

COMPOSITIO MATHEMATICA

A. LEGRAND

Caractérisation des opérations d'algèbres sur les modules différentiels

Compositio Mathematica, tome 66, n° 1 (1988), p. 23-36

http://www.numdam.org/item?id=CM_1988__66_1_23_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Caractérisation des opérations d'algèbres sur les modules différentiels

A. LEGRAND

*Laboratoire d'analyse sur les variétés, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne,
31602 Toulouse Cédex, France*

Received 22 April 1987; accepted in revised form 20 October 1987

Abstract. Let Λ be an associative algebra with unity and M_* a Λ -differential graded module. To M_* we associate a class

$$\theta(M_*) \in \text{Ext}_\Lambda^{2,-1}(H_*(M_*), H_*(M_*))$$

which characterizes the “2-quasi isomorphism class” of M_* . This construction, applied to the singular complex of a G -space X , where G is a discrete group, gives a class $\theta(X)$ which determines the second differential of the spectral sequence of the equivariant homology of X . In the special case of the \mathbb{N} -structure determined by X equipped with an endomorphism f such that $H_*(f) = 1$, the class $\theta(f)$ is in $\text{Ext}^{1,-1}(H_*(X), H_*(X))$ and defines an obstruction for f to be an n th power. An action of \mathbb{Z}_p on a surface X yields $\theta(X) \in H^2(\mathbb{Z}_p, \text{Hom}(H_1(X), H_2(X)))$ which classifies the action up to quasi-isomorphism.

AMS classification: 54H15, 55N91, 55R20, 55R40, 55T10.

Introduction

Notre but est le calcul de la différentielle d_2 de la suite spectrale d'homologie équivariante de Borel

$$H_*(G, H_*(X)) \Rightarrow H_*(EG \times_G X)$$

du G -espace X , G étant un groupe discret. Rappelons que cette suite spectrale généralise la suite spectrale du revêtement de Cartan–Leray.

Plus généralement au §1 on étudie l'opération (à gauche) d'une algèbre unitaire Λ sur un module différentiel M_* . Il en résulte des classes caractéristiques [déf. 2]

$$\theta_q(M_*) \in \text{Ext}_\Lambda^2(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$$

de la relation de “2-quasi isomorphisme” [déf. 1], et un théorème de classification pour les Λ -modules différentiels gradués [théorème 1].

Les relations vérifiées par le module $\text{Ext}_\Lambda^2(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$ et par les classes $\theta_q(M_*)$ sont précisées au §2.

Lorsque k est héréditaire et Λ k -projective, on a une suite exacte [prop. 1]

$$\begin{aligned} H^2(\Lambda, \text{Hom}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))) &\longrightarrow \text{Ext}_\Lambda^2(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) \\ &\xrightarrow{\varphi} H^1(\Lambda, \text{Ext}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))). \end{aligned}$$

La projection $\theta'_q(M_*) = \varphi(\theta_q(M_*))$ est la q^e classe primaire de M_* [déf. 3] qui peut être construite à partir d'une suite exacte de coefficients universels [théorème 2]. Elle se représente par un cocycle déduit d'un k -scindage ϱ de la suite exacte de Λ -modules [prop. 2.1]

$$0 \rightarrow H_{q+1}(M_*) \rightarrow Z'_{q+1}(M_*) \xrightarrow{d} B_q(M_*) \rightarrow 0.$$

D'autre part [prop. 2.2], si $H_*(M_*)$ est k -projectif, la q^e classe secondaire $\theta_q(M_*)$ est l'image d'une classe unique dans $H^2(\Lambda, \text{Hom}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)))$ représentée par un cocycle construit à partir de ϱ et d'un k -scindage de

$$0 \rightarrow B_q(M_*) \rightarrow Z_q(M_*) \rightarrow H_q(M_*) \rightarrow 0.$$

Des applications aux G -espaces sont données au §3.

Dans le cas de la \mathbb{N} -structure sur X déterminée par un endomorphisme $f: X \rightarrow X$ les classes $\theta_q(f)$ sont dans $H^1(\mathbb{N}, \text{Ext}(H_q(X), H_{q+1}(X)))$ et vérifient une formule additive, [prop. 3]

$$\theta_q(g \circ f) = H_{q+1}(g)\theta_q(f) + \theta_q(g)H_q(f).$$

Il en résulte que lorsque f induit l'identité sur $H_*(X)$, $\theta_q(f)$ alors dans $\text{Ext}(H_q(X), H_{q+1}(X))$, représente une première obstruction à ce que f soit une puissance n^e .

