séries discrètes (cf. [11]).

PROPOSITION 7. *Si $G(\mathbb{R})$ n'a pas de séries discrètes, pour tout $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-module admissible de type fini V et tout $\sigma \ltimes G(\mathbb{C})$-module de dimension finie, on a:*

(i) $\mathrm{ep}(\sigma, V) = 0$,
(ii) $\mathrm{ep}(\sigma, F, V) = 0$.

DEMONSTRATION: Montrons (i). Remarquons que, d'après les propriétés habituelles des caractéristiques d'Euler-Poincaré, la caractéristique d'Euler-Poincaré tordue de V ne dépend que de son semi-simplifié. Il suffit donc de démontrer la proposition lorsque V est irréductible.

Si V est réductible comme $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-module, il est de la forme $V_1 \oplus V_1$ et $\mathrm{ep}(\sigma, V)$ est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré ordinaire de V_1 qui est nulle puisque $G(\mathbb{C})$ n'a pas de séries discrètes.

Si V est irréductible comme $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-module, on peut, quitte à changer l'action de σ en la multipliant par -1 et en utilisant le lemme précédent, supposer que V est le quotient d'un module standard. Un argument de récurrence sur la longueur du K-type minimal de V montre qu'il suffit de démontrer la proposition pour V module standard. Pour un tel module, si $G(\mathbb{R})$ n'a pas de séries discrètes, il existe un autre module standard ayant la même structure de $\sigma \ltimes K$-module et qui n'a pas de $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-cohomologie pour des raisons de caractère infinitésimal. Comme $\mathrm{ep}(\sigma, V)$ ne dépend que de la structure de $\sigma \ltimes K$-module de V, on en déduit $\mathrm{ep}(\sigma, V) = 0$. On a donc démontré (i).

Alors (ii) résulte de (i), du fait que $F^* \otimes V$ est un $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \sigma \ltimes K)$-module admissible et de l'égalité $\mathrm{ep}(\sigma, F, V) = \mathrm{ep}(\sigma, F^* \otimes V)$.

Dans toute la suite du §7 on supposera que $G(\mathbb{R})$ admet des séries discrètes. On notera $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}(\mathbb{R})$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ contenue dans $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ sa complexifiée, $\mathfrak{a} = i\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}(\mathbb{R})$, $H(\mathbb{C})$ (resp. T, A) le sous-groupe analytique de $G(\mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{a}$).

7.2. Représentations de dimension finie irréductibles de $G(\mathbb{C})$ stables par σ

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ regardée comme algèbre de Lie réelle est de la forme $(\pi \otimes \pi'^{\sigma}, V \otimes V')$ où (π, V), (π', V') sont des représentations $\mathbb{C}$-linéaires (ou holomorphes) de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. La condition de stabilité par σ montre que toute représentation de dimension finie σ-stable de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ est de la forme $(\pi \otimes \pi^{\sigma}, V \otimes V)$ avec π représentation holomorphe de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$.

Si V est une représentation de dimension finie holomorphe de $G(\mathbb{C})$ on note f_V un poids extrêmal de V sous $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ (forme $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$). La condition d'intégrabilité à $G(\mathbb{C})$ de $V \otimes V^{\sigma}$ s'exprime par le fait que $2f_{V|\mathfrak{t}}$ est la différentielle d'un caractère de T.

On choisit un sous-groupe de Borel de $G(\mathbb{C})$ contenant $H(\mathbb{C})$ tel que $\sigma(B)$ soit l'opposé de B (un tel choix est clairement possible). On notera ρ la demi-somme des racines de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ dans l'algèbre de Lie de B (les racines sont comptées avec multiplicité 1). On choisit f_V dominant par rapport à l'ensemble de racines positives Δ^+ défini par B. Alors, si $\mu \in \hat{T}$, un calcul facile (cf. par exemple [16]) montre que $\pi_{\mu,0}$ a même caractère infinitésimal que $(\pi \otimes \pi^{\sigma}, V \otimes V)$ si et seulement si il existe $w \in W(\mathbb{C})$ (groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \mathfrak{h}(\mathbb{C}))$) tel que:

$$w\mu = 2(f_V + \rho)_{|\mathfrak{t}}$$

(on identifie μ à sa différentielle).

Notons F_V le $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \sigma \ltimes K)$-module dont l'espace est $V \otimes V$, pour lequel l'action de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ est définie par $\pi \otimes \pi^{\sigma}$ et l'action de σ est définie par $A_V(\sigma)\colon x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

On notera $H^{\sigma}_{\mu,0}$ le $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \sigma \ltimes K)$-module standard associé à $\pi_{\mu,0}$ (cf. 5.3). On va calculer $\mathrm{ep}(\sigma, F_V, H^{\sigma}_{\mu,0})$. D'après ce que l'on vient de voir on a déjà:

PROPOSITION 8. *Si $\mu \in \hat{T}$ identifié à sa différentielle n'est pas conjugué sous $W(\mathbb{C})$ à $2(f_V + \rho)_{|\mathfrak{t}}$, $\mathrm{ep}(\sigma, F_V, H^{\sigma}_{\mu,0}) = 0$.*

7.3. On s'intéresse maintenant au cas où $\mu \in \hat{T}$ (identifié à sa différentielle) est conjugué sous $W(\mathbb{C})$ à $2(f_V + \rho)_{|\mathfrak{t}}$. Comme $\pi_{\mu,0}$ est isomorphe à $\pi_{w\mu,0}$ pour $w \in W(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{ep}(\sigma, F_V, H^{\sigma}_{\mu,0}) = \pm \mathrm{ep}(\sigma, F_V, H^{\sigma}_{w\mu,0})$$

selon que les opérateurs $A(\sigma)$ se correspondent où non par l'isomorphisme. Nous nous limiterons donc au calcul lorsque $\mu = 2(f_V + \rho)_{|\mathfrak{t}}$.

