PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS

Étude du comportement du polynôme de Bernstein lors d'une déformation à μ constant de $X^a + Y^b$ avec $(a, b) = 1$

Compositio Mathematica, tome 63, n° 3 (1987), p. 291-313

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__63_3_291_0>

Compositio Mathematica 63: 291–313 (1987)

Etude du comportement du polynôme de Bernstein lors d'une déformation à μ constant de $X^a + Y^b$ avec $(a, b) = 1$

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS
Département de Mathématiques, Université de Bordeaux I, Bordeaux, France

Received 13 March 1986; accepted in revised form 11 November 1986

Introduction

Soit F: $\mathbb{C}^{r+1}, 0 \to \mathbb{C}, 0$, une fonction holomorphe ayant une singularité isolée en 0. Bernstein [1] a montré qu'il existe un opérateur différentiel analytique à coefficients polynomiaux en s et un polynôme non nul $B \in \mathbb{C}[s]$ tels que

$$PF^{s+1} = BF^s \tag{$*$}$$

Le générateur unitaire de l'ideal des $B \in \mathbb{C}[s]$ pour lesquels il existe P vérifiant ($*$) est appellé le polynôme de Bernstein-Sato de F et est noté b. Il est facile de voir que b est divisible par $(s + 1)$. On note $\tilde{b} = b/(s + 1)$. Les racines de $\tilde{b}$ sont des nombres rationnels.

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier le comportement du polynôme de Bernstein lors des déformations à μ-constant de $X^a + Y^b$ avec $(a, b) = 1$.

L'ensemble des racines du polynôme de Bernstein de $X^a + Y^b$ est

$$E = \{\alpha = m_1/a + m_2/b, \quad \text{où} \quad 1 \leqslant m_1 \leqslant a - 1, 1 \leqslant m_2 \leqslant b - 1\}.$$

On sait [8] que toute déformation à μ-constant de $X^a + Y^b$ peut s'écrire sous la forme

$$F(X, Y) = X^a + Y^b + \sum_{j \in J} u_j X^{p_{1,j}} Y^{p_{2,j}}$$

où

$$J = \{j | j + 1 = p_{1,j}b + p_{2,j}a - ab$$

et

$$0 \leqslant p_{1,j} \leqslant a - 2, \; 0 \leqslant p_{2,j} \leqslant b - 2 \quad \text{et} \quad p_{1,j}/a + p_{2,j}/b > 1\}$$

Il y a exactement $|J|$ éléments de E qui ne sont pas nécessairement racines du polynôme de Bernstein de F. Ce sont les

$$\alpha_j = (p_{1,j} + 1)/a + (p_{2,j} + 1)/b, j \in J.$$

Notons $\beta'_j = \alpha_j - 1, j \in J$.

Nous définissons une matrice, notée M_b, carrée, à $|J|$ lignes et colonnes qui possède la propriété suivante: le nombre rationnel β'_j est racine du polynôme de Bernstein de F, si et seulement si la j-ième colonne de M_b est non nulle. Les coefficients de M_b sont des polynômes de $\mathbb{Q}[u_j]_{j\in J}$ que nous calculons explicitement.

Nous pouvons déduire de ceci différents résultats:

Tout d'abord, la conjecture de Yano est vraie pour la série caractéristique (a, b). En effet, tous les $\beta'_j, j \in J$ sont racines de b presque partout, (pour tous les $u = (u_j) \in \mathbb{C}^j$ qui n'appartiennent pas à un nombre fini d'hypersurfaces). Le Dung Trang m'a fait remarquer que l'on a un résultat plus fort: il existe une stratification de $\mathbb{C}^j$ que l'on peut écrire explicitement dans chaque cas, dont les strates sont à b constant.

En utilisant la théorie de la structure de Hodge mixte sur la cohomologie evanescente, Steenbrink [5] a défini, μ nombres rationnels, appellés les exposants de F. Ces exposants sont constants lors d'une déformation à μ-constant de F. Pour $F(X, Y) = X^a + Y^b + \Sigma u_j X^{p_{1,j}} Y^{p_{2,j}}$, l'ensemble des exposants est l'ensemble E. Le fait que seuls les α_j ne soient pas nécessairement racines de b, peut se déduire du théorème d'Ehlers-Lo.

