COMPOSITIO MATHEMATICA

JAN FEUSTEL

Eine Klassenzahlformel für singuläre Moduln der Picardschen Modulgruppen

Compositio Mathematica, tome 76, nº 1-2 (1990), p. 87-100

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1990__76_1-2_87_0>

Compositio Mathematica **76**: 87–100, 1990.

Eine Klassenzahlformel für singuläre Moduln der Picardschen Modulgruppen

JAN FEUSTEL

Akademie der Wissenschaften der DDR, Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik, Mohrenstraße 39, DDR-1086 Berlin

Received 3 December 1988; accepted in revised form 6 February 1990

Es ist altbekannt, daß die elliptische Invariante $J(\tau)$ den Körper der Modulfunktionen auf der oberen Halbebene bzgl. $\mathrm{Sl}_2(Z)$ erzeugt und auf den Punkten $\tau \in H$, die imaginär-quadratische Zahlkörper erzeugen (und damit Fixpunkte von Elementen aus $\mathrm{Gl}_2^+(Z)$ sind), algebraische Werte annimmt. Durch Zuordnung dieser Punkte τ mit $Q(\tau) = K$ zu Idealen in Ordnungen des imaginär-quadratischen Zahlkörpers K erhalten wir mit der 'Klassengleichung' eine algebraische Gleichung für $J(\tau)$ mit rationalen Koeffizienten. In diesem Zusammenhang sei erinnert, daß $J(\tau)$ zusammen mit der Weierstraßschen $\wp$-Funktion der zugehörigen elliptischen Kurve E_τ alle Abelschen Erweiterungen von $Q(\tau)$ erzeugt ('Kroneckers Jugendtraum').

Hecke verallgemeinerte in seiner Dissertation [3] diese Theorie auf die Wirkung der Hilbertschen Modulgruppe $\mathrm{Sl}_2(o_k)$ (k reell-quadratischer Zahlkörper) auf das Produkt zweier oberer Halbebenen (siehe Kapitel III).

Für die komplexe Kugel B und die Picardsche Modulgruppe $U((2,1), o_K) = \Gamma_K$ (wobei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ist) lagen bis vor kurzer Zeit keine einschlägigen Ergebnisse vor. In seiner Arbeit [4] bestimmte Holzapfel erstmals den Ring der automorphen Formen bzgl. Γ_K und einiger Untergruppen für $K = Q(\sqrt{-3})$.

Der Ring dieser automorphen Formen von Γ_K wird erzeugt durch Formen G_i vom Gewicht i ($i = 2, 3, 4$) (exakter: der Ring der automorphen Formen von Γ_K bzgl. eines Twistes mit einem Charakter). Dabei sind die G_i die elementarsymmetrischen Funktionen $\sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant 4} X_{j_1} \cdots X_{j_i}$ für gewisse automorphe Formen einer Kongruenzuntergruppe von Γ_K (genauer für $\Gamma_K(\sqrt{-3}) = \{\gamma \in \Gamma_K \mid \det \gamma = 1, \gamma \equiv \mathrm{Id} \bmod \sqrt{-3}\}$), die sich nach den Ergebnissen von Shiga [10] und dem Autor [1] als Summen von Theta-Nullwerten auf $\mathscr{H}^3$ (obere Siegelsche Halbebene) mit einer automorphen Einlagerung $\eta\colon B \hookrightarrow \mathscr{H}^3$ und explizit bekannter Charakteristik darstellen lassen (exakt: $X_1 = \varphi_1^3 + \varphi_2^3 + \varphi_3^3$, $X_j = X_1 - 4\varphi_{j-1}^3$ für $2 \leqslant j \leqslant 4$, φ_j Theta-Nullwert).

Shiga zeigt nun auf analytischem Weg, daβ für alle τ, für die ein

$$\gamma \in \left\{ \gamma' \in M_3(o_K) | {}^t\gamma' \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \bar{\gamma}' = p^2 \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}, p \text{ träge in } K/Q \right\}$$

existiert, so daβ τ isolierter Fixpunkt von γ ist, die Modulfunktionen

$$\delta_1 = \frac{G_3^2}{G_3^2} \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{G_2^2}{G_4}$$

von Γ_K algebraische Werte annehmen [11]. Holzapfel komplettiert das Resultat für alle singulären Moduln z, d.h. $\{z \in B \mid \exists \gamma \in U((2,1) m\, K)$: z isolierter Fixpunkt von $\gamma\}$; der Beweis arbeitet algebraisch-geometrisch und ist 'unkonstruktiv', d.h. liefert keinerlei Aussagen, in welchem Zahlkörper die Werte der Modulfunktionen liegen.

Das stellt natürlich erst einmal folgendes Programm auf: Zuerst wird eine arithmetische Charakterisierung aller singulärer Moduln für beliebiges imaginär-quadratisches K gesucht (Kapitel I).

Zweitens soll eine Zuordnung von gewissen singulären Moduln und Untergruppen von Idealklassengruppen von CM-Körpern $L \supset K$ mit $[L:K] = 3$ gegeben werden (Kapitel III). Die Klassifizierungsaufgabe der singulären Moduln würde für Picardsche Modulgruppen von der analogen aufgabe für Hilbertsche Modulgruppen, die in der Klassengleichung auftritt, abgelesen.

Von Interesse sind die automorphen Formen φ_i^3 bzw. G_i auch dadurch, daβ sie die Umkehrung von Picards Abbildung ([7], [8]) vermitteln (siehe [5]):

Fur

$$\Lambda = \{(a_1' : a_2' : a_3') | a_i' \neq 0,\ a_i' \neq a_j' \forall\, i, j,\ i \neq j\} \subset P_2(C)$$

und

$$\xi = (a_1 : a_2 : a_3) \in \Lambda \text{ sei } C_\xi \colon Y^3 = X \prod_{i=1}^{3} (X - a_i)$$

die zugehörige Picard-Kurve (vom Geschlecht 3 und mit K-Multiplikation).

Die Periodenmatrix von C bzgl. einer bis auf Monodromie von Λ fixierten Basis liefert eine mehrdeutige Abbildung in $\mathscr{H}^3$; bzgl. der oben erwähnten automorphen Einlagerung η: $B \hookrightarrow \mathscr{H}^3$ liegt das Bild in B, und die 'Monodromie-Gruppe' is gerade $\Gamma_K(\sqrt{-3})$, d.h. $\Phi\colon \Lambda \to B/\Gamma_K(\sqrt{-3})$ ist eindeutig, wobei $\operatorname{Im} \Phi =$
$B/\Gamma_K(\sqrt{-3}) \setminus D \cdot \Gamma_K/\Gamma_K(\sqrt{-3})$ für $D = \{(a, 0) \,\|\, a \backslash < 1\} \subset B$.

Die Umkehrung von Φ wird durch die drei Modulformen φ_i^3 vermittelt, und bei geeigneter Normierung der Nullstellen von $C_{\Phi^{-1}(\mathfrak{z})}$ gilt

$$C_{\Phi^{-1}(\mathfrak{z})}\colon Y^3 = \prod_{i=1}^{4} (X - X_i(\tau)) = X^4 + G_2X^2 + G_3X + G_4, \qquad \sum_{i=1}^{4} X_i(\mathfrak{z}) = 0,$$

d.h. die oben genannten G_i treten als Koeffizienten auf.

Im zweiten Kapitel wird nun nach Aussagen über $C_{(\varphi_1^3(\mathfrak{z}):\varphi_2^3(\mathfrak{z}):\varphi_3^3(\mathfrak{z}))}$ gefragt, speziell über die Einfachheit der Jacobischen.