THEOREME 2. *On suppose que $\mu = 2(f_V + \rho)_{|\mathfrak{t}}$. Alors:*

$$\mathrm{ep}(\sigma, F_V, H^{\sigma}_{\mu,0}) = \pm 2^{\dim(\mathfrak{t})-1}.$$

DEMONSTRATION. Nous aurons besoin pour démontrer ce théorème d'un certain nombre de résultats préliminaires.

D'abord, comme nous l'avons déjà remarqué (§1, remarque 1), $\Theta^{\sigma}_{\mu,0}$ est une distribution sur $G(\mathbb{C})$ (ou plutôt une fonction généralisée) ainsi que le caractère ordinaire $\pi_{\mu,0}$ que l'on notera $\Theta_{\mu,0}$.

LEMME 7

(i) *La représentation de $\sigma \rtimes K$ dans $H^{\sigma}_{\mu,0}$ admet un caractère fonction généralisée. On notera $\Theta^{K}_{\mu,0}$ (resp. $\Theta^{\sigma,K}_{\mu,0}$) sa restriction à K (resp. à la composante non neutre de $\sigma \rtimes K$ identifiée à K).*

(ii) *$\Theta_{\mu,0}$ et $\Theta^{\sigma}_{\mu,0}$ admettent des restrictions à K que l'on note respectivement ${}^{K}\Theta_{\mu,0}$ et ${}^{K}\Theta^{\sigma}_{\mu,0}$.*

(iii) *On a $\Theta^{K}_{\mu,0} = {}^{K}\Theta_{\mu,0}$ et $\Theta^{\sigma,K}_{\mu,0} = {}^{K}\Theta^{\sigma}_{\mu,0}$.*

DEMONSTRATION. Les assertions concernant $\Theta_{\mu,0}$ sont démontrées dans [16], appendice A.5. Celles concernant $\Theta^{\sigma}_{\mu,0}$ se démontrent de façon identique.

7.4. Soit $\mathfrak{p} = i\mathfrak{k}$. C'est un supplémentaire stable par $\mathrm{Ad}\,K$ et σ de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$. Pour tout entier i, on note χ^{i} (resp. $\chi^{i,\sigma}$) la restriction à K (resp. à la composante non neutre de $\sigma \rtimes K$) du caractère du $\sigma \rtimes K$-module $\Lambda^{i}\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$. On note $\chi = \Sigma_i(-1)^{i}\chi_i$ et $\chi^{\sigma} = \Sigma_i(-1)^{i}\chi^{\sigma}_i$. De même on note χ_V (resp. χ^{σ}_V) le caractère du $\sigma \rtimes K$-module F_V restreint à K (resp. à la composante non neutre de $\sigma \rtimes K$). Alors il résulte de la théorie des représentations des groupes de Lie compacts que

$$\mathrm{ep}(\sigma, F_V, H^{\sigma}_{\mu,0}) = \tfrac{1}{2}(\langle \Theta^{K}_{\mu,0}, \bar{\chi}_V\bar{\chi}\, dk\rangle + \langle \Theta^{\sigma,K}_{\mu,0}, \bar{\chi}^{\sigma}_V\bar{\chi}^{\sigma}\, dk\rangle).$$

Expliquons le facteur 1/2 que nous avions omis par erreur dans une première rédaction: la mesure sur $\sigma \rtimes K$ doit être de masse totale 1, donc si dk désigne la mesure de Haar sur K de masse totale 1 il faut utiliser une mesure sur $\sigma \rtimes K$ qui, restreinte à K, est égale à $1/2\, dk$. Par ailleurs, on rappelle que $\Theta^{K}_{\mu,0}$ et $\Theta^{\sigma,K}_{\mu,0}$ sont par nature des fonctions généralisées. Il faut les intégrer contre des mesures lisses. On a par ailleurs identifié $\{\sigma\} \times K$ à K.

On remarque que $\langle \Theta^{K}_{\mu,0}, \bar{\chi}_V\bar{\chi}\, dk\rangle$ est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré ordinaire du $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), K)$-module $H_{\mu,0} \otimes F^{*}_{V}$ et cette quantité est nulle puisque $G(\mathbb{C})$ n'a pas de séries discrètes. Donc il s'agit de calculer

$$\langle \Theta^{\sigma,K}_{\mu,0}, \bar{\chi}^{\sigma}_V\bar{\chi}^{\sigma}\, dk\rangle = \langle \bar{\chi}^{\sigma}\Theta^{\sigma,K}_{\mu,0}, \bar{\chi}_V\, dk\rangle.$$

LEMME 8. *$\bar{\chi}^{\sigma}\Theta^{\sigma,K}_{\mu,0}$ est une fonction C^{∞} sur K.*

DEMONSTRATION. On adapte à notre situation une idée de W. Schmid (cf. [2] p. 52–56).

On note B la forme de Killing de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ (comme algèbre de Lie réelle) qui est

définie positive sur $\mathfrak{p}$. On munit le complexifié de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$,du produit scalaire déduit de B. Alors on a un produit scalaire naturel sur l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$. Pour $X \in \mathfrak{p}$ on notera $d(X)$ l'opération de produit extérieur par X sur $\Lambda^*\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ et $\delta(X)$ son adjoint pour le produit scalaire naturel. On pose alors $c(X) = d(X) - \delta(X)$. On sait que l'on a $c(X)^2 = -B(X, X)\,\mathrm{Id}$. Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathfrak{p}$ et si l'on note $(\pi, H_\pi) = (\pi^\sigma_{\mu,0}, H^\sigma_{\mu,0})$ on définit

$$D^\pm : H_\pi \otimes \Lambda^\pm \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \to H_\pi \otimes \Lambda^\mp \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$$

par

$$v \otimes s \to \sum_{i=1}^{n} (\pi(X_i)v) \otimes (c(X_i)s)$$

où l'on a posé $\Lambda^+\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \oplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^{2i}\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ et $\Lambda^-\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \oplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^{2i+1}\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$.