Du théorème de classifications on déduit qu'une G -structure sur une surface X est déterminée à quasi-isomorphisme près par $\theta_1(X)$. En particulier la classe d'une opération de \mathbb{Z}_p sur le tore s'identifie à la pente (rationnelle) d'une translation [prop. 4].

On calcule au §4 la différentielle de la suite spectrale d'homologie de produits tensoriels $C_* \otimes_\Lambda M_*$ en fonction de $\theta_*(M_*)$ [Théorème 3]. En corollaire on obtient la différentielle

$$d_2: H_p(G, H_q(X, k)) \rightarrow H_{p-2}(G, H_{q+1}(X, k))$$

de la suite spectrale d'homologie équivariante du G -space X .

Au niveau des notations, les produits tensoriels, les foncteurs Hom, Ext dépourvu d'indice inférieur sont relatifs à l'anneau k , sinon l'anneau considéré est rappelé en indice.

I. 2-Classification des Λ -modules différentiels gradués

Soit Λ une algèbre unitaire associative sur un anneau commutatif k . Dans toute la suite on écrira Λ -mdg pour Λ -module différentiel gradué ou simplement mdg si $\Lambda = k$. En tronquant les Λ -mdg nous allons définir la relation “ r -quasi-isomorphe”. Pour $r = +\infty$ c'est la relation quasi-isomorphe habituelle. Pour $r = 1$, cette relation équivaut à avoir des Λ -modules gradués d'homologie isomorphes. Pour $r = 2$, nous introduirons des classes caractéristiques conduisant à un théorème de classification.

Soit M_* un Λ -mdg dont on désigne respectivement les Λ -modules gradués cycle, bord, homologie et conoyau de la différentielle par Z_* , B_* , H_* et $Z'_* = M_*/B_*$. Pour des entiers $-\infty \leq r, s \leq +\infty$, on note $\tau_r M_*$ et $\tau^s M_*$ les Λ -mdg tels que:

$$\begin{aligned} (\tau_r M_*)_p &= 0 \quad \text{si } p < r; \quad (\tau_r M_*)_r = Z_r; \\ (\tau_r M_*)_p &= M_p \quad \text{si } p > r \\ (\tau^s M_*)_p &= M_p \quad \text{si } p < s - 1; \quad (\tau^s M_*)_{s-1} = Z'_{s-1}; \\ (\tau^s M_*)_p &= 0 \quad \text{si } p \geq s. \end{aligned}$$

Pour $r < s$, on pose $\tau_r^s = \tau_r \circ \tau^s = \tau^s \circ \tau_r$. L'homologie $H_i(\tau_r^{p+r} M_*)$ coïncide avec $H_i(M_*)$ dans la “ r -tranche” $p \leq i < p + r$ et est nulle sinon. Regroupons toutes les r -tranches $\tau_r^{p+r} M_*$ en un Λ -bigradué différentiel. Pour cela, on pose

$$J_{p,q}^r(M_*) = (\tau_r^{p+r} M_*)_{p+q}$$

la différentielle étant celle des $\tau_r^{p+r} M_*$, $p \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a:

$$J_{*,*}^1(M_*) = H_*; \quad J_{p,0}^2(M_*) = Z_p; \quad J_{p,1}^2(M_*) = Z'_{p+1}.$$

DÉFINITION 1. Deux Λ -mdg sont r -quasi-isomorphes si les Λ -bigradués $J_{*,*}^r$ associés sont quasi-isomorphes.

Pour définir les classes caractéristiques de la relation 2-quasi-isomorphe nous utiliserons la classification des extensions de Λ -modules gradués donnée par les bigradués dérivés Ext_Λ^{**} , [2].

Considérons les suites exactes suivantes associées au Λ -mdg M_* .

$$\begin{aligned} e'(M_*) &= 0 \rightarrow H_* \rightarrow Z'_* \rightarrow B_* \rightarrow 0; \\ e(M_*) &= 0 \rightarrow B_* \rightarrow Z_* \rightarrow H_* \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

DÉFINITION 2. La classe caractéristique seconde du Λ -mdg M_* est la classe

$$\theta(M_*) = [e'(M_*)] \cup [e(M_*)] \in \text{Ext}_\Lambda^{2,-1}(H_*(M_*), H_*(M_*))$$

cup-produit des classes $[e'(M_*)] \in \text{Ext}_\Lambda^1(B_*, H_*)$ et $[e(M_*)] \in \text{Ext}_\Lambda^1(H_*, B_*)$ des extensions $e'(M_*)$ et $e(M_*)$.