0. Definitionen

Sei $B = \{(c_1, c_2) | c_i \in C, |c_1|^2 + |c_2|^2 < 1\} \subset C^2$ die zwei-dimensionale komplexe Einheitskugel, so wirkt $U((2,1), C)$ 'gebrochen rational' auf B, d.h. sei C^2 in $P_C^2 = PC^3$ eingelagert durch $\varphi(c_1, c_2) = (c_1 : c_2 : 1)$, so wirkt $U((2, 1), C)$ linear auf P_C^2, und für $\tau \in B$, $\gamma \in U((2, 1), C)$ gilt $\gamma \cdot \tau = \varphi^{-1} \cdot \gamma \cdot \varphi(\tau)$. Sei auf C^3 bzgl. Einer fixierten Basis die hermitesche Form $\langle\ ,\ \rangle$ durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$$

gegeben, d.h. $U((2, 1), C) = U(\langle\ ,\ \rangle, C)$. Sei K imaginär-quadratischer Zahlkörper und K^3 in C^3 bzgl. dieser Basis eingelagert, so ist o_K^3 ein hermitesches, unimodulares Gitter bzgl. $\langle\ ,\ \rangle$ und $U((2, 1), o_K) = \Gamma_K$ seine Automorphismengruppe (Isometrien), eine arithmetische Untergruppe von $U((2, 1), C)$, die auf B eigentlich diskontinuierlich wirkt.

Für $z = (z_1, z_2) \in B$ ist $\tilde{z} = {}^t(z_1, z_2, 1) \in C^3$, d.h. $\varphi z = \varphi \tilde{z}$.

Sei $z = (z_1, z_2) \in B$ algebraisch, d.h. $Q(z_1, z_2)$ algebraischer Zahlkörper und σ ein Automorphismus eines normalen Zahlkörpers über $Q(z_1, z_2)$, so ist $\tilde{z}^\sigma = {}^t(z_1^\sigma, z_2^\sigma, 1)$. $z \in B$ heiβt K-singulärer Modul, falls ein $\gamma \in U((2, 1), K) = U_K$ existiert, für das z isolierter Fixpunkt ist.

I. Arithmetische Charakterisierung singulärer Moduln

LEMMA 1. *Sei L/K ein CM-Körper, K imaginär-quadratisch, so existiert ein $v \in L$ mit $v\bar{v} = 1$, $K(v) = L$.*

Beweis. Sei $m \in L$ mit $L = K(m)$, $m \neq \bar{m}$ (falls $m = \bar{m}$, so gehen wir zu

$m' = m + \kappa$, $\kappa \in K$, $\kappa \neq \bar{\kappa}$ über) und $\exists r \in \bar{N}$:

$$K\left(\frac{m}{\bar{m}}\right) = K\left(\frac{m+r}{\bar{m}+\varphi}\right)$$

(da nur endlich viele Zwischenkörper existieren). Wir nehmen an, daβ aus $v \in L$, $v\bar{v} = 1$ folgt $K(v) \neq L$. Sei

$$v_1 = \frac{m}{\bar{m}}, \qquad v_2 = \frac{m+r}{\bar{m}+r},$$

so gilt $v_i \bar{v}_i = 1$ $(i = 1, 2)$ und $K(v_1) = K(v_2) = M \nsubseteq L$. Also existieren $n_1, n_2 \in M$ mit $m = n_1 \bar{m}$, $m + r = n_2(\bar{m} + r)$ und damit $m(1 - (n_1/n_2)) = ((n_1/n_2) - n_1)r$. Da $m \notin M$, ist $n_2 = 1$, $n_2 = n_1$ und damit $m = \bar{m}$, ein Widerspruch. □

THEOREM 1. *Sei $z = (z_1, z_2) \in B$, so ist z ein K-singulärer Modul genau dann, wenn für $L_z = K(z_1, z_2)$ und M_z, den Galoisabschluβ von L über K, gilt*

(1) $[L_z : K] \leqslant 3$
(2) *L_z ist CM-Körper*
(3) *Für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(M_z/K)$, $\sigma|_L \neq Id$ gilt $\langle \tilde{z}, \tilde{z}^\sigma \rangle = 0$.*

Beweis. ⇒Sei $\gamma \in U_K$ mit $\gamma z = z$, z isolierter Fixpunkt von γ, so ist $\gamma\tilde{z} = \lambda\tilde{z}$, λ erfüllt das charakteristische Polynom von γ und $\lambda\bar{\lambda} = 1$.

Daraus folgt sofort wegen der Einfachheit des Eigenwertes λ von γ (z ist isolierter Fixpunkt von γ!) $L_z = K(\lambda)$ und damit $[L_z : K] \leqslant 3$.

Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(M_z/K)$ wie in 3) gewählt, so ist λ^σ Eigenwert von γ mit Eigenvektor $\tilde{z}^\sigma$, und damit gilt $\lambda^\sigma\bar{\lambda}^\sigma = 1$. Die λ^σ dieser Form erzeugen M_z, und es gilt $\bar{\lambda}^\sigma = 1/\lambda^\sigma = (1/\lambda)^\sigma = (\bar{\lambda})^\sigma$ Damit kommutiert die komplexe Konjugation mit allen Einlagerungen von L_z in C, und es ist L_z CM-Körper nach dem Kriterium aus [6] S.6.

Weiterhin ist $\langle \tilde{z}, \tilde{z}^\sigma \rangle = \langle \gamma\tilde{z}, \gamma\tilde{z}^\sigma \rangle = \lambda\bar{\lambda}^\sigma \langle \tilde{z}, \tilde{z}^\sigma \rangle = \lambda/\lambda^\sigma \langle \tilde{z}, \tilde{z}^\sigma \rangle$, und da wegen $\sigma|_{L_z} \neq \mathrm{Id}$ $\lambda \neq \lambda^\sigma$ ist, gilt $\langle \tilde{z}, \tilde{z}^\sigma \rangle = 0$.

⇐Wir müssen Fallunterscheidungen machen:

(a) $L_z = K$: Sei γ gegeben durch $\gamma\tilde{z} = \tilde{z}$, $\gamma|_{\tilde{z}} \perp = -\mathrm{Id}$, so ist $\gamma K^3 = K^3$ und $\langle \delta\tilde{c}, \gamma\tilde{c} \rangle = \langle \tilde{c}, \tilde{c} \rangle$ für alle $\tilde{c} \in K^3$, also ist $\gamma \in U_K$ und $\tilde{z}$ isolierter Fixpunkt von γ.

(b) $[L_z : K] = 2$. Damit ist L_z normal über K und $\mathrm{Gal}(L_z/K) = (1, \sigma)$. Es gilt offensichtlich $\{\tilde{z}, \tilde{z}^\sigma\}^\perp = \tilde{z}^\perp \cap \tilde{z}^{\sigma\perp} = C\tilde{v}$, $\tilde{v} \in K^3$. Sei γ gegeben durch $\gamma\tilde{z} = \lambda\tilde{z}$, $\gamma\tilde{z}^\sigma = \lambda^\sigma\tilde{z}^\sigma$ und $\gamma\tilde{v} = \tilde{v}$, wobei λ nach Lemma 1) gewählt ist mit $\lambda\bar{\lambda} = 1$, $L_z = K(\lambda)$. Man sieht unmittelbar, daβ $(L_z\tilde{z} \oplus L_z\tilde{z}^\sigma) \cap K^3 = \{\rho\tilde{z} + \rho^\sigma\tilde{z}^\sigma | \rho \in L_z\}$ und damit γ. $K^3 = K^3$, auβerdem gilt wegen $\langle \gamma\tilde{c}, \gamma\tilde{c} \rangle = \langle \tilde{c}, \tilde{c} \rangle$ für alle $\tilde{c} \in C^3$ $\gamma \in U_K$ (da $\tilde{z}$, $\tilde{z}^\sigma$ und $\tilde{v}$ eine Basis von C^3 bilden), und z ist isolierter Fixpunkt von γ.