Les propriétés suivantes de $D^\pm$ sont faciles à établilr:

(a) $D^\pm$ ne dépendent pas de la base orthonormée choisie.

(b) $D^\pm$ sont des morphismes de K-modules.

(c) En utilisant une base orthonormée de $\mathfrak{p}$ formée d'une base orthonormée de $\mathfrak{p} \cap i\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ et d'une base orthonormée de $\mathfrak{g}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{p}$, on voit que $D^\pm$ est un morphisme de $\sigma \ltimes K$-modules. On utilise ici l'action de σ sur H_π et l'action naturelle de σ sur $\Lambda^*\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ déduite de l'action de σ sur $\mathfrak{p}$.

Notons $\gamma^\pm$ la représentation de K dans $\Lambda^\pm\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$. Procédant comme dans [2] pp. 52–55 pour le calcul du carré de l'opérateur de Dirac, on obtient:

$$D^\mp D^\pm = (\pi \otimes \gamma^\pm)(\Omega_K) - \pi(\Omega) \otimes 1 - 1 \otimes \gamma^\pm(\Omega_K).$$

Ici Ω est le Casimir de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ et Ω_K est le Casimir de $\mathfrak{k}$. On note que $\pi(\Omega)$ est scalaire. Chaque représentation irréductible de dimension finie de K n'apparaît qu'avec multiplicité finie dans π et donc dans $\pi \otimes \gamma^\pm$. En décomposant $\gamma^\pm$ puis $\pi \otimes \gamma^\pm$ en représentations irreductibles sous K, on peut trouver une base de $H_\pi \otimes \gamma^\pm$ qui diagonalise $D^\mp D^\pm$ et l'on voit que seulement un nombre fini de composantes isotypiques de $\pi \otimes \gamma^\pm$ peuvent contribuer au noyau de $D^\mp D^\pm$. D'où il résulte que D^+ admet un noyau de dimension finie et une image de codimension finie. Pour des raisons formelles, les $\sigma \ltimes K$-modules virtuels $H_\pi \otimes \Lambda^+\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} - H_\pi \otimes \Lambda^-\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ et $\ker D^+ - \operatorname{coker} D^+$ sont identiques. Ceci se traduit par l'égalité de caractères. En particulier le caractère (et le caractère tordu) de $H_\pi \otimes \Lambda^+\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} - H_\pi \otimes \Lambda^-\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ sont des fonctions C^∞ (puisqu'il en est ainsi pour $\operatorname{Ker} D^+$ et $\operatorname{coker} D^+$ qui sont de dimension finie). Mais le caractère tordu de $H_\pi \otimes \Lambda^+\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} - H_\pi \otimes \Lambda^-\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ (comme $\sigma \ltimes K$-module) est égal à $\chi^\sigma \Theta^{\sigma,K}_{\mu,0}$, donc $\chi^\sigma \Theta^{\sigma,K}_{\mu,0}$ est une fonction C^∞ sur K. Ce n'est pas exactement le résultat souhaité. Mais, comme $\Lambda^*\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ est la complexifiée d'une représentation orthogonale, on voit que $\chi^\sigma = \overline{\chi^\sigma}$. D'où le résultat.

7.5. Rappelons que $\Theta^{\sigma}_{\mu,0}$ est une fonction analytique sur l'ouvert $G(\mathbb{C})^{\sigma,\mathrm{reg}}$ des éléments de $G(\mathbb{C})$ σ-réguliers et σ-semi-simples dans la terminologie de [8] (cf. [8] th. 4.2). Rappelons que $x \in G(\mathbb{C})$ est σ-semi-simple et σ-régulier si et seulement si $x\sigma(x)$ est semi-simple et régulier dans $G(\mathbb{C})$ (cf. [8] lemmes 2.2 et prop. 2.5a). Notons $K^{\sigma,\mathrm{reg}} = G(\mathbb{C})^{\sigma,\mathrm{reg}} \cap K$. C'est un ouvert non vide de K, de complémentaire de mesure nulle, la σ-régularité dans K étant exprimée par la non nullité d'une fonction analytique définie sur K (cf. [8], prop. 2.5b). Alors on a:

LEMME 9. *$\Theta^{\sigma,K}_{\mu,0|K^{\sigma,\mathrm{reg}}}$ est égale à la fonction analytique $\Theta^{\sigma}_{\mu,0|G(\mathbb{C})^{\sigma,\mathrm{reg}}}$ restreinte à $K^{\sigma,\mathrm{reg}}$.*

DEMONSTRATION. En effet $\Theta^{\sigma,K}_{\mu,0} = {}^{K}\Theta^{\sigma}_{\mu,0}$ qui est la restriction à K de $\Theta^{\sigma}_{\mu,0}$. Alors l'assertion résulte des règles A.3.2 et A.3.3 de l'appendice de [17].

7.6. Formule d'intégration de Weyl tordue

Soit $W(\mathbb{C})$ le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}), \mathfrak{h}(\mathbb{C}))$ qui agit sur $H(\mathbb{C})$ mais également sur T et notons $|W(\mathbb{C})|$ le nombre d'éléments de $W(\mathbb{C})$. On note $T^{\sigma,\mathrm{reg}} = G(\mathbb{C})^{\sigma,\mathrm{reg}} \cap T$. C'est l'ensemble des éléments de carré réguliers (dans $G(\mathbb{C})$) de T qui est donc de complémentaire de mesure nulle dans T.