Un facteur $(-1)^{pp'}$ différenciant le cup-produit et la composition de Yoneda, cette classe est l'opposée de la classe $[e''(M_*)]$ de la 2-extension.

$$e''(M_*) = 0 \rightarrow H_* \rightarrow Z'_* \xrightarrow{d} Z_* \rightarrow H_* \rightarrow 0.$$

Elle ne dépend que de la classe de 2-quasi-isomorphisme de M_* .

Pour chaque q , $\theta(M_*)$ détermine une classe

$$\theta_q(M_*) \in \text{Ext}_\Lambda^2(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$$

qu'on appellera $q^{\text{ème}}$ -*classe caractéristique seconde*. Si l'homologie de M est finie $\theta(M_*)$ est la somme des $\theta_q(M_*)$.

Notons $h_*: \text{Ext}_\Lambda^{**}(K_*, K_*) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{**}(K'_*, K'_*)$ le transport défini par le Λ -isomorphisme $h_*: K_* \rightarrow K'_*$ lorsqu'on pose $h_*(\xi) = h\xi h^{-1}$.

THÉORÈME 1 (2-classification des Λ -mdg)

- i) Soient M_* et N_* deux Λ -mdg et $h: H_*(M_*) \rightarrow H_*(N_*)$ un isomorphisme de Λ -modules gradués. Alors M_* et N_* sont 2-quasi-isomorphes si, et seulement si

$$h_*\theta(M_*) = \theta(N_*).$$

- ii) Soit K_* un Λ -module gradué vérifiant que pour tout q tel que K_{q+1} et K_{q+2} sont non nuls, alors la dimension Λ -projective de K_q est au plus 2. Alors pour

tout $\theta \in \text{Ext}_\Lambda^{2-1}(K_*, K_*)$ il existe une Λ -mdg M_* tel que $H_*(M_*) = K_*$ et $\theta(M_*) = \theta$

Un Λ -mdg dont l'homologie est concentrée en degrés q et $q + 1$ vérifie trivialement la condition ii). Donc

COROLLAIRE. Soit K_* un module gradué concentré en degrés q et $q + 1$. L'ensemble des classes de quasi-isomorphismes de Λ -mdg M_* , tels qu'en tant que Λ -modules gradués $H_*(M_*) = K_*$, est en bijection avec

$$\text{Ext}_\Lambda^2(K_q, K_{q+1}).$$

Démonstration du théorème 1

i) Soit K_* un Λ -module gradué. A toute double extension

$$e'' = 0 \rightarrow K_* \rightarrow W'_* \xrightarrow{\alpha} W_* \rightarrow K_* \rightarrow 0.$$

représentant une classe $[e''] \in \text{Ext}_\Lambda^{2-1}(K_*, K_*)$ on associe le bigradué différentiel $J_{**}(e'')$ tel que:

$$J_{p,0}(e'') = W_p; \quad J_{p,1}(e'') = W'_{p+1}; \quad J_{p,q}(e'') = 0 \quad \text{si } q \neq 0, 1$$

de différentielle $\delta: J(e'')_{p,0} \rightarrow J(e'')_{p,1}$ et d'homologie $K_* \oplus K_*$.

Maintenant soient $u: K_* \rightarrow L_*$ un isomorphisme de Λ -modules gradués et $[e'_1] \in \text{Ext}_\Lambda^{2-1}(L_*, L_*)$. Les bigradués $J(e'')$ et $J(e'_1)$ sont quasi-isomorphes au dessus de u si, et seulement si,

$$[e'_1] = u[e'']u^{-1}.$$

On obtient

- i) en appliquant ceci avec $e'' = e''(M_*)$, $e'_1 = e''(N_*)$ et $u = h$.
- ii) La condition ii) entraîne qu'il existe une suite exacte de Λ -modules gradués

$$0 \rightarrow U_* \rightarrow V_* \rightarrow K_* \rightarrow 0$$

vérifiant

$$\text{Ext}_\Lambda^{2-1}(V, K) = 0 = \text{Ext}_\Lambda^{2-1}(U, U).$$

En effet, soit un entier q

- a) si $K_q = 0$, on prend $V_q = 0$ (et $U_q = 0$)
- b) si $K_{q+1} = 0$, on prend $V_q = H_q$ (et $U_q = 0$)
- c) sinon on prend une résolution de K_q sur Λ

$$0 \rightarrow U_q \rightarrow V_q \rightarrow K_q \rightarrow 0$$

avec V_q Λ -projectif et $\dim \text{proj}_\Lambda U_q = (\dim \text{proj}_\Lambda K_q) - 1$.