Notons $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ l'anneau des séries convergentes à $r + 1$ variables et Ω^{r+1} l'espace des $(r + 1)$-formes différentielles à coefficients dans $\mathcal{O}$. Notons encore $G = \Omega^{r+1}/dF \wedge d\Omega^{r-1}$, ∂_t la connexion de Gauss-Manin, et $\tilde{G} = \Sigma_{i\geqslant 0} (t\partial_t)^i G$. On sait d'après Kashiwara et Malgrange, que b est le polynôme minimal de $\partial_t t$ sur $\tilde{G}/t\tilde{G}$. On peut montrer que dim $\tilde{G}/G$ est égal au nombre des α_j qui ne sont pas racines de b. Nous déduisons donc de nos résultats, le calcul de dim $\tilde{G}/G$. Nous pouvons aussi donner une base explicite de $\tilde{G}/G$. En effet, on sait, d'aprés M. Saïto, que si l'on définit $v_j = x^{p_{1,j}} y^{p_{2,j}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ alors $\tilde{G}/G = \Sigma\mathbb{C}v_j$, la sommation étant prise sur tous les j, tels que α_j ne soit pas racine de b.

Laudal et Pfister [4] ont aussi défini une matrice carrée à $|J|$ lignes et colonnes, notée N_τ, dont le rang est égal à $\mu - \tau$, où τ désigne le nombre de Tjurina. Nous comparons les matrices M_b et N_τ, mais leur lien est encore mystérieux.

Nous calculons, comme exemple, la déformation à μ-constant de $X^{n+1} + Y^n$ et nous faisons le calcul de M_b et N_τ dans ce cas. Nous en déduisons, en particulier, que

$$\dim \tilde{G}/G = (n-2)(n-3)/2$$

si et seulement si, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n-3$

$$u_i \neq \sum_{\substack{\delta_j \in \mathbb{N} \\ \Sigma\delta_j(j+1)=i+1 \\ \Sigma\delta_j \geqslant 2}} (-1)^{\Sigma\delta_j} \prod \frac{u_j^{\delta_j}}{\delta_j!} \left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)_{(\Sigma\delta_j - 1)}$$

où $(x)_y = x(x+1)(x+2)\ldots(x+y-1)$.

Pour calculer les racines des polynômes de Bernstein, nous calculons directement les pôles et les résidus de certaines intégrales réelles. Il est remarquable de constater que des intégrales réelles suffisent, dans ce cas, pour déterminer toutes les racines de b.

Ces résultats se généralisent aux déformations à μ-constant des courbes non dégénérées dont les exposants de la monodromie sont tous distincts, et des hypersurfaces de Fermat à exposants premiers entre eux deux à deux.

I. Etude de la déformation à μ-constant de $X^a + Y^b$, $(a, b) = 1$

1. Rappels sur le calcul des racines du polynome de Bernstein de F

Nous utilisons ici, les idées de [2] et [9].

Soit c un nombre réel tel que $F(x, y)$ soit strictement positif pour tout $(x, y) \in [0, c]^2 - \{0, 0\}$. Nous considérons l'intégrale, pour $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^{*2}$

$$I_0(F, (m_1, m_2))(s) = \int_0^c \int_0^c F(x, y)^s x_1^{m_1 - 1} x_2^{m_2 - 1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

En appliquant la méthode de [9], II, p 41 et [2], IV.3 p 42, on peut trouver les pôles de $I_0(F, (m_1, m_2))(s)$.

En écrivant l'équation fonctionnelle qui définit le polynôme de Bernstein, et en intégrant par partie, on obtient

$$I_0(F, (m_1, m_2))(s)b(s) = \Sigma d_{m_1', m_2'}(u, s) I_0(F, (m_1', m_2'))(s+1) + K(s)$$

où $K(s)$ est une somme d'intégrales simples dont les pôles sont dans un ensemble $N \subset \{k/a, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k/b, k \in \mathbb{Z}\}$.