PROPOSITION 9. *Soit f une fonction continue sur K. Alors on a*

$$|W(\mathbb{C})| \int_K f(k)\,dk = \int_{T^{\sigma,\mathrm{reg}}} \det(1 - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}/\mathfrak{t}}(t) \circ \sigma) \int_K f(ktk^{-\sigma})\,dk\,\mathrm{d}t$$

DEMONSTRATION. On imite la démonstration de la formule d'intégration de Weyl (cf. [18] ch. 4.8.2). On introduit l'application $\psi: K/T \times T \to K$ définie par $(kT, t) \to ktk^{-\sigma}$. Montrons que $\psi(K/T \times T^{\sigma,\mathrm{reg}}) = K^{\sigma,\mathrm{reg}}$. Il est clair qu'il suffit de prouver que tout élément x de $K^{\sigma,\mathrm{reg}}$ peut s'écrire sous la forme $\psi(kT, t)$. Or, si $x \in K^{\sigma,\mathrm{reg}}$, on a xx^{σ} qui est régulier dans $G(\mathbb{C})$ donc aussi dans K. Alors xx^{σ} est conjugué à un élément de T i.e.:

$$\exists k \in K, \quad \exists t \in T, \quad xx^{\sigma} = ktk^{-1}.$$

On pose alors $y = k^{-1}xk^{\sigma}$. Alors $yy^{\sigma} = t$ et comme $t^{\sigma} = t$ on a $y^{\sigma}y = yy^{\sigma}$. Alors y centralise t, élément régulier de T dans K. Donc $y \in T$. Alors $\psi(kT, y) = x$. Donc ψ applique surjectivement $K/T \times T^{\sigma,\mathrm{reg}}$ sur $K^{\sigma,\mathrm{reg}}$. Montrons que ψ est un recouvrement à $|W(\mathbb{C})|$-feuillets de $K^{\sigma,\mathrm{reg}}$. En effet, supposons que $\psi(kT, t) = \psi(k'T', t')$ avec $t, t' \in T^{\sigma,\mathrm{reg}}$. Alors $k't'k'^{-\sigma} = ktk^{-\sigma}$ et en posant $x = k^{-1}k'$ on a $xt'x^{-\sigma} = t$. Alors $xt'^2x^{-1} = t^2$ et grâce à la régularité de t^2 et t'^2 dans K on en déduit que x normalise T. Par ailleurs l'égalité $t^2 = \sigma(t^2)$ montre que

$x^{-1}x^{\sigma}t'^2x^{-\sigma}x = t'^2$, ce qui implique, par la régularité de t'^2, que $x^{-1}x^{\sigma}$ est dans T. Alors

$$k'T = kxT \quad \text{et} \quad t' = x^{-1}tx^{\sigma} = x^{-1}txx^{-1}x^{\sigma}.$$

On a donc associé à tout élément de $\psi^{-1}(\psi(kT, t))$ un élément xT du groupe de Weyl $W(\mathbb{C})$ identifié au normalisateur dans K de T quotienté par T. Réciproquement, si xT est un élément de $W(\mathbb{C})$, on a (cf. §5.3) $x^{-1}x^{\sigma} \in T$ et $x^{-1}tx^{\sigma} = x^{-1}tx(x^{-1}x^{\sigma})$ est un élément de T. Alors

$$\psi(kxT, x^{-1}tx^{\sigma}) = \psi(kT, t).$$

On a bien montré que $\psi^{-1}(\psi(k, t))$ a exactement $|W(\mathbb{C})|$-éléments. Alors la méthode de démonstration de [27] 8.4.2 conduit au résultat voulu.

7.7. Notons π_V la représentation holomorphe de $G(\mathbb{C})$ dans V. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de V diagonalisant l'action de T, le caractère par lequel agit T sur e_i étant noté $t \to t^{\mu_i}$. Alors on a

$$\operatorname{tr}((\pi_V(t) \otimes \pi_V(t)) \circ A_V(\sigma)) = \sum_{i=1}^{p} (t^{\mu_i})^2 = \operatorname{tr} \pi_V(t^2).$$

La formule des caractères de Hermann Weyl (cf. par exemple [27] th. 4.9.6) implique alors que pour tout $Y \in \mathfrak{t}$ avec $2Y$ régulier dans $\mathfrak{t}$, on a:

$$\chi_V^{\sigma}(\exp Y) = \frac{\Sigma_{w \in W(\mathbb{C})}(-1)^{l(w)} e^{2w(f_V + \rho)(Y) - 2\rho(Y)}}{\Pi_{\alpha \in \Delta^+}(1 - e^{-2\alpha(Y)})}$$

Ici $l(w)$ désigne la longueur de $w \in W(\mathbb{C})$ calculée à l'aide de Δ^+. Exprimons maintenant

$$\Theta_{\mu,0}^{\sigma}(\exp Y) \text{ pour } Y \in \mathfrak{t} \quad \text{avec } 2Y \text{ régulier dans } \mathfrak{t}.$$

On utilise pour cela les résultats de Bouaziz (cf. [5] th. 5.3.3 et §8.2). La spécialisation de son théorème à notre situation est un cas particulier de celle qu'il étudie au §8.2 de son article (voir aussi [6] formule 4.2.3).

Si $w \in W(\mathbb{C})$, on voit comme au paragraphe 5.3 que si g est un représentant de w dans K, $\sigma(g)^{-1}g \in T$ et que cet élément de T ne dépend pas du représentant choisi. On le notera t_w. Il est de carré 1. On étudie maintenant $t_w^{\mu}t_w^{2\rho}$. En travaillant dans le recouvrement universel $\tilde{G}(\mathbb{C})$ de $G(\mathbb{C})$ et en ayant relevé l'involution σ en une involution de $\tilde{G}(\mathbb{C})$ notée $\tilde{\sigma}$, on voit que t_w est l'image d'un élément $\tilde{t}_w$ de T_1 (sous-groupe analytique de $\tilde{G}(\mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$), de carré 1.

Mais nos hypothèses montrent que $\frac{1}{2}\mu = f_V + \rho$ est un poids de même que ρ. Donc $\frac{1}{2}\mu + \rho$ est la différentielle d'un caractère de T_1, χ. Alors $t_w^\mu t_w^{2\rho} = \chi(\tilde{t}_w^2) = 1$, puisque $\tilde{t}_w^2 = 1$.