On a le diagramme de suites exactes longues associées

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Ext}_\Lambda^{1-1}(U_*, V_*) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 = \text{Ext}_\Lambda^{1-1}(V_*, K_*) & \rightarrow & \text{Ext}_\Lambda^{1-1}(U_*, K_*) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_\Lambda^{2-1}(K_*, K_*) & \rightarrow & \text{Ext}_\Lambda^{2-1}(V_*, K_*) = 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \text{Ext}_\Lambda^{2-1}(U_*, U_*) = 0 & & & &
 \end{array}$$

La classe θ se relève en une classe $\alpha \in \text{Ext}_\Lambda^{1-1}(U_*, V_*)$. Un représentant

$$0 \rightarrow V_* \rightarrow M_* \xrightarrow{c} S U_* \rightarrow 0$$

$((SU)_{p+1} = U_p)$ détermine un Λ -module gradué M_* sur lequel on définit la différentielle

$$d: M_* \rightarrow S U_* \rightarrow S V_* \rightarrow S M_* \simeq M_*.$$

On a évidemment

$$\theta(M_*) = \theta.$$

II. k -projectivité – classes primaires – représentation

Etant donné un Λ - Λ bimodule J , on désigne par $H^*(\Lambda, J)$ la cohomologie de Hochschild de Λ à coefficients dans J , [5]. La proposition suivante généralise la proposition de [3].

PROPOSITION 1. *Supposons que Λ soit k -projectif (k héréditaire). Soient K et L des Λ -modules. On a une longue suite exacte fonctorielle*

$$\begin{aligned}
 \dots &\rightarrow H^{n-2}(\Lambda, \text{Ext}(K, L)) \rightarrow H^n(\Lambda, \text{Hom}(K, L)) \xrightarrow{\varphi} \text{Ext}_\Lambda^n(K, L) \\
 &\rightarrow H^{n-1}(\Lambda, \text{Ext}(K, L)) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

Démonstration. Soient P_* une résolution Λ - Λ -projective de Λ et Q_* une résolution Λ -projective de K . Comme Λ est k -projectif, Q_* est k -projectif ([3], II, Prop. 5.3). La formule de Künneth montre que $P_* \otimes_{\Lambda} Q_*$ est une résolution de K . La formule d'associativité

$$\text{Hom} (P_* \otimes_{\Lambda} Q_*, L) \simeq \text{Hom}_{\Lambda \wedge \Lambda} (P_*, \text{Hom} (Q_*, L))$$

montre que l'exactitude de $\text{Hom}_{\Lambda \wedge \Lambda} (P_*, -)$ et de $\text{Hom} (Q_*, -)$ entraîne celle de $\text{Hom}_{\Lambda} (P_* \otimes_{\Lambda} Q_*, -)$ et donc que $P_* \otimes_{\Lambda} Q_*$ est Λ -projectif. D'autre part filtrons le second membre de cette formule par le degré de P_* . On obtient une suite spectrale commençant en $H^p(\Lambda, \text{Ext}^q(K, L))$. L'anneau k étant héréditaire, celle-ci est concentrée sur les lignes $q = 0$ et $q = 1$. Elle converge vers $\text{Ext}_{\Lambda}^*(K, L)$ qui est l'homologie du premier membre de la formule d'associativité. De cette suite spectrale, on tire la suite exacte cherchée.

Une dérivation $\partial: \Lambda \rightarrow J$ du Λ - Λ bimodule J vérifie $\partial(\lambda\mu) = \lambda(\partial\mu) + \partial\lambda(\mu)$. C'est une dérivation *intérieure* s'il existe $j \in J$ tel que $\partial\lambda = \lambda j - j\lambda$. Le module des dérivations modulo les dérivations intérieures est canoniquement isomorphe à $H^1(\Lambda, J)$.