(c) $[L_z : K] = 3$. Es ist $[M_z : K] = 6$ oder 3, denn M_z ist Zerfällungskörper eines Polynoms vom Grade 3 über K. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(M_z/K)$ gegeben mit $\mathrm{ord}\,\sigma = 3$ und damit $\sigma|_{L_z} \neq \mathrm{Id}$. Sei $\lambda \in L_z$ wieder nach Lemma 1) gewählt, so sei γ gegeben durch $\gamma\tilde{z}^{\sigma j} = \lambda^{\sigma j} \cong \sigma^j$ $(j = 0, 1, 2)$. Dabei ist $K^3 = \{\sum_{j=0}^{2} \rho^{\sigma^j}\tilde{z}^{\sigma^j} | \rho \in L_z\}$, ergo $\gamma K^3 = K^3$ und $\langle\gamma\tilde{c}, \gamma\tilde{c}\rangle = \langle\tilde{c}, \tilde{c}\rangle$ für alle $\tilde{c} \in C^3$, d.h. $\gamma \in U_K$ und z ist isolierter Fixpunkt von γ (denn wegen $\langle\tilde{z}^{\sigma^j}, \tilde{z}^{\sigma^i}\rangle = 0$ für $i \neq j$ sind die z^j eine Basis von C^3). □

PROPOSITION 1: *Sei L CM-Körper mit $K \subset L, [L:K] \leqslant 3$, so existiert ein K-singulärer Modul z mit $L_z \simeq L$.*

Beweis. $[L:K] = 2$: Da L CM-Körper ist, ist L biquadratisch, $L = K(\sqrt{\kappa})$, $\kappa \in Q, \kappa > 0$. Sei $\omega = \sqrt{-d} + \sqrt{\kappa} + 1$ für $K = Q(\sqrt{-d})$, sei weiterhin $\lambda = \omega/\bar{\omega}^\sigma$ sowie φ: $L \hookrightarrow C$ als Einlagerung so vorgegeben, daß $\sqrt{\kappa} < 0$; es ist $\omega\bar{\omega} - \bar{\omega}^\sigma\omega^\sigma = 4\sqrt{\kappa} \neq 0$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Es gilt wegen $\lambda\bar{\omega}^\sigma = \lambda(1 - \sqrt{-d}) - \lambda\sqrt{\kappa} = 1 + \sqrt{-d} + \sqrt{\kappa} = \omega$ sichtlich $\lambda \notin K$, also $L = K(\lambda)$. Man sieht unmittelbar, daß für $\tilde{z} = (\frac{3}{5}\lambda, \frac{4}{5}\lambda, 1) \in C^3$ gilt $\langle\tilde{z}, \tilde{z}\rangle = \lambda\bar{\lambda} - 1 < 0, \langle\tilde{z}, \tilde{z}^\sigma\rangle = 0$, d.h. z ist K-singulärer Modul.

$[L:K] = 3$: Hier wird der Beweis komplizierter, da sich keine explizite Erzeugung von L/K angeben läßt, die 'handhabbar' ist.

Sei $\{z_i\}$ eine K-Basis von L (als Vektorraum), $i = 1, 2, 3$, so setzen wir $H = (z_j^{\sigma^{(i-1)}}) \in M_3(L)$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$, ord $\sigma = 3$. (M sei wieder der Galoisabschluß von L/K).

Sei $k = L \cap R$, so setze ich für

$$\rho' \in kH_{\rho'} = \begin{bmatrix} \rho' & 0 & 0 \\ 0 & \rho'^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \rho'^{\sigma^2} \end{bmatrix} \in M_3(L).$$

Es existiert ein $\rho \in k$ mit $\mathrm{Tr}\,\rho = 0$, o.B.d.A. sign $H_\rho = (2, 1)$ Wir setzen nun $\rho^* = \rho(-N_{k/Q}(\rho)^{-1} \det H \overline{\det H})$.

Es gilt für $N = {}^t\bar{H}H_{\rho^*}^{-1}H$:

(1) $N = (\mathrm{Tr}_{L/K}(\bar{z}_i z_j/\rho^*)) \in M_3(K)$

(2) sign N = sign $M_{\rho^*} = (2, 1)$

(3) $\det N = -(N_{k/Q}(\rho)/(\det H \overline{\det H}))^2 \equiv -1 \mod N_{K/Q}(K)$ (denn $\det H \overline{\det H} = \det {}^tH\bar{H} = \det(\mathrm{Tr}_{L/K}\, \bar{z}_i z_j) \in K \cap R = Q$.)

Nun sieht man aber sofort, daß dieselben Eigenschaften (1)–(3) auch für $N^{-1} = H^{-1}H_{\rho^*}{}^t\bar{H}^{-1}$ gelten, und nach dem Satz von Landherr (siehe [14], Kap. 10, §1, 1.6: (iv)). gilt nun

$$N^{-1} \underset{\mathrm{Gl}_3(K)}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{d.h. } N^{-1} = A\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}{}^t\bar{A},$$

$A \in \mathrm{Gl}_3(K)$. Sei nun $(z_1, z_2, z_3)\ A = r(z_1', z_2', 1)$, $r, z_1', z_2' \in L$, so ist $(z_1', z_2') \in B$ K-singulärer Modul nach Theorem 1). □

II. Singuläre Moduln und Abelsche Mannigfaltigkeiten

Shimura hat in seinen Arbeiten [12] und [13] gezeigt, wie jedem imaginär-quadratischen Zahlkörper K und jedem Punkt $z \in B$ eine Abelsche Mannigfaltigkeit A_z mit Polarisierung Θ_z und einer mit Θ_z verträglichen Darstellung φ_z: $K \hookrightarrow \mathrm{End}^0 A_z = (\mathrm{End}\, A) \otimes_Z Q$ zugeordnet wird. Diese Zuordnung ist eindeutig mod Γ_K.

Dies geschieht auf folgende Weise:

$$\text{Sei } M = o_K^3 \subset K^3, \qquad T = \frac{1}{w}\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \text{ mit } w\sqrt{-1} > 0 \text{ und } (w) = \partial_{K/Q}$$

(Differente von K/Q, wobei diese stets Hauptideal in $\mathfrak{I}(K)$ ist) sowie h eine komplexe Struktur auf $M \otimes_Z R$ (M als Z-Gitter der Dimension 6 aufgefaßt), so daß ${}^t\bar{h}$ hermitesch positiv definit ist. h ist dabei durch seinen $(-i)$-Eigenraum eindeutig bestimmt, d.h. durch dessen normierte Basis ${}^t(z_1, z_2, 1)$, $(z_1, z_2) = z \in B$ (und somit $h = h_z$). Dann sei $(M \otimes_Z R)^{h_z}$ der dreidimensionale C-Vektorraum, dessen Struktur von h_z herrührt, und $A_z = (M \otimes_Z R)^{h_z}/M \simeq C^3/\Lambda_z$. Die Riemannsche Form (und damit die Polarisierung Θ_z) ist durch $\mathrm{Tr}^t_{K/Q}\alpha T\bar{\mathscr{C}}(\alpha, \mathscr{C} \in K^3 \subset C^3)$ gegeben, φ_z durch die gewöhnliche skalare Multiplikation in K^3.