Le calcul donne alors pour $Y \in \mathfrak{t}$ avec $2Y$ régulier:

$$\Theta_{\mu,0}^\sigma(\exp Y) = \pm \frac{\Sigma_{w \in W(\mathbb{C})}(-1)^{l(w)} e^{(w\mu - 2\rho)(Y)}}{\Pi_{\alpha > 0}(1 - e^{-2\alpha(Y)})}.$$

Les racines de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{k}$ se divisent en deux groupes disjoints, les racines de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ et celles dans $\mathfrak{k} \cap i\mathfrak{g}(\mathbb{R})$, les premières étant appelées compactes, les autres non compactes. On note Δ_c et Δ_{nc} les ensembles de racines correspondants. Alors on a facilement:

$$\det(1 - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}(t) \circ \sigma) = \prod_{\alpha \in \Delta_c} (1 - t^\alpha) \times \prod_{\alpha \in \Delta_{nc}} (1 + t^\alpha).$$

Remarquant que $\mathfrak{p} = i\mathfrak{k}$, on obtient également

$$\chi^\sigma(t) = 2^{\dim \mathfrak{t}} \prod_{\alpha \in \Delta_c} (1 + t^\alpha) \prod_{\alpha \in \Delta_{nc}} (1 - t^\alpha).$$

Rappelons que $\overline{\chi^\sigma}(t) = \chi^\sigma(t)$.

7.8. On peut maintenant achever la démonstration du théorème. Il nous faut calculer $\langle \bar{\chi}^\sigma \Theta_{\mu,0}^{\sigma,K}, \bar{\chi}_V^\sigma \, dk \rangle$. On sait que $\bar{\chi}^\sigma \Theta_{\mu,0}^{\sigma,K}$ est une fonction C^∞ sur K, d'après le lemme 8, invariante par σ conjugaison. Donc

$$\langle \bar{\chi}^\sigma \Theta_{\mu,0}^{\sigma,K}, \bar{\chi}_V^\sigma \, dk \rangle = \int_{K^{\sigma,\mathrm{reg}}} (\bar{\chi}^\sigma \Theta_{\mu,0}^{\sigma,K})(k) \bar{\chi}_V^\sigma(k) \, dk.$$

Mais on sait par ailleurs que $\Theta_{\mu,0}^{\sigma,K}$ est une fonction analytique sur $K^{\sigma,\mathrm{reg}}$ égale à la restriction à $K^{\sigma,\mathrm{reg}}$ de la fonction analytique qui représente $\Theta_{\mu,0}^\sigma$ sur $G(\mathbb{C})^{\mathrm{reg}}$. En appliquant la formule d'intégration de Weyl tordue (proposition 9) et en utilisant les formules du numéro précédent, il vient:

$$\begin{aligned}\langle \bar{\chi}^\sigma \Theta_{\mu,0}^{\sigma,K}, \bar{\chi}_V^\sigma \, dk \rangle &= \frac{1}{|W(\mathbb{C})|} \int_{T^{\sigma,\mathrm{reg}}} \det(1 - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}(t) \circ \sigma) \bar{\chi}^\sigma(t) \Theta_{\mu,0}^{\sigma,K}(t) \bar{\chi}_V^\sigma(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{|W(\mathbb{C})|} \int_{T^{\sigma,\mathrm{reg}}} \varphi(t) \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\det(1 - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}(t) \circ \sigma) \chi^\sigma(t) = 2^{\dim \mathfrak{t}} \prod_{\alpha \in \Delta} (1 - t^{2\alpha})$$

et ceci est égal au produit des dénominateurs de $\Theta^{\sigma}_{\mu,0}(t)$ et χ^{σ}_{V} par $2^{\dim \mathfrak{t}}$. D'où

$$\varphi(t) = \pm 2^{\dim \mathfrak{t}} \left(\sum_{w,w'} (-1)^{l(w)+l(w')} t^{w\mu - w'\mu} \right)$$

(on a exploité l'hypothèse $\mu = 2(f_V + \rho)_{|\mathfrak{t}}$) *et* $\int_T \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \pm 2^{\dim \mathfrak{t}} |W(\mathbb{C})|$. Finalement

$$\mathrm{ep}(\sigma, F_V, H_{\mu,0}) = \pm 2^{\dim \mathfrak{t} - 1}.$$

8. Formule des traces tordues dans le cas cocompact

8.1. On revient momentanément à la situation du §1

Rappelons pour fixer les idées la définition du produit dans $\sigma \ltimes G$. On identifie $\sigma \ltimes G$ à $\{\sigma, 1\} \times G$ et la formule du produit est donnée par $(\varepsilon, g)(\varepsilon', g') = (\varepsilon\varepsilon', g(g')^{\varepsilon})$ avec $\varepsilon, \varepsilon' = 1$ ou σ et $g^1 = g$ et $g^{\sigma} = \sigma(g)$ (on notera aussi parfois $g^{-\sigma}$ pour $\sigma(g^{-1})$).

On se fixe maintenant un sous-groupe discret cocompact de G, Γ, stable par σ. Alors $\sigma \ltimes \Gamma$ est un sous-groupe de $\sigma \ltimes G$. $\sigma \ltimes G$ agit sur le quotient $\sigma \ltimes G/\sigma \ltimes \Gamma$. Identifions ce quotient à G/Γ par $(\varepsilon, g)(\sigma \ltimes \Gamma) = g\Gamma$. L'action de (ε, g) sur $x\Gamma$ est alors donnée par $(\varepsilon, g)(x\Gamma) = gx^{\varepsilon}\Gamma$. On a alors une action de $\sigma \ltimes G$ sur G/Γ. On note r^{σ}_{Γ} la représentation naturelle de $\sigma \ltimes G$ dans $L^2(G/\Gamma)$.

Si $x \in G$, on notera G^{σ}_{x} le centralisateur tordu de x, i.e. $G^{\sigma}_{x} = \{g \in G / gxg^{-\sigma} = x\}$. Si $\gamma \in \Gamma$, on a $[\gamma]^{\sigma}_{\Gamma}$ sa classe de conjugaison tordue dans Γ i.e. $[\gamma]^{\sigma}_{\Gamma} = \{\tau\gamma\tau^{-\sigma} \mid \tau \in \Gamma\}$ et $\Gamma^{\sigma}_{\gamma} = \Gamma \cap G^{\sigma}_{\gamma}$. On notera $[\Gamma]^{\sigma}$ l'ensemble des classes de conjugaison tordues de Γ.