On en déduit, que si un nombre rationnel q, n'appartenant pas à N est pôle d'une intégrale $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) et si quelque soit (m'_1, m'_2), $q + 1$ n'est jamais pôle de $I_0(F, (m'_1, m'_2))$ (s) alors q est racine de b.

La fonction $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) admet un pôle pour $s = -(m_1/a + m_2/b)$. Il existe donc toujours une fonction $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) qui a un pôle pour $s = -\alpha_j, j \in J$.

Donc s'il existe une fonction $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) qui admet un pôle pour $s = -\beta'_j$, alors $-\beta'_j$ est racine de b. Si maintenant aucune fonction $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) n'admet de pôle pour $s = -\beta'_j$, alors $-\alpha_j$ est racine de b.

Rappelons enfin que le résidu de la fonction $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) pour $s = -\beta_j$ est égal à

$$\frac{\Gamma(\beta_j)^{-1}}{ab} \sum_{\substack{l \in J \\ \delta_l \in \mathbb{N} \\ \Sigma\delta_l(1+l)=k}} (-1)^{\Sigma\delta_l} \prod \frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!} \Gamma\left(\frac{\Sigma\delta_l p_{1,l} + m_1}{a}\right) \Gamma\left(\frac{\Sigma\delta_l p_{2,l} + m_2}{b}\right)$$

où $k = \beta_j ab - m_1 b - m_2 a$

2. *Définition de la matrice M_b*

Pour définir la matrice M_b, nous devons faire trois remarques.

Nous remarquons tout d'abord que seules les fonctions $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) avec $m_1 = a - p_{1,j} - 1$ et $m_2 = b - p_{2,j} - 1$ pour $j \in J$, peuvent avoir des pôles pour $s = -\beta'_j, j \in J$. Nous avons donc exactement $|J|$ fonctions $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) qui peuvent avoir des pôles pour $s = -\beta_j, j \in J$.

Nous pouvons associer à β'_j et (m_1, m_2) un couple $(a_{j,m_1,m_2}, b_{j,m_1,m_2}) \in N^{*2}$ tel que $1 \leqslant a_{j,m_1,m_2} \leqslant a$ et $1 \leqslant b_{j,m_1,m_2} \leqslant b$ et tel que le résidu pour $s = -\beta'_j$ de $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) s'écrive sous le forme

$$\Gamma(a_{j,m_1,m_2}/a)\Gamma(b_{j,m_1,m_2}/b)\Gamma(\beta'_j)^{-1}P_{j,m_1,m_2}(u)$$

où $P_{j,m_1,m_2}(u)$ est un polynôme de $Q[u_j]_{j \in J}$. Pour démontrer ceci, il suffit de démontrer que

$$(\Sigma\delta_l p_{1,l} + m_1)/a - (\Sigma\delta'_l p_{1,l} + m_1)/a \in \mathbb{Z} \quad \text{et}$$

$$(\Sigma\delta_l p_{2,l} + m_2)/b - (\Sigma\delta'_l p_{2,l} + m_2)/b \in \mathbb{Z}$$

pour toutes suites d'entiers (δ_l) et (δ'_l) telles que $\Sigma\delta_l(l + 1) = k$ et $\Sigma\delta'_l(l + 1) = k$. On a $p_{1,l}/a + p_{2,l}/b = 1 + (l + 1)/ab$. Donc

$$(\Sigma\delta_l p_{1,l})/a + (\Sigma\delta_l p_{2,l})/b = \Sigma\delta_l + k/ab$$

et

$$(\Sigma\delta'_l p_{1,l})/a + (\Sigma\delta'_l p_{2,l})/b = \Sigma\delta'_l + k/ab.$$

Le résultat s'en déduit immédiatement compte tenu du fait que $(a, b) = 1$.