Man macht sich klar, daß $(A_z, \Theta_z, \varphi_z) \simeq (A_z', \Theta_z', \varphi_z')$ genau dann gilt, wenn ein $\gamma \in \Gamma_K$ existiert mit $\gamma z = z'$.

Im weiteren sei $(A_z, \Theta_z, \varphi_z)$ das zu $z \in B$ gehörige Shimura-Tupel genannt.

THEOREM 2. *Sei $z \in B$ K-singulärer Modul mit $[L_z : K] = 3$ und $(A_z, \Theta_z, \varphi_z)$ das zugehörige Shimura-Tupel.*

Dann ist A_z einfach, und es gilt $\mathrm{End}^0 A_z = L_z$.

Beweis. Sei $\gamma \in \mathrm{U}_K$ mit $\gamma z = z$, $\gamma \tilde{z} = \lambda \tilde{z}$, $L_z = K(\lambda)$. Da $\gamma z = z$, so kommutiert γ als lineare Abbildung auf C^3 mit h_z und liefert ergo eine lineare Abbildung auf $(M \otimes_Z R)^{h_z}$ mit den Eigenwerten $\bar{\lambda}$, λ^σ, λ^{σ^2} für $\sigma \in \mathrm{Gal}(M_z/K)$, ord $\sigma = 3$. Man sieht unmittelbar, daß $\gamma \in \mathrm{End}^0\,(A_z)$.

Nach Konstruktion hat $\varphi_z(\alpha)$ für $\alpha \in K$ die Eigenwerte $\bar{\alpha}$, α, α auf $(M \otimes_Z R)^{h_z}$, wobei die Eigenräume für $\bar{\lambda}$ und $\bar{\alpha}$ sowie für α und die direkte Summe derjenigen von λ^σ und λ^{σ^2} übereinstimmen, da $\gamma\, \Theta_z$ erhält.

Also existiert eine Darstellung Ψ_z: $L_z \hookrightarrow \mathrm{End}^0 A_z$ mit $\Psi_z|_K = \varphi_z$ und $\Psi_z(\lambda) = \gamma$. A_z mit dieser Darstellung Ψ_z ist in der Terminologie von Lang [6] also vom CM-Typ $\{L_z: \rho, \sigma, \sigma^2\}$ (ρ die komplexe Konjugation in $\mathrm{Gal}(M_z/Q)$). Für $S =$

$\{\rho, \sigma, \sigma^2\}$ gilt aber $\{\eta \in \mathrm{Gal}(M_z/Q) | S\eta = S\} = \mathrm{Id}$, und damit (nach Theorem 3.5 aus [6]) ist A_z einfach, und es gilt $\mathrm{End}^0 A_z = L_z$.

KOROLLAR 1. *Sei L CM-Körper über dem imaginär-quadratischen Zahlkörper K mit* $[L:K] \leqslant 3$, $D = \{(a, 0) | a < 1\}$, $D' = \Gamma_K \cdot D$, *so existiert ein* $z \in B \backslash D'$ *mit* $L_z \simeq L$; *falls* $[L:K] = 3$, *so liegt auf D kein z mit* $L_z \simeq L$.

Beweis. Man macht sich unmittelbar klar, daβ für $z \in D$ und damit auch für $z \in D' A_z$ in das Produkt zweier Abelscher Mannigfaltigkeiten zerfällt, denn auf $K^t(0, 1, 0)$ stimmen für $z \in D$ die skalaren Multiplikationen mit K, die von der natürlichen Struktur von K^3 bzw. von h_z herrühren, überein, also kann $C^t(0, 1, 0)/o_K{}^t(0, 1, 0)$ von A_z abgespalten werden. Nach Theorem 2) kann also für einen singulären Modul $z \in B$ mit $[L_z : K] = 3$ z nicht auf D' liegen.

Falls $[L:K] = 2$, so betrachten wir z aus dem Beweis von Proposition 1. Sei $z \in \tilde{D} = \{{}^t(a, 0, b) | a, b \in C\}$, so ist $\gamma \tilde{z}^\sigma = (\gamma \tilde{z})^\sigma$ ebenfalls in $\tilde{D}$, und $\gamma \tilde{z}$ und $\gamma \tilde{z}^\sigma$ spannen $\tilde{D}$ auf, d.h. $\tilde{D}^\perp = \langle \gamma \tilde{z}, \gamma \tilde{z}^\sigma \rangle^\perp = C\gamma^t(4, -3, 0)$. Es ist nun $\tilde{D}^\perp \cap o_K^3 = o_K^t(0, 1, 0)$, d.h. $\tilde{D}^\perp \cap o_K^3$ enthält einen Vektor der Länge 1.

Andererseits ist $C\gamma^t(4, -3, 0) \cap o_K^3 = (C^t(4, -3, 0) \cap o_K^3) = o_K \gamma^t(4, -3, 0)$, und dies enthält keinen Vektor der Länge 1, ein Widerspruch. □

KOROLLAR 2. *Sei* $z \in B$, *z singulärer Modul mit* $[L_z : K] = 3$, *so ist* $\mathrm{Jac}(C_{\Phi^{-1}(z)})$ einfach. (Zur *Terminologie siehe die Einleitung*!).

Beweis. Auf der Abelschen Mannigfaltigkeit $\tilde{A}_z = \mathrm{Jac}(C_{\Phi^{-1}(z)})$ ist eine kanonische Polarisierung $\tilde{\Theta}_z$ und eine kanonische Darstellung $\tilde{\varphi}_z$ von o_K in $\mathrm{End}\, A_z$ gegeben (die durch die Wirkung des Automorphismus f der Ordnung 3, $f(y) = \omega y$, $f(x) = x$, ω primitive 3. Einheitswurzel von $C_{\Phi^{-1}(z)}$ auf die Differentiale erster Art definiert ist).

In seiner Arbeit [1*a*] hat der Autor gezeigt, daβ $(\tilde{A}_z, \tilde{\Theta}_z, \tilde{\varphi}_z)$ und $(A_z, \Theta_z, \varphi_z)$ übereinstimmen. Die Aussage des Korollars folgt nun unmittelbar aus Theorem 2. □

III. Singuläre Moduln und Ideal-klassengruppen

In diesem Abschnitt soll ein Zusammenhang hergestellt werden zwischen den singulären Moduln $z \in B$ mit $L_z \simeq L$ für ein fixiertes L und gewisse Idealklassengruppen in L. Der Sinn der folgenden Ergebnisse besteht darin, daβ sie sozusagen erste Schritte auf dem Weg zur Aufstellung konkreter algebraischer Gleichungen für die Werte der speziellen Modulfunktionen δ_1, δ_2 (siehe Einleitung) darstellen, der sogenannten Klassengleichung.

Hier seien kurz die 'parallelen' Ergebnisse Heckes [3] für den Fall Hilbertscher Modulflächen rekapituliert. Sei k ein reell-quadratischer Körper, $H \times H$ das Produkt zweier oberer Halbebenen, auf die $\mathrm{Gl}_2^+(o_K) =$

$\{\gamma \in \mathrm{Gl}_2(o_k) \mid \det \gamma \gg 0\}$ wirkt, s: $(\xi, \xi') = (-\xi, -\xi')$ Abbildung von $H \times H$ auf sich, $S = \langle s, \mathrm{Gl}_2^+(o_k)\rangle$.