Considérons une extension de Λ -modules

$$e = 0 \rightarrow L \rightarrow E \overset{e}{\rightleftarrows} K \rightarrow 0$$

scindable sur k . Tout k -scindage ϱ détermine une dérivation $\Lambda \xrightarrow{\tilde{\varrho}} \text{Hom}(K, L)$ qui est le défaut $\lambda \rightarrow \lambda\varrho - \varrho\lambda$ de ϱ par rapport à l'opération de Λ . En associant à cette extension la classe dans $H^1(\Lambda, \text{Hom}(K, L))$ de cette dérivation, on définit une bijection entre les classes d'équivalence d'extensions k -scindables de Λ -modules et $H^1(\Lambda, \text{Hom}(K, L))$. On vérifie facilement que l'image par φ (cf. prop. 1) de la classe de la dérivation $\tilde{\varrho}$ est la classe $[e] \in \text{Ext}_{\Lambda}^1(K, L)$ de l'extension e .

La classe seconde $\theta_q(M_*)$ détermine donc une classe

$$\theta'_q(M_*) \in H^1(\Lambda, \text{Ext}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))).$$

DÉFINITION 3 (Λ k -projective sur k héréditaire). On appelle $\theta'_q(M_*)$ la q ème classe caractéristique primaire du Λ -mdg M_* .

Donnons maintenant une représentation des classes caractéristiques introduites. Si M_* est k -projectif en tant que module gradué alors $B_*(M_*)$

l'est également et l'extension $e'(M_*)$, (I.1), est scindable sur k . Elle définit une classe $[[e'_q(M_*)]]$ dans $H^1(\Lambda, \text{Hom}(B_q(M_*), H_{q+1}(M_*)))$. De plus, à partir de la suite exacte $e(M_*)$, (I.1), on obtient une projection naturelle

$$\text{Hom}(B_q(M), H_{q+1}(M)) \rightarrow \text{Ext}(H_q(M), H_{q+1}(M)). \quad (\text{II.2})$$

Si de plus Λ et $H_*(M_*)$ sont k -projectifs, alors $e(M_*)$ représente une classe $[[e_q(M_*)]] \in H^1(\Lambda, \text{Hom}(H_q(M), B_q(M)))$ et modulo l'isomorphisme φ , on a:

$$\theta_q(M_*) = [[e'_q(M_*)]] \cup [[e_q(M_*)]]$$

où \cup désigne le cup-produit en cohomologie de Hochschild relativement au produit naturel $\text{Hom}(B_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) \otimes \text{Hom}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) \rightarrow \text{Hom}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$.

PROPOSITION 2. *Soit M_* un Λ -mdg k -projectif en tant que module gradué.*

1. *L'image de la dérivation $\lambda \rightarrow \lambda\varrho - \varrho\lambda$ par le morphisme φ représente $\theta'_q(M_*)$.*
2. *Si Λ et $H_*(M_*)$ sont k -projectifs, $\theta_q(M_*)$ qui est alors dans $H^2(\Lambda, \text{Hom}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)))$ est représenté par le 2-cocycle $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda\varrho - \varrho\lambda)(\mu\sigma - \sigma\mu)$ où σ est un k -scindage de $e(M_*)$.*

Dans le cas où le module gradué sous-jacent au Λ -mdg M_* est k -projectif, on peut définir directement les classes primaires. En effet, considérons la suite exacte des coefficients universels:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) &\rightarrow H^{q+1}(M_*, H_{q+1}(M_*)) \\ &\rightarrow \text{Hom}(H_{q+1}(M_*), H_{q+1}(M_*)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

C'est une suite exacte k -scindable de Λ - Λ -bimodules. Elle détermine une longue suite exacte en cohomologie de Hochschild de Λ . Notons

$$\begin{aligned} \partial_q: H^0(\Lambda, \text{Hom}(H_{q+1}(M_*), H_{q+1}(M_*))) \\ \rightarrow H^1(\Lambda, \text{Ext}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))) \end{aligned}$$

l'opérateur bord associé.

THÉORÈME 2. Soit M_* un Λ -mdg, les modules Λ et M_* étant k -projectifs (k héréditaire), alors:

$$\partial_q(1) = -\theta'_q(M).$$

Remarquons que l'existence de $\partial_q(1)$ suppose la k -projectivité de M_* mais pas celle de Λ .