Nous pouvons enfin remarquer que le couple $(a_{j,m_1,m_2}, b_{j,m_1,m_2})$ défini précedemment, ne depend pas de (m_1, m_2). Pour démontrer ce resultat, il suffit de remarquer que

$$(\Sigma\delta_l p_{1,l} + m_1)/a - (\Sigma\delta'_l p_{1,l} + m'_1)/a \in \mathbb{Z}$$

et

$$(\Sigma\delta_l p_{2,l} + m_2)/b - (\Sigma\delta'_l p_{2,l} + m'_2)/b \in \mathbb{Z}$$

pour toutes suites (δ_l) et (δ'_l) telles que $\Sigma\delta_l(l + 1) = k$ et $\Sigma\delta'_l(l + 1) = k'$ où k et k' sont définis par $\beta'_j - m_1/a - m_2/b = k/ab$ et $\beta'_j - m'_1/a - m'_2/b = k'/ab$. Le résultat se déduit immédiatement du fait que l'on *a*

$$(\Sigma\delta_l p_{1,l} + m_1)/a + (\Sigma\delta_l p_{2,l} + m_2)/b = \Sigma\delta_l - \beta'_j$$

$$(\Sigma\delta'_l p_{1,l} + m_1)/a + (\Sigma\delta'_l p_{2,l} + m_2)/b = \Sigma\delta'_l - \beta'_j.$$

On peut résumer ces résultats dans la proposition suivante:

PROPOSITION I

i) *Pour tout $j \in J$, il existe $(a_j, b_j) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $1 \leqslant a_j \leqslant a$ et $1 \leqslant b_j \leqslant b$ et pour tout $(j, m_1, m_2) \in J \times \mathbb{N}^{*2}$, il existe $P_{j,m_1,m_2} \in \mathbb{Q}[X_l]_{l\in J}$ tel que le résidu de $I_0(F, (m_1, m_2))$ (s) pour $s = -\beta'_j$ soit égal à*

$$\Gamma(a_j/a)\Gamma(b_j/b)\Gamma(\beta'_j)^{-1}(ab)^{-1}P_{j,m_1,m_2}(u).$$

ii) *Le polynôme P_{j,m_1,m_2} est nul, si*

$$(m_1, m_2) \notin \{(a - p_{1,j} - 1, b - p_{2,j} - 1), j \in J\}.$$

iii) *Le polynôme P_{j,m_1,m_2} est quasi-homogène de degré $k = \beta'_j ab - m_1 b - m_2 a$ lorsque l'on attribue aux indéterminées X_l, le poids $(l + 1)$.*

Nous pouvons maintenant définir la matrice M_b. Nous indiçons les colonnes de M_b dans l'ensemble J et les lignes de M_b dans l'ensemble $B = \{(a - p_{1,j} - 1, b - p_{2,j} - 1), j \in J\}$ ordonné suivant les j-décroissants.

DEFINITION

$$M_b = (P_{j,m_1,m_2}(u))_{\substack{(m_1,m_2)\in B\\ j\in J}}$$

PROPOSITION 2. *Le nombre rationnel* $-\beta'_j$, $j \in J$ *est racine du polynôme de Bernstein de* F, *si et seulement si la* j*-ieme colonne de* M_b *ést non nulle.*

EXEMPLE. Etude de la déformation à μ constant de $X^6 + Y^7$

$$F(X, Y) = X^6 + Y^7 + u_1X^2Y^5 + u_2X^3Y^4 + u_3X^4Y^3$$
$$+ u_8X^3Y^5 + u_9X^4Y^4 + u_{15}X^4Y^5.$$

$$M_b = \begin{pmatrix} -u_1 & -u_2 & -u_3 + \frac{2}{7}u_1^2 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -u_2 & -u_3 + \frac{5}{14}u_1^2 & * \\ 0 & 0 & 0 & -u_1 & -u_2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_3 + \frac{3}{7}u_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1 \end{pmatrix}$$

Si $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$ et $u_3 \neq \frac{2}{7}u_1^2$, alors b a pour racines $-\frac{15}{42}$, $-\frac{16}{42}$, $-\frac{17}{42}$, $-\frac{22}{42}$, $-\frac{23}{42}$, $-\frac{29}{42}$. On le note b_0 et on note $E_0 = C^6 - (\{u_1 = 0\} \cup \{u_2 = 0\} \cup \{u_3 = \frac{2}{7}u_1^2\})$.