Hecke zeigt in seiner Dissertation, daß (ξ, ξ') k-singulärer Modul ist, d.h. ein $\gamma \in M_2^+(o_k) = \{\gamma \in M_2^+(o_k) \mid \det \gamma \gg 0\}$ existiert mit $\gamma(\xi, \xi') = (\xi, \xi')$ genau dann, wenn ein biquadratischer CM-Körper K existiert mit $\xi \in K$, $\xi' \in H$ Wurzel der Gleichung von über k mit in k konjugierten Koeffizienten. Jedem singulären Modul (ξ, ξ') sei der o_k-Modul $M_\xi = o_k \cdot \xi \oplus o_k \cdot 1$ in K zugeordnet, der Ideal bzgl. einer o_k-Ordnung r_f in o_k ist. Dabei sind M_ξ und M_{ξ^0} gleich genau dann, wenn ein $\gamma \in \mathrm{Gl}_2^+(o_k)$ existiert mit $\gamma(\xi, \xi') = (\xi^0, \xi^{0\prime})$, d.h. $\gamma\xi = \xi^0$. Die Ordnung r_f mit Führer $f \in \mathfrak{I}(k)$ wird dabei durch die "Primitivdiskriminante' $D_\xi = f^2 \partial_{K/k}^2$ ($\partial_{K/k}$ die Differente) von ξ bestimmt.

Das Polynom

$$\Phi(X) = \prod_{\substack{\xi \bmod \mathrm{Gl}_2^+(o_k) \\ \xi \in K,\, D_\xi = f^2 \partial_{K/k}^2}} (X - F(\xi, \xi'))$$

hat für bestimmte Modulfunktionen F bzgl. S (die sich aus speziellen Thetanullwerten bei der automorphen Einlagerung von $H \times H$ in die obere Siegelsche Halbebene $\mathscr{H}^2$ ergeben) rationale Koeffizienten (Heckes Beweis ist allerdings lückenhaft), $F(\xi, \xi')$ ist also algebraisch, und der Grad der dadurch erzeugten Körpererweiterung ist ablesbar (da $\Phi(X)$ als irreduzibel bewiesen wird); für $f = 1$ ist er z.B. $N_{K/k}^{-1}(\mathrm{Cl}_k(1))$, da die freien o_k-Moduln $M \subset K$ mit $M \in \mathfrak{I}(K)$ bis auf die Multiplikation mit einer Konstanten aus K (projektive Äquivalenz) den Idealklassen $N_{K/k}^{-1}(A)$ für gewisse $A \in \mathrm{Cl}(k)$ entsprechen $(A\, \mathrm{Cl}_k(\partial_{K/k}^2) = \mathrm{Cl}_k(1))$.

Dies Programm soll sozusagen als Vorbild dienen für das Kapitel, das die Grundlagen der oben skizzierten Theorie konstituieren soll, nämlich die Zuordnung gewisser singulärer Moduln z B Idealklassen in $\mathrm{Cl}(L)$. Der Autor setzt seine Hoffnung darauf, daß diese Zuordnung vielleicht auch zu einem polynomialen Gleichungstyp ähnlich der Klassengleichung führen kann, wenn wir als Nullstellen die Werte der Funktionen δ_i in diesen gewissen singulären Moduln ansetzen. Von diesem Gleichungstyp müßten wir den Grad kennen und zu beweisen vermögen, daß die Koeffizienten in einem bestimmten algebraischen Zahlkörper liegen.

Im weiteren seien der imaginär-quadratische Zahlkörper K und der CM-Körper L mit $[L:K] = 3$ sowie eine Einlagerung $\varphi: N \hookrightarrow C$ für den Galoisabschluß N von L über K fixiert sowie $k = L \cap R$.

DEFINITION 1. Sei M ein o_K-Modul in L, so gelte:

$$E_L^M = \{\varepsilon \in L^* \mid \varepsilon M = M\}$$
$$E_k^M = \{\varepsilon \in k^* \mid \varepsilon M = M\}$$
$$E_k^{M+} = \{\varepsilon \in E_k^M \mid \varepsilon \gg 0\}$$

DEFINITION 2. Sei $G_L = \{M | M$ freier dreidimensionaler o_K-Modul in L, versehen mit der hermiteschen Form $\langle m, n\rangle = \mathrm{Tr}_{L/K} m\bar{n}$, für die ein $\rho \in k$ existiert mit $\varphi(\rho) < 0$, $\varphi(\rho^\sigma) > 0$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$, $\rho^\sigma \neq \rho$, so daß $\rho \cdot M = M^{\#}\}$.

THEOREM 3. *Es existiert eine surjektive Abbildung* $\Psi: \{z \in B \,|\, z$ *K-singulärer Modul*, $L_z = \varphi(L)\}/\Gamma_K \to G_L \mathrm{mod}\ L^* = PG_L$ *mit* $\# \Psi^{-1}(M) = [E_k^{M+}: N_{L/k}(E_L^M)]$.

Beweis. 1. Konstruktion der Abbildung.

Sei $z = (z_1, z_2) \in B$ K-singulärer Modul mit $L_z = \varphi(L)$. Nach Theorem 1 gilt für $H = (z_j^{\sigma^{(i-1)}})$ ($z_3 = 1$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$ wie oben) und

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ergo} \quad H\Phi{}^t\bar{H} = H_\rho = \begin{bmatrix} \varphi(\rho) & & 0 \\ & \varphi(\rho^\sigma) & \\ 0 & & \varphi(\rho^{\sigma^2}) \end{bmatrix}$$

für $\rho \in k$, $\varphi(\rho) < 0$, $\varphi(\rho^{\sigma'}) < 0$ für alle $\sigma' \in \mathrm{Gal}(N/K)$, $\rho^{\sigma'} \neq \rho$. Damit gilt $\Phi = H^{-1} H_\rho {}^t\bar{H}^{-1}$ und wegen $\Phi^{-1} = \Phi$ auch $\Phi = {}^t\bar{H} H_{\rho^{-1}} H$, d.h. $(\mathrm{Tr}_{L/K}(z_i z_j/\rho)) \in \mathrm{Gl}_3(o_K)$. Setzen wir $M = \bigoplus_{i=1}^3 o_K z_i = \Psi(z)$, so gilt also für $M' = \bigoplus_{i=1}^3 o_K r_i$, $r_i = z_i/\rho$ $(\langle z_i, r_i\rangle) \in \mathrm{Gl}_3(o_K)$, d.h. jedes lineare Funktional auf M in o_K läßt sich durch ein $x \in M'$ mit $\varphi(y) = \langle y, x\rangle$ für alle $y \in M$ darstellen, und damit ist $M' = M^{\#}$, also $M \in G_L$.

2. *Surjektivität*

Sei $M^{\#} = \rho M$ für ein ρ aus Definition 2), so ist für $M = \bigoplus_{i=1}^3 o_K z_i$ und $D_M = (\mathrm{Tr}_{L/K} \rho \bar{z}_i z_j)$ D_M eine hermitesche Matrix aus $\mathrm{Gl}_3(o_K)$, sign $(D_M) = (2, 1)$ und nach [O] 2.2. Lemma 4 $D_M \underset{\mathrm{Gl}_3(o_K)}{\simeq} \Phi$ und damit auch $D_M^{-1} \underset{\mathrm{Gl}_3(o_K)}{\simeq} \Phi$.