Démonstration du théorème 2. Considérons une suite exacte $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ de Λ - Λ -bimodules k -scindables. Soient $a'' \in H^0(\Lambda, A'')$ (i.e., a'' est un élément invariant de A'') et $a \in A$ dont l'image est a'' . Soit $\partial: H^0(\Lambda, A'') \rightarrow H^1(\Lambda, A')$ l'opérateur bord associé à cette suite exacte. Alors $\partial a''$ est représenté par la dérivation $\lambda \rightarrow \lambda a - a\lambda$. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) & \longrightarrow & Z^{q+1}(\text{Hom}(M_*, H_{q+1}(M_*))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ext}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) & \longrightarrow & H^{q+1}(M_*, H_{q+1}(M_*)) \longrightarrow \text{Hom}(H_{q+1}(M_*), H_{q+1}(M_*)) \end{array}$$

Soit $\gamma: M_{q+1} \rightarrow H_{q+1}(M_*)$ le $(q + 1)$ -cocycle tel que $\gamma(m) = (1 - \varrho d)\bar{m}$ où $\bar{m} \in Z'_{q+1}(M_*)$ est la classe de m . La classe $[\gamma] \in H^{q+1}(M_*, H_{q+1}(M_*))$ de γ est un relèvement de $1_{H_{q+1}(M_*)}$.

La dérivation $\lambda \rightarrow \lambda\gamma - \gamma\lambda$ de $Z^{q+1}(\text{Hom}(M_*, H_{q+1}(M_*)))$ est l'image de la dérivation $\lambda \rightarrow -(\lambda\varrho - \varrho\lambda)$ de $\text{Hom}(B_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$. Son image dans $H^{q+1}(M_*, H_{q+1}(M_*))$ représente $\partial_q(1_{H_{q+1}(M_*)})$.

Le théorème 2 se déduit alors de la proposition 2.

III. Applications aux G-espaces

Soient G un monoïde et X un G -espace. On prend pour Λ l'algèbre libre $k(G)$. Nous allons appliquer les résultats des paragraphes précédents au Λ -mdg formé par le complexe singulier $C_*(X, k)$ de X à coefficients dans k .

Considérons l'opération du monoïde \mathbb{N} des entiers naturels de générateur un endomorphisme $f: X \rightarrow X$. On appellera classes caractéristiques de f celles du \mathbb{N} -espace associé. En particulier, on associe à f des classes caractéristiques

$$\theta_q(f, k) \in H^1(\mathbb{N}, \text{Ext}(H_q(X, k), H_{q+1}(X, k)))$$

où $\text{Ext}(H_q(X, k), H_{q+1}(X, k))$ est un \mathbb{N} - \mathbb{N} -bimodule par $H_*(f)$ et rappelons ([3], X, prop. 4.1) que la cohomologie de \mathbb{N} est la même que celle de \mathbb{Z} .

En utilisant la représentation donnée dans le 1^{er} énoncé de la proposition 2, on vérifie que les classes $\theta_q(f, k)$ sont additives dans le sens suivant:

PROPOSITION 3. *Pour f, g endomorphismes de X , on a:*

$$\theta_q(g \circ f, k) = H_{q+1}(g)\theta_q(f, k) + \theta_q(g, k)H_q(f).$$

Notons $\text{Aut}^* X$ le groupe des automorphismes de l'espace X induisant l'identité au niveau de l'homologie. Pour $f, g \in \text{Aut}^*(X)$, $\theta_q(f, k)$ et $\theta_q(g, k)$ sont dans $\text{Ext}((H_q(X, k), H_{q+1}(X, k)))$ et vérifient

$$\theta_q(g \circ f, k) = \theta_q(g, k) + \theta_q(f, k).$$

En particulier:

Etant donné un entier p l'équation $u^p = f$, ne peut avoir des solutions dans $\text{Aut}^ X$, que si pour tout anneau k , $\theta_*(f, k)$ est divisible par p .*

Indiquons la représentation topologique de $\theta_q(f)$ (signalée par Adams). Soit C_f le fibré sur S^1 obtenu en identifiant par f les faces $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ de $X \times [0, 1]$. L'espace X s'identifie à $X \times \{0\}$ et la longue suite exacte de la paire (C_f, X) se scinde en suites exactes

$$0 \rightarrow H_{q+1}(X) \rightarrow H_{q+1}(C_f) \rightarrow H_{q+1}(\Sigma X) = H_q(X) \rightarrow 0$$

représentant l'extension $\theta_q(f, k)$.

Donnons un exemple de classe caractéristique seconde d'un endomorphisme. Soit $P^2(\mathbb{R})$ avec sa décomposition cellulaire naturelle obtenue en ajoutant à S^1 par $z \rightarrow z^2$ une cellule de dimension 2. Désignons par X le CW -complexe obtenu en recollant deux exemplaires de $P^2(\mathbb{R})$ le long de S^1 et par f l'automorphisme échangeant les deux exemplaires de $P^2(\mathbb{R})$ et induisant une symétrie de S^1 par rapport à un de ses diamètres.