On note $\hat{G}_{\sigma}$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles (à équivalence près) de $\sigma \ltimes G$ dont la restriction à G est irréductible. Si $\pi \in \hat{G}_{\sigma}$, on note Θ^{σ}_{π} son caractère tordu. Soit $\varphi \in C_c(G)^{\infty}_{(K)}$. On note φ^{σ} la fonction sur $\sigma \ltimes G$ nulle sur $\{1\} \times G$ et telle que $\varphi^{\sigma}(\sigma, g) = \varphi(g)$. On remarque que si π est une représentation unitaire irréductible de $\sigma \ltimes G$ dont la restriction à G est non irréductible $\mathrm{tr}\, \pi(\varphi^{\sigma}) = 0$.

Alors, en exprimant de deux façons différentes la trace de $r_{\Gamma}(\varphi^{\sigma})$, on obtient facilement la formule des traces tordues

$$\sum_{\pi \in \hat{G}^{\sigma}} (m^{+}(\pi, \Gamma) - m^{-}(\pi, \Gamma)) \Theta^{\sigma}_{\pi}(\varphi\, \mathrm{d}g)$$
$$= \sum_{[\gamma]^{\sigma}_{\Gamma} \in [\Gamma]^{\sigma}} \mathrm{vol}(G^{\sigma}_{\gamma}/\Gamma^{\sigma}_{\gamma}) \int_{G/G^{\sigma}_{\gamma}} \varphi(g\gamma g^{-\sigma})\, \mathrm{d}\dot{g}.$$

Ici $\mathrm{vol}(G_\gamma^\sigma/\Gamma_\gamma^\sigma)$ est le volume de $G_\gamma^\sigma/\Gamma_\gamma^\sigma$, les mesures étant normalisées par:

$$\int_G \varphi(g)\,\mathrm{d}g = \int_{G/G_\gamma^\sigma}\int_{G_\gamma^\sigma} \varphi(gx)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\dot{g}$$

$$\int_{G_\gamma^\sigma} \psi(g)\,\mathrm{d}g = \int_{G_\gamma^\sigma/\Gamma_\gamma^\sigma}\left(\sum_{\tau\in\Gamma_\gamma^\sigma} \psi(g\tau)\right)\mathrm{d}\dot{g}$$

De plus le choix des mesures de Haar à gauche sur G et G_γ^σ est libre.

On a fait également un choix de $A(\sigma)$ pour chaque $\pi\in\hat{G}^\sigma$ qui détermine une représentation π^+ de $\sigma\ltimes G$ et Θ_π^σ désigne son caractère tordu. On a noté enfin $m^+(\pi,\Gamma)$ la multiplicité de π^+ dans la représentation de $\sigma\ltimes G$ dans $L^2(G/\Gamma)$ et $m^-(\pi,\Gamma)$ la multiplicité de la représentation π^- de $\sigma\ltimes G$ construite avec $-A(\sigma)$.

8.2. On revient aux notations du §2 avec en outre $G=G(\mathbb{C})$ semi-simple

Afin d'utiliser les résultats de Bouaziz on se conforme à ses choix de mesures de Haar sur G et G_γ^σ (cf. [7], §1.3) (et en particulier sur $G(\mathbb{R})$).

On définit $Z^1(\sigma,\Gamma)=\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma\gamma^\sigma=e\}$ qui est invariant par σ-conjugaison par Γ. On note $H^1(\sigma,\Gamma)$ le quotient de $Z^1(\sigma,\Gamma)$ par la relation d'équivalence définie par la σ-conjugaison par les éléments de Γ. On procède de même pour G.

THEOREME 3. *On suppose que $G(\mathbb{R})$ a des séries discrètes et que $H^1(\sigma,G)=\{e\}$. On suppose Γ sans torsion (et cocompact). Soit $\mu\in\hat{T}$ avec μ dominant. On fait le choix de l'action de $A(\sigma)$ sur $\pi_{\mu,0}$ comme au lemme 5 pour définir $\pi_{\mu,0}^+$. On suppose qu'il existe une représentation de dimension finie F_V de $\sigma\ltimes G(\mathbb{C})$ de même caractère infinitésimal que $\pi_{\mu,0}$. On a F_V de la forme $(\pi\otimes\pi^\sigma, V\otimes V)$ avec (π,V) représentation holomorphe de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$, dont on suppose le plus haut poids régulier. Alors $\pi_{\mu,0}$ relève un L-paquet de séries* ***discrètes*** *de $G(\mathbb{R})$ et:*

$$|m(\pi_{\mu,0}^+)-m(\pi_{\mu,0}^-)| = d_\mu \sum_{([\gamma]_\Gamma^\sigma\in H^1(\sigma,\Gamma))} (\mathrm{vol}\ G_\gamma^\sigma/\Gamma_\gamma^\sigma)$$

où d_μ est la dimension formelle des séries discrètes de $G(\mathbb{R})$ relevées par $\pi_{\mu,0}$, calculée avec notre choix de mesure de Haar sur $G(\mathbb{R})$.

DEMONSTRATION. On remarque d'abord, comme nous l'a signalé le referee, que nos hypothèses impliquent que $\pi_{\mu,0}$ relève un L-paquet de séries discrètes de $G(\mathbb{R})$. En effet, l'image naturelle de $W(\mathbb{C})$ dans $H^1(\sigma,H(\mathbb{C}))=\{t\in T, t^2=1\}$ est surjective car $H^1(\sigma,G)=\{e\}$ (cf. [4], th. 1). Mais on a vu que si t est dans l'image naturelle de $W(\mathbb{C})$ dans $H^1(\sigma,H(\mathbb{C}))$, $t^{\mu+2\rho}=1$ (cf. §7.7). Donc $\frac{1}{2}\mu+\rho$ est la différentielle d'un caractère de T. D'où l'assertion sur $\pi_{\mu,0}$ (cf. [8]).