Sei $H = (z_j^{\sigma^{(i-1)}})$ für ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$ mit ord $\sigma = 3$ und

$$H_\rho = \begin{bmatrix} \varphi(\rho) & & 0 \\ & \varphi(\rho^\sigma) & \\ 0 & & \varphi(\rho^{\sigma^2}) \end{bmatrix},$$

so ist $D_M = {}^t\bar{H} H_\rho H$ und ergo $H^{-1} H_\rho^{-1} {}^t\bar{H}^{-1} \underset{\mathrm{Gl}_3(o_K)}{\simeq} \Phi$, d.h. es existiert ein $A \in \mathrm{Gl}_3(o_K)$ mit $HA\Phi{}^t\bar{A}{}^t\bar{H} = H_\rho^{-1} = H_{\rho^{-1}}$. Nach Theorem 1) ist nun für $HA = (z_j'^{\sigma^{(i-1)}})$ und $M' = \bigoplus_{i=1}^3 o_K z_i'$ also $z = (z_1'/z_3', z_2'/z_3') \in B$ K-singulärer Modul mit $\Psi(z) \equiv M \bmod L^*$, denn $M' = M$.

3. $\Psi^{-1}(M) = [E_k^{M+} : N_{L/k}(E_L^M)]$

Man sieht aus dem Beweis von 2. unmittelbar, daß HA (d.h. auch z) modulo

Rechtsmultiplikation mit $\langle \Gamma_K, E_L^M \cdot \mathrm{Id}\rangle$ (und damit auch $z \bmod \Gamma_K$) eineindeutig durch $M \bmod L^*$ und $\rho \bmod N_{L/k}(E_L^M)$ bestimmt ist. $\square$

DEFINITION 3. Sei M ein endlich dimensionaler (torsionsfreier) Modul über einem Dedekindschen Ring R, so ist $M = \otimes\, \alpha_i m_i$, $m_i \in M \otimes_R Q_R$, $\alpha_i \in \mathfrak{J}(R)$, wobei Q_R der Quotientenkörper von R sei. Wir setzen $\mathrm{Cl}_R(M) = \mathrm{Cl}(\Pi\alpha_i) \in \mathrm{Cl}(R)$.

LEMMA 2. *Seien M_1, M_2 zwei o_K-Gitter gleicher Dimension mit $M_1 \supset M_2$ (d.h. torsionsfreie o_K-Moduln) und $M_1/M_2 \simeq o_K/\phi$ für ein Ideal $\phi \in \mathfrak{J}(K)$, so ist* $\mathrm{Cl}_{o_K}(M_2)\, \mathrm{Cl}_{o_K}^{-1}(M_1) = \mathrm{Cl}(\phi) \in \mathrm{Cl}(K)$.

Beweis. Reiner [9] Theorem 1.2. (v) S. 162.

DEFINITION 4. Sei $\mathfrak{J}_L = \{z \in B \mid z$ *K-singulärer Modul*, $L_z = \varphi(L)$, $\bigoplus_{i=1}^2 o_K z_i \otimes o_K \in \mathfrak{J}(L)\}$.

KOROLLAR 3. $\# \mathfrak{J}_L/\Gamma_K = [o_k^{*+}: N_{L/k}(o_L^*)]\, \# \{\alpha/\alpha \in \mathrm{Cl}(L),\ N_{L/k}(\alpha)\ \mathrm{Cl}_k(\partial_{L/K} \cap k) = \mathrm{Cl}_k(1),\ \partial_{L/K} \in \mathfrak{J}(L)$ *die Differente*, $N_{L/K}(\alpha)\phi = \mathrm{Cl}_K(1)$ *für* $\phi = \mathrm{Cl}_{o_K}(o_L)$ *und es existiert ein* $\rho \in k$ *mit* $\varphi(\rho) < 0$, $\varphi(\rho^\sigma) > 0$ *für alle* $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$, $\rho^\sigma \neq \rho$ *und ein* $\alpha' \in \mathfrak{J}(L)$, $\mathrm{Cl}_L(\alpha') = \alpha$, *so daß* $N_{L/k}(\alpha')(\partial_{L/K} \cap k) = (\rho)\}$.

Beweis. Nach Theorem 3) ist nur zu zeigen: Sei $\alpha' \in \mathfrak{J}(L)$, so gilt

(1) $\alpha'^{\#} = \{b \in L \mid \mathrm{Tr}_{L/K} b\bar{a} \in o_K\ \forall a \in \alpha'\} = (\bar{\alpha} \cdot \partial_{L/K})^{-1}$.
(2) α' freier o_K-Modul genau dann, wenn $N_{L/K}(\mathrm{Cl}_L(\alpha'))\phi$ Haupt ideal ist
(3) $(\partial_{L/K} \cap k) \otimes_{o_k} o_L = \partial_{L/K}$

(1) Ergibt sich sofort aus der Definition der Differente. (2) Folgt sofort aus Lemma 2). (3) Zuerst macht man sich klar, daß $\partial_{L/K} = \bar{\partial}_{L/K}$, denn da L CM-Körper ist, ist mit $\not{p} \in \mathfrak{J}(K)$ auch $\bar{\not{p}}$ in L/K verzweigt. Es genügt also zu zeigen, daß für $\phi \in \mathfrak{J}(L)$ prim, $\phi/\partial_{L/K}$, $\phi = \bar{\phi}$, $(\phi \cap k) \otimes_{o_k} o_L \neq \phi$ (d.h. ϕ total verzweigt in L/Q) der Exponent von ϕ in $\partial_{L/K}$ gerade ist. Falls $N(\phi) \neq 3$, folgt dies sofort aus dem Exponentensatz ([2] S.431) wegen $[L:K] = 3$. Falls $N(\phi) = 3$, d.h. 3 total verzweigt in L/Q, so ist nach dem Schachtelungssatz für die Differente ([2] S.430) $\partial_{L/K}\partial_{K/Q} = \partial_{L/k}\partial_{k/Q}$, und da der Exponent von ϕ in $\partial_{L/k}$ nach dem Exponentensatz 1 ist, in $\partial_{K/Q}$ 3 und in $\partial_{k/q}$ gerade, ist der Exponent von ϕ in $\partial_{L/K}$ auch gerade. $\square$

THEOREM 4. *Es gilt* $\# \mathfrak{J}_L/\Gamma_K = (h(L)/h(K)h(k))\, [o_k^*: N_{L/k}(o_L^*)]/8$.

Beweis. Nach Korollar 3 ist nur Folgendes zu beweisen:

(a) Für alle $v \in \mathrm{Cl}(k)$, $w \in \mathrm{Cl}(K)$ existiert ein $z \in \mathrm{Cl}(L)$ mit $N_{L/K}(z) = w$, $N_{L/k}(z) = v$.

(b) Für jedes Tupel (i_1, i_2, i_3) mit $i_j \in \{0, 1\}$ existiert ein $\alpha \in \mathfrak{J}(L)$ mit $N_{L/k}(\alpha) = (\rho)$, $\varphi(\rho^{\sigma^{(j-1)}})(-1)^{i_j} > 0$ für ein fixiertes $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$, ord $\sigma = 3$.

Zu (a) ist erst einmal zu beweisen, daß $N_{L/K}$ und $N_{L/K}$ auf $\mathrm{Cl}(L)$ surjektive Abbildungen sind. Für $N_{L/k}$ folgt dies sofort daraus, daß L und $\tilde{k}$ (der

Hilbertsche Klassenkörper von k) linear disjunkt sind. Für $N_{L/K}$ ist zu zeigen, daß L nicht im Hilbertschen Klassenkörper $\tilde{K}$ von K liegt.