On a $H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$, $H_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_*(f) = 1$ et en appliquant la proposition 2 au \mathbb{Z} -complexe associé à la décomposition cellulaire de X , on montre que $\theta_1(f, \mathbb{Z})$ est la classe non nulle de $\text{Ext}(H_1(X, \mathbb{Z}), H_2(X, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_2$, en particulier f ne peut être un carré.

Maintenant considérons le tore $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Les opérations de \mathbb{Z}_p sur T telles que le \mathbb{Z}_p -module $H_*(T, \mathbb{Z})$ soit trivial, sont classifiées par leur

classe

$$\theta_1 \in H^2(\mathbb{Z}_p, \text{Hom}(H_1(T, \mathbb{Z}), H_2(T, \mathbb{Z}))),$$

c'est-à-dire θ_1 est dans $(\mathbb{Z}_p)^2$, et on a :

PROPOSITION 4. *Toute opération de \mathbb{Z}_p sur $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induisant l'identité sur $H_*(T, k)$ et de classe $\theta_1 = (m, n) \in (\mathbb{Z}_p)^2$ est quasi-isomorphe sur \mathbb{Z} , à l'opération engendrée par la translation de vecteur $(m/p, n/p)$.*

IV. Différentielle de la suite spectrale d'homologie équivariante de Borel

Borel, [1], associe à chaque G -espace X l'homologie équivariante $H_*(E(G) \times_G X, k)$ où $E(G) \rightarrow B(G) = K(G, 1)$ est le revêtement universel. Cette homologie notée $H_*^G(X, k)$ est limite d'une suite spectrale

$$E_{**}^2 = H_*(G, H_*(X, k)) \Rightarrow H_*^G(X, k). \tag{IV.1}$$

Nous allons montrer que la différentielle d_2 de cette suite spectrale est donnée par les classes caractéristiques secondes du G -espace X .

Soit un revêtement principal $G \rightarrow P \rightarrow P/G$. Notons toujours Λ l'algèbre libre $k(G)$ de générateur G , M_* le Λ -mdg à gauche $C_*(X, k)$ et C_* le Λ -mdg à droite $C_*(P, k)$. Les Λ -mdg $C_*(P \times_G X, k)$ et $C_* \otimes_\Lambda M_*$ sont quasi-isomorphes, [2].

Désignons par F_* la filtration sur $C_* \otimes M_*$ par le degré de C_* . Cette filtration détermine une suite spectrale

$$E_{**}^2 = H_*(C_* \otimes H_*(M_*)) \tag{IV.2}$$

convergeant vers $H_*(C_* \otimes_\Lambda M_*)$ et qui est isomorphe à la suite spectrale de Serre du fibré $P \times_G X \rightarrow P/G$.

De manière générale, cette suite spectrale existe pour C_* Λ -mdg à droite, projectif en tant que Λ -module, et M_* Λ -mdg à gauche. Elle converge en particulier si C_* et M_* sont gradués positivement ce que nous supposons dans la suite.

Soient H_* et K_* des Λ -modules à gauche gradués et I_*^* une résolution Λ -injective de K_* . Le morphisme naturel

$$\text{Hom}_\Lambda^*(H_*, I_*^*) \otimes C_* \otimes_\Lambda H_* \rightarrow C_* \otimes_\Lambda I_*^*$$

induit un produit

$$\lrcorner: \text{Ext}_\Lambda^{**}(H_*, K_*) \otimes H_*(C_* \underset{\Lambda}{\otimes} H_*) \rightarrow H_*(C_* \underset{\Lambda}{\otimes} K_*).$$

Nous allons utiliser une autre définition de la classe caractéristique seconde. Considérons I_*^* une résolution Λ -injective de $H_*(M_*)$ et notons F^* la filtration sur $\text{Hom}_\Lambda(M_*, I_*^*)$ par le degré de résolution. La suite spectrale associée commence en

$$F_2^{p,q} = \text{Ext}_\Lambda^{p,q}(H_*(M_*), H_*(M_*)).$$

En particulier, on a $F_2^{0,0} = \text{Hom}_\Lambda^0(H_*(M_*), H_*(M_*))$, et l'image de $1 \in F_2^{0,0}$ par la différentielle ∂_2 de cette suite spectrale est une classe $\partial_2(1)$ dans $\text{Ext}_\Lambda^{2,-1}(H_*(M_*), H_*(M_*))$.