On va appliquer la formule des traces tordues à une fonction bien choisie. On

choisit $\varphi \in C_c^\infty(G)$, K-finie telle que

$$\Theta^\sigma_{\mu,0}(\varphi) = 1 \quad \text{et} \quad \Theta^\sigma_{\mu',\lambda'}(\varphi) = 0$$

pour tout (μ', λ') qui n'est pas de la forme $(w\mu, 0)$, $w \in W$. Un tel choix est possible d'après le théorème 1. On peut même choisir le support de φ aussi petit que l'on veut (i.e. contenu dans $K \exp B_r$ avec $r > 0$ fixé à l'avance).

Si $\Theta^\sigma_\pi(\varphi) \neq 0$, cela implique que π a le même caractère infinitesimal que $\pi_{\mu,0}$. Mais alors, d'après [16], π est unitairement induite à partir d'un caractère unitaire χ_P d'un sous-groupe parabolique P de $G(\mathbb{C})$. On peut supposer que P contient B. Plus précisément on note Σ une base du système de racines de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ tel que Σ soit contenue dans l'ensemble Δ^+ des racines de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ dans le radical unipotent de l'algèbre de Lie de B, n.

On peut supposer qu'il existe $\Sigma_P \subset \Sigma$ tel que $P = LN_P$ avec L le centralisateur dans $G(\mathbb{C})$ de $\bigcap_{\alpha \in \Sigma_P} \operatorname{Ker} \alpha = \mathfrak{h}_P$.

On note H_P le sous-groupe analytique de $G(\mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_P$. On note $\mathfrak{m}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{l}$ engendrée par les sous espaces radiciels de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ correspondant à Σ_P et $-\Sigma_P$. Alors $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_P$. On note $\mathfrak{h}^P = \mathfrak{h}(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{t}_P = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_P$, $\mathfrak{t}^P = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}^P$ etc. On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^P \oplus \mathfrak{h}_P$ etc. et de même pour les duaux.

On a χ_P trivial sur $N_P = N \cap P$. De plus, sa différentielle est nulle sur $\mathfrak{m}$ et définit un élement $\mu_P \oplus \lambda_P$ de $(\mathfrak{t}_P^*)_\mathbb{C} \oplus (\mathfrak{a}_P^*)_\mathbb{C}$. On identifie $\mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$, $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ à $\mathfrak{h}^*$ comme dans [16]. Alors il n'est pas difficile de voir, en réalisant la représentation triviale de M dans une série principale et en induisant par étage, que π est une sous représentation de $\pi_{\mu_P, \lambda_P - 2\rho_\mathfrak{m}}$ où $\rho_\mathfrak{m}$ est la restriction à $\mathfrak{a}$ de la demi-somme des racines de $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}$.

On identifie le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}(\mathbb{C})_\mathbb{C}$ à $S(\mathfrak{h}(\mathbb{C}) \times \mathfrak{h}(\mathbb{C}))^{W(\mathbb{C}) \times W(\mathbb{C})}$ comme dans [16], II, 1.9. Alors le paramètre du caractère infinitésimal de π dans cette identification est:

$$(\tfrac{1}{2}(\lambda_P - 2\rho_\mathfrak{m} + \mu_P), \tfrac{1}{2}(\lambda_P - 2\rho_\mathfrak{m} - \mu_P)) \in \mathfrak{h}(\mathbb{C})^* \times \mathfrak{h}(\mathbb{C})^*.$$

Celui de $\pi_{\mu,0}$ est de paramètre

$$(\tfrac{1}{2}\mu, \tfrac{1}{2}\mu).$$

Mais λ_P est imaginaire sur $\mathfrak{a}$ donc réel sur $\mathfrak{t}$ alors que μ, $\rho_\mathfrak{m}$, μ_P sont imaginaires pures sur $\mathfrak{t}$. De plus, l'action de $W(\mathbb{C})$ préserve ces propriétés. Comme π et $\pi_{\mu,0}$ sont même caractère infinitésimal on a: $\lambda_P = 0$ et $\exists w, w' \in W(\mathbb{C})$:

$$\mu_P - 2\rho_M = w\mu$$

$$\mu_P + 2\rho_M = w'\mu.$$

Si f_V est le poids dominant de V, on sait que

$$\mu = 2(f_V + \rho).$$

Comme f_V est supposé de plus régulier on en déduit que $|\mu_\alpha| > 2$, $\forall \alpha \in \Delta$. Supposons Σ_P non vide et soit $\alpha \in \Sigma_P$. Alors $(\mu_P - 2\rho_{\mathfrak{m}})_\alpha = -2 = (w\mu)_\alpha = \mu_{w^{-1}\alpha}$. D'où une contradiction qui montre que Σ_P est vide et que $P = B$. Alors $\rho_{\mathfrak{m}} = 0$ et $\pi \approx \pi_{\mu,0}$.

Avec ce choix de φ, le ler membre de la formule des traces tordues est égal à

$$\mathfrak{m}(\pi^+_{\mu,0}) - \mathfrak{m}(\pi^-_{\mu,0}).$$

Etudions le deuxième membre de la formule des traces tordues. Si $g \in G$, on définit $r(g) = \|X\|$ où $g = k \exp X$ avec $k \in K$, $X \in \mathfrak{p}$. On sait que r vérifie:

$$r(gg') \leqslant r(g) + r(g').$$

De plus: $r(\sigma(g)) = r(g)$.