Sei $L \subset \tilde{K}$, so ist L/K abelsch und unverzweigt. Nach dem Schachtelungssatz für Diskrimanten gilt $N_{K/Q}(\mathscr{D}_{L/K})\mathscr{D}_{K/Q}^3 = N_{k/Q}(\mathscr{D}_{L/k})\mathscr{D}_{k/Q}^2$. Da k/Q abelsch mit $[k:Q] = 3$, so existiert ein p, das in k/Q verzweigt ist. Nach dem Exponentensatz teilt p^2 $\mathscr{D}_{k/Q}$; falls $p \neq 2$, teilt aber nach demselben Satz p höchstens in der Potenz 1 die Diskriminante $\mathscr{D}_{K/Q}$; also muß p $N_{K/Q}(\mathscr{D}_{L/K})$ teilen, d.h. L/K ist nicht unverzweigt. Falls $p = 2$, so teilt p mit dem Exponenten 2 die Diskriminante $\mathscr{D}_{k/Q}$, aber mit einem Exponenten $\geqslant 2$ die Diskriminante $\mathscr{D}_{K/Q}$, also teilt 2 auch $N_{k/Q}(\mathscr{D}_{L/k})$, 2 ist voll verzweigt in L/Q, also auch in L/K. In jedem Fall folgt $L \not\subset \tilde{K}$, also sind L und K linear disjunkt, und $N_{L/K}$ ist surjektiv.

Sei nun $r_w \in N_{L/K}^{-1}(w)$, $r_v \in N_{L/k}^{-1}(v)$, so gilt für $z = r_w^4 r_v^3/(wvN_{L/K}(r_v)N_{L/k}(r_w)^2)$ (wobei die Ideale in k bzw. K durch Tensorieren mit o_L als Ideale in L aufgefaßt werden):

$$N_{L/K}(z) = w^4 N_{L/K}(r_v)^3 w^{-3} N_{L/K}(r_v)^{-3} = w,$$
$$N_{L/k(z)} = v^3 N_{L/k}(r_w)^4 v^{-2} N_{L/k}(r_w)^{-4} = v.$$

Am weitaus kompliziertesten gestaltet sich der Beweis von (b).

PROPOSITION 2. *Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$, ord $\sigma = 3$ gegeben. Falls ein $\alpha \in k$ existiert, so daß $\alpha \gg 0$ und α prim zu $\mathscr{D}_{L/K}$ ist und für $H_o = \{(\alpha) \mid \alpha \in k,\ \alpha \gg 0,\ \alpha \equiv 1 \bmod \mathscr{D}_{L/k}\}$ gilt $(\alpha) \notin N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))H_0$, so existiert zu jedem Tupel $\{i_j\}, j = 1, 2, 3, i_j \in \{0, 1\}$ ein $\beta \in k$ mit $(\beta) \in N_{L/k}(\exists(L))$ und $\varphi(\beta^{\sigma^{(j-1)}})(-1)^{i_j} > 0$, wobei $\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L) = \{\alpha \in \exists(L) \mid \alpha$ prim zu $\mathscr{D}_{L/k}\}$.*

Beweis. Nach [2a] S. 22-24 gilt dür $\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L)$ und $\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(k)$ (analog definiert) $[\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(k)\colon N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))H_0] = 2$.

Falls ein solches α wie oben existiert, so ist für $H_1 = \{(\alpha) \mid \alpha \in k, \alpha$ prim zu $\mathscr{D}_{L/k}, \alpha \gg 0\}$ und $H_2 = \{(\alpha) \mid \alpha \in k,\ \alpha$ prim zu $\mathscr{D}_{L/k}\}$ $[N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))H_1\colon N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))H_0] = 2$ und damit $[N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))\ H_2\colon N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))H_1] = 1$.

Da H_2 sichtlich zu jedem Tupel $\{i_j\}$ ein β' enthält mit $\varphi(\beta'\sigma^{(j-1)})(-1)^{i}j > 0$, gilt die obige Behauptung. □

LEMMA 3. *Seien L, K, k wie oben gegeben, so gilt für eine Primzahl p: Falls p in L/Q nicht total verzweigt ist, so sind die p-Komponenten von $\mathscr{D}_{L/k}$ und $\mathscr{D}_{K/Q}$ identisch. Falls p in L/Q total verzweigt ist, $\mathfrak{p}$ Verzweigungsideal von p in $\exists(k)$, p teilt $\mathscr{D}_{K/Q}$ mit dem Exponenten n, so teilt $\mathfrak{p}$ die Diskriminante $\mathscr{D}_{L/k}$ mit dem Exponenten $3n-2$.*

Beweis. Wir benutzen Schachtelungs- und Exponentensatz für Diskriminanten und bemerken nur, daß ein $\mathfrak{p} \in \exists(k)$, $\mathfrak{p}$ Zerlegungsideal von p, $\mathfrak{p}$ verzweigt in L/k mit demselben Exponenten in $\mathscr{D}_{L/k}$ erscheint wie das Ideal $\mathfrak{p}^\sigma \mathfrak{p}^{\sigma^2}$. □

DEFINITION 5. Sei für $a \in Z_{\mathscr{D}_{K/Q}} = \{b \in Z \mid b \text{ prim zu } \mathscr{D}_{K/Q}\}$

$$\varepsilon_K(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2 \nmid \mathscr{D}_{K/Q} \\ (-1)^{(a-1)/2} & \text{falls } \mathscr{D}_{K/Q} \equiv 4 \bmod 8 \\ (-1)^{(((a-1)/2)+(((-1)^{(a-1)/2}a-1)/4} & \\ \quad {}^{+(\mathscr{D}_{K/Q}/8)-1)(a-1)/4)} & \text{falls } \mathscr{D}_{K/Q} \equiv 0 \bmod 8 \end{cases}$$

und

$$f_K(a) = \prod_{\substack{p \mid \mathscr{D}_{K/Q} \\ p \neq 2}} \left(\frac{a}{p}\right) \varepsilon_K(a).$$

ANMERKUNG. Da $f_K(a)$ auf $Z_{\mathscr{D}_{K/Q}}$ multiplikativ ist, kann

$$f_K(a) \quad \text{auf} \quad Q_{\mathscr{D}_{K/Q}} = \left\{ a = \frac{a_1}{a_2} \,\middle|\, a_i \in Z_{\mathscr{D}_{K/Q}} \right\}$$

fortgesetzt werden. Man sieht sofort, daß $f_K(a)$ auf $Q_{\mathscr{D}_{K/Q}}$ mod $\mathscr{D}_{K/Q}$ definiert ist.

LEMMA 4. *Falls $v \in k$, $v \equiv 1 \bmod \mathscr{D}_{L/k}$, so ist $f_K(N_{k/Q}(v)) = 1$. Falls $w \in L$, w prim zu $\mathscr{D}_{L/k}$, so ist $f_K(N_{L/Q}(w)) = 1$.*

Beweis. Wir benutzen Lemma 3, nach dem gilt $\mathscr{D}_{L/k}^{\sigma} = \mathscr{D}_{L/k}$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/Q)$ (in $\exists(N)$) und somit $N_{k/Q}(v) \equiv 1 \bmod \mathscr{D}_{L/k}$.

Ebenfalls aus Lemma 3 folgt (wegen $3n-2 > n-1$ für $n \in N$) damit $N_{k/Q}(v) \equiv 1 \bmod \mathscr{D}_{K/Q}$ und somit nach obiger Anmerkung $f_K(N_{k/Q}(v)) = 1$.