PROPOSITION 5. *La classe $\partial_2(1)$ est l'opposée de la classe caractéristique seconde du Λ -mdg M_* .*

Démonstration. Notons $K^{p,q} = \text{Hom}_\Lambda^q(M_*, I_*^p)$ et désignons par $f^{p,q}$ un élément de $K^{p,q}$. Soient d' et d'' les différentielles de K^{**} telles que

$$(-1)^p d'' f^{q,q} = d \circ f^{p,q} + (-1)^{q+1} f^{p,q} \circ d$$

$$d' f^{p,q} = \beta^p \circ f^{p,q}$$

où $\beta^i: I_*^i \rightarrow I_*^{i+1}$ est le morphisme de résolution. Classiquement, on peut représenter un élément z de $F_2^{p,q}$ par $f = f^{p,q} + f^{p+1,q-1}$ vérifiant

$$d'' f^{p,q} = 0$$

$$d' f^{p,q} + d'' f^{p+1,q-1} = 0$$

et $d' f^{p+1,q-1}$ représente $\partial_2(z)$. Appliquons ceci pour $(p, q) = (0, 0)$ et notons f^0 pour $f^{0,0}$ et f^1 pour $f^{1,-1}$. Le système précédent devient

$$f^0 \circ d = 0$$

$$\beta^0 \circ f^0 - f^1 \circ d = 0.$$

Si f^0 représente 1 alors $f^2 = \beta^1 \circ f^1$ représente $\partial_2(1)$. Les relations entre f^0, f^1, f^2 entraînent qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & H_*(M_*) & \longrightarrow & I_*^0 & \xrightarrow{\beta^0} & I^1 & \xrightarrow{\beta^1} & I_*^2 \longrightarrow \\
 & \uparrow = & & \uparrow \bar{f}_0 & & \uparrow \bar{f}_1 & & \uparrow \bar{f}_2 \\
 0 \rightarrow & H_*(M_*) & \longrightarrow & Z'(M_*) & \xrightarrow{d} & Z_*(M_*) & \longrightarrow & H_*(M_*) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

dans lequel $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ sont induites par f_0, f_1, f_2 . L'application \bar{f}_2 représente donc $e''(M_*)$ c'est-à-dire $-\theta(M_*)$.

La différentielle d_2 de la suite spectrale IV.2 vérifie

THÉORÈME 3. Soient C_* un Λ -mdg à droite et M_* un Λ -mdg à gauche, C_* étant Λ -projectif en tant que Λ -module. La différentielle

$$d_2: H_*(C_* \otimes H_*(M_*)) \rightarrow E_*(C_* \otimes H_*(M_*))$$

de la suite spectrale associée à la filtration de $C_* \otimes M_*$ par le degré de C_* est le \square -produit par la classe caractéristique seconde de M_* .

COROLLAIRE. La différentielle $d_2: H_p(G, H_q(X, k)) \rightarrow H_{p-2}(G, H_{q+1}(X, k))$ de la suite spectrale d'homologie équivariante du G -espace X est le \square -produit par la classe $\theta_q(X)$.

Démonstration du théorème 3. Soit $'F_*$ la filtration sur $C_* \otimes_\Lambda I_*^*$ telle que

$$'F_r(C_* \otimes_\Lambda I_*^*) = \sum_{i-1=r} C_i \otimes_\Lambda I_*^*.$$

La suite spectrale associée dégénère et sa différentielle $'d_2$ est nulle. Le morphisme

$$\varepsilon: \text{Hom}_\Lambda^*(M_*, I_*^*) \otimes C_* \otimes_\Lambda M_* \rightarrow C_* \otimes_\Lambda I_*^*$$

tel que $\varepsilon(u \otimes c \otimes m) = (-1)^{\text{deg}c \text{deg}u} c \otimes u(m)$ vérifie $\varepsilon(F^p \otimes F_q) \subset 'F_{q-p}$. Le morphisme ε induit donc un produit des suites spectrales et, pour

$$c \in H_*(C_* \otimes_\Lambda H_*(M_*)),$$

on a

$$0 = 'd_2(1 \sqcap c) = \partial_2(1) \sqcap c + 1 \sqcap d_2(c).$$

La proposition 5 entraîne donc le théorème 3.

References

1. A. Borel, Seminar on transformation groups, *Annals of Math. Studies* 46 (1960).
2. E.H. Brown, Twisted tensor product, *Ann. of Math.* 69 (1959) 223–246.
3. H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Math. Series (1956).
4. A. Legrand, Classes associées à un Π -module différentiel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, 296 (1983) 749–752.
5. S. MacLane, *Homology*, Springer Verlag (1963).