Si $x \in G$, on note $l(x) = \inf_{g \in G} r(gxg^{-1})$ qui ne dépend que de la classe de conjugaison de x dans G. On sait que (cf. [14], démonstration du théorème 2.1):

$$r_\Gamma = \tfrac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma - \{e\}} l(\gamma) > 0.$$

On prend φ à support dans B_{r_Γ}. Soit $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ avec $\varphi(g\gamma g^{-\sigma}) \neq 0$. On a alors $g\gamma g^{-\sigma} \in B_{r_\Gamma}$. D'où

$$\begin{aligned} l(\gamma\gamma^\sigma) &\leqslant r(g\gamma\gamma^\sigma g^{-1}) = r(g\gamma g^{-\sigma}\sigma(g\gamma g^{-\sigma})) \\ &\leqslant r(g\gamma g^{-\sigma}) + r(\sigma(g\gamma g^{-\sigma})) = 2r(g\gamma g^{-\sigma}) \\ &< 2r_\Gamma. \end{aligned}$$

Par définition de r_Γ on en déduit $\gamma\gamma^\sigma = e$. Par ailleurs, si $\gamma\gamma^\sigma = e$, comme $H^1(\sigma, G) = \{e\}$, γ est σ-conjugué à e dans G. D'où:

$$\int_{G/G^\sigma_\gamma} \varphi(g\gamma g^{-\sigma})\,\mathrm{d}\dot{g} = \int_{G/G(\mathbb{R})} \varphi(gg^{-\sigma})\,\mathrm{d}\dot{g}.$$

Le second membre de la formule des traces tordues s'écrit donc

$$\left(\sum_{[\gamma]^\sigma_\Gamma \in H^1(\sigma,\Gamma)} \mathrm{vol}(G^\sigma_\gamma/\Gamma^\sigma_\gamma)\right) \int_{G/G(\mathbb{R})} \varphi(gg^{-\sigma})\,\mathrm{d}\dot{g}.$$

Mais on sait que la mesure sur $G/G(\mathbb{R})$ relève au signe près la mesure de Dirac de $G(\mathbb{R})$ (d'après [8], Corollaire 7.4). Alors, comme $\pi_{\mu,0}$ relève un L-paquet de série discrète, on a bien

$$\int_{G/G(\mathbb{R})} \varphi(gg^{-\sigma})\,\mathrm{d}\dot{g} = \pm d_\mu.$$

En égalant les deux membres de la formule des traces tordues on a le théorème.

Bibliographie

[1] Arthur, J., Clozel, L., Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula, *Annals of Math. Studies* n° 120, Princeton University Press, Princeton (1989).

[2] Atyah, M., Schmid, W., A geometric construction of the discrete series for semi-simple Lie groups. *Invent. Math.* 42, 1–62 (1977).

[3] Borel, A., Wallach, N., Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups, *Annals of Math. Studies* 94, Princeton University Press, Princeton (1980).

[4] Borovoi, M.V., Cohomologies of real reductive groups and real forms, *Func. Anal. and Applic.* 22, 135–136 (1988).

[5] Bouaziz, A., Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes, *J. of Funct. Anal.* 70, 1–79 (1987).

[6] Bouaziz, A., Relèvement des caractères de'un groupe endoscopique pour le changement de base $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, in Astérisque n° 171–172, 163–194 (1989).

[7] Bouaziz, A., Formule d'inversion d'intégrales orbitales tordues, à paraître dans *Compositio Mathematica.*

[8] Clozel, L., Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels, *Ann. Sc. E.N.S.* 15, 45–115 (1982).

[9] Clozel, L., Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de GL(n), preprint.

[10] Clozel, L., Delorme, P., Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, *Invent. Math.* 77, 427–453 (1984).

[11] Clozel, L., Delorme, P., Pseudo-coefficients et cohomologie des groupes réductifs réels, C.R.A.S. Paris, t.300, Ser. I, n° 12, 385–387 (1985).

[12] Clozel, L., Delorme, P., Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, II, *Ann. Sc. E.N.S.* 23, 193–228 (1990).

[13] Cowling, M., On the Paley-Wiener theorem, *Inv. Math.* 83, 403–404 (1986).

[14] De George, D., Wallach, N., Limit formulas for multiplicities in $L^2(G/\Gamma)$, *Ann. of Math.* 107, 133–150 (1978).

[15] Delorme, P., Flensted Jensen, M., Towards a Paley-Wiener theorem for semisimple symmetric spaces, à paraître dans, *Acta Mathematica.*

[16] Duflo, M., Représentations irréductibles des groupes de Lie semi-simples complexes, *Lecture Notes in Math.* 497, Springer, 26–87 (1975).

[17] Duflo, M., Heckman, G., Vergne, M., Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner, in Mémoire de la S.M.F. n° 15, 65–128 (1984).

[18] Enright, T., Relative Lie algebra cohomology and unitary representations of complex Lie groups, *Duke Math. J.* 46, 513–525 (1979).

[19] Labesse, J.P., Formule des traces tordues et représentations σ-discrètes, preprint.

[20] Labesse, J.P., Pseudo-coefficients très cuspidaux et K-théorie, preprint.

[21] Preiss Rothschild, L., Orbits in a real reductive Lie algebra, *Transact. Amer. Math. Soc.* 168, 403–421 (1972).

[22] Rohlfs, J., Speh, B., Automorphic representations and Lefschetz numbers, *Ann. Sc. E.N.S.* 22, 473–499 (1989).
[23] Shelstad, D., Endoscopic groups and base change $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, *Pacif. J. Math.* 110, 396–416 (1984).
[24] Shelstad, D., Orbital integrals, endoscopic groups and L-indistinguishability for real groups, in Journées Automorphes, *Publ. Math. Univ. Paris VII*, Paris 135–219.
[25] Steinberg, R., Regular elements of semisimple algebraic groups, Inst. Hautes Etudes Sci., *Publ. Math.* 25, 49–80 (1965).
[26] Vogan, D., Représentations of real reductive groups, *Progress in Math.*, Birkhäuser (1981).
[27] Wallach, N., Harmonic analysis on homogeneous spaces, Marcel Dekker, New York (1972).
[28] Warner, G., Harmonic analysis on semisimple Lie groups, Vol. I, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1972).