Sei $w \in L$, $w' = N_{L/K}(w)$, w prim zu $\mathscr{D}_{K/Q}$ und o.B.d.A. $w \in o_L$, so ist $N_{L/Q}(w) = N_{K/Q}(w')$. Für alle $p \mid \mathscr{D}_{K/Q}$, $p \neq 2$ folgt sofort $(N_{K/Q}(w')/p) = 1$. Falls $\mathscr{D}_{K/Q} \equiv 4 \bmod 8$, so ist $N_{K/Q}(w') = a^2 - b^2(\mathscr{D}_{K/Q}/4)$, $a, b \in Z$, (a, b) prim zu 2, $2 \mid ab$, $-(\mathscr{D}_{K/Q}/4) \equiv 1 \bmod 4$ und damit $\varepsilon_K(N_{K/Q}(w')) = 1$. Falls $\mathscr{D}_{K/Q} \equiv 0 \bmod 8$, so ist – wie oben –

$$N_{K/Q}(w') \bmod 8 \in \begin{matrix}\{1, 3\} \\ \{1, 7\}\end{matrix} \text{ falls } \frac{|\mathscr{D}_{K/Q}|}{8} \equiv \begin{matrix}1 \\ 3\end{matrix} \bmod 4.$$

Wir erhalten wieder $\varepsilon_K(N_{K/Q}(w')) = 1$. □

PROPOSITION 3. *Für ein $v \in k$, v prim zu $\mathscr{D}_{L/k}$ gilt: Falls $(v) \in N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))H_0$, so ist $f_K(N_{k/Q}(v)) = 1$.*

Beweis. Nach Lemma 4) genügt es zu zeigen: Falls $(v) \in N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))$, so ist $f_K(N_{k/Q}(v)) = 1$. Nach dem Dichtigkeitssatz von Tschebotarjow existiert in jeder Idealklasse aus $\mathrm{Cl}(L)$ ein Zerlegungsideal ϕ einer total zerlegten Primzahl. Falls $v \in N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))$, so existiert also ein solches $\phi \in \exists(L)$ mit $N_{L/k}(\phi) = (vN_{L/k}(v'))$, $v' \in L$ prim zu $\mathscr{D}_{L/k}$ und damit nach Lemma 4

$$f_K(q) = f_K(N_{k/Q}(vN_{L/k}(v')) = f_K(N_{k/Q}(v)) \quad \text{für} \quad q = N(\phi).$$

Aus der totalen Zerlegtheit von q in L/Q folgt nun

$$\begin{aligned} 1 = \left(\frac{\mathscr{D}_{K/Q}}{q}\right) &= (-1)^{(q-1)/2} \prod_{\substack{p \mid \mathscr{D}_{K/Q} \\ p \neq 2}} \left(\frac{p}{q}\right)(q) \\ &= (-1)^{((q-1)/2) + \sum\limits_{\substack{p \mid \mathscr{D}_{K/Q} \\ p \neq 2}} (p-1)(q-1)/4)} \prod_{\substack{p \mid \mathscr{D}_{K/Q} \\ p \neq 2}} \left(\frac{q}{p}\right) \varepsilon(q) \end{aligned}$$

für

$$\varepsilon(a) = \begin{cases} (2/a) = (-1)^{(((-1)^{(a-1)/2}a-1)/4)} & \text{falls } 8 \mid \mathscr{D}_{K/Q} \\ 1 & \text{anderenfalls} \end{cases}$$

Es gilt aber

$$\sum_{\substack{p \mid \mathscr{D}_{L/K} \\ p \neq 2}} \frac{(p-1)(q-1)}{4} \equiv \frac{(|\mathscr{D}_{K/Q}|/(8, |\mathscr{D}_{K/Q}|) - 1)(q-1)}{4} \mod 2$$

und damit

$$(-1)^{\sum\limits_{\substack{p \mid \mathscr{D}_{L/K} \\ p \neq 2}} (p-1)(q-1)/4} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathscr{D}_{L/K} \equiv 4 \mod 8 \\ (-1)^{(q-1)/2} & \text{falls } 2 \nmid \mathscr{D}_{L/K}. \end{cases}$$

Damit ist

$$1 = \left(\frac{\mathscr{D}_{K/Q}}{q}\right) = f_K(q) = f_K(N_{k/Q}(v)). \qquad \square$$

Nach dem chinesischen Restsatz existiert ein $a \in Z_{\mathscr{D}_{L/K}}$, $a > 0$ mit $f_K(a) = f_K(a^3) = f_K(N_{k/Q}(a)) = -1$.

Für dieses a gilt nun nach Proposition 3

$$(a) \notin N_{L/k}(\exists_{\mathscr{D}_{L/k}}(L))H_0,$$

das heißt nach Proposition 2 existiert ein $\beta \in k$ mit $(\beta) \in N_{L/k}(\exists(L))$ und $\varphi(\beta^{\sigma^{(j-1)}})(-1)^{i_j} > 0$ für ein beliebiges Tupel $\{i_j\}$, $i_j \in \{0, 1\}$.

Damit ist (b) bewiesen. Es folgt also unmittelbar Theorem 4). $\square$

Literaturverzeichnis

[0] Feustel, J.-M., Holzapfel, R.-P.: Symmetry points and Chern invariants of Picard modular surfaces, *Math. Nachr.* 111 (1983), S. 7-40.

[1] Feustel, J.-M.: Representation of Picard modular forms by theta constants, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 33 (1988), S.275–281.

[1a] Feustel, J.-M.: Arithmetik und Geometrie Picardscher Modulflächen, Dissertation B, Akademie der Wissenschaften der DDR, Karl-Weierstrass-Institut für Mathematik (1987).

[2] Hasse, H.: Zahlentheorie,*Akademie Verlag*, Berlin (1963).

[2a] Hasse, H.: *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Teil I, B. G. Teubner, Leipzig/Berlin (1930).

[3] Hecke, E.: Zur Theorie der Modulfunktionen von 2 Variablen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, *Math. Annalen* 71, (1912), S. 1–37.

[4] Holzapfel, R.-P.: Geometry and arithmetic around Euler partial differential equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, (1986).

[5] Holzapfel, R.-P.: An arithmetic uniformization for arithmetic points of the plane by singular moduli, *J. Ramanujan Math. Soc.* 3(1), (1988), S. 35–62.

[6] Lang, S.: *Complex multiplication*, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, Springer (1983).

[7] Picard, E.: Sur des fonctions de deux variables independentes analogues aux fonctions modulaires, *Acta Mathematica* 2 (1983), S. 114–135.

[8] Picard, E.: Sur les formes quadratiques rerneires indefinies et sur les fonctions hyperfuchsiennes, *Acta Mathematica* 5 (1884), S. 121–182.

[9] Reiner, I.: *A survey of integral representation theory*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 76, No. 2, (1970), S. 159–227.

[10] Shiga, H.: *On the representation of Picard modular function by Θ constants I–II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 24 (1988), S. 311–360.

[11] Shiga, H.: *On the construction of algebraic numbers as special values of the Picard modular function*, Preprint, Chiba University.

[12] Shimura, G.: On analytic families of polarized Abelian varieties and automorphic functions, *Annals of Mathematic*, 78 (1963) No. 1, S. 149–192.

[13] Shimura, G.: Arithmetic of unitary groups, *Annals of Mathematic*, 79 (1964), S. 369–409.

[14] Scharlau, W.: *Quadratic and hermitian forms*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, (1985).