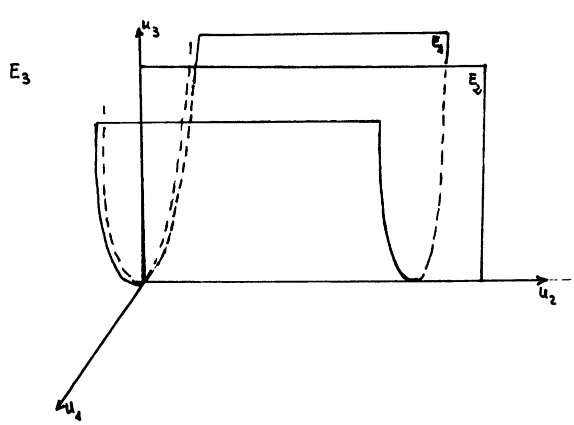

Fig. 1.

On fait maintenant la liste des polynômes de Bernstein en donnant leurs racines qui ne sont pas des exposants et on donne ensuite les espaces $E_i \subset C^6$ pour lesquels $b = b_i$.

b_1: $\{-\frac{15}{42}, -\frac{16}{42}, -\frac{22}{42}, -\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_2: $\{-\frac{16}{42}, -\frac{17}{42}, -\frac{22}{42}, -\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_3: $\{-\frac{15}{42}, -\frac{17}{42}, -\frac{22}{42}, -\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_4: $\{-\frac{15}{42}, -\frac{22}{42}, -\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_5: $\{-\frac{15}{42}, -\frac{17}{42}, -\frac{22}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_6: $\{-\frac{17}{42}, -\frac{22}{42}, -\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_7: $\{-\frac{16}{42}, -\frac{22}{42}, -\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_8: $\{-\frac{17}{42}, -\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_9: $\{-\frac{22}{42}, -\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_{10}: $\{-\frac{23}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_{11}: $\{-\frac{22}{42}, -\frac{29}{42}\}$

b_{12}: $\{-\frac{29}{42}\}$

On a

$$E_1 = \{u_3 = \tfrac{2}{7}u_1^2\} - (\{u_1 = 0\} \cup \{u_2 = 0\})$$

$$E_2 = \{u_1 = 0\} - (\{u_2 = 0\} \cup \{u_3 = 0\})$$

$$E_3 = \{u_2 = 0\} - (\{u_1 = 0\} \cup (\{u_3 = \tfrac{5}{14}u_1^2\}$$
$$\cap \{u_9 = -(5/7^3 \times 42)u_1^5\}) \cup \{u_3 = \tfrac{2}{7}u_1^2\})$$

$$E_4 = (\{u_2 = 0\} \cap \{u_3 = \tfrac{2}{7}u_1^2\}) - \{u_1 = 0\}$$

$$E_5 = (\{u_2 = 0\} \cap \{u_3 = \tfrac{5}{14}u_1^2\} \cap \{u_9 = -(5/7^3 \times 42)u_1^5\}) - \{u_1 = 0\}$$

$$E_6 = (\{u_1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\}) - (\{u_3 = 0\} \cup \{u_8 = 0\})$$

$$E_7 = (\{u_1 = 0\} \cap \{u_3 = 0\}) - \{u_2 = 0\}$$

$$E_8 = (\{u_1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\} \cap \{u_8 = 0\}) - \{u_3 = 0\}$$

$$E_9 = (\{u_1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\} \cap \{u_3 = 0\}) - (\{u_8 = 0\} \cup \{u_9 = 0\})$$

$$E_{10} = (\{u_1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\} \cap \{u_3 = 0\} \cap \{u_8 = 0\}) - (\{u_9 = 0\})$$

$$E_{11} = (\{u_1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\} \cap \{u_3 = 0\} \cap \{u_9 = 0\}) - (\{u_8 = 0\})$$

$$E_{12} = (\{u_1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\} \cap \{u_3 = 0\}$$

$$\cap \{u_8 = 0\} \cap \{u_9 = 0\}) - \{u_{15} = 0\}$$

$$E_{13} = (\{u_1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\} \cap \{u_3 = 0\}$$

$$\cap \{u_8 = 0\} \cap \{u_9 = 0\} \cap \{u_{15} = 0\}$$

Les E_i décrivent la stratification pour b; On a aussi la stratification pour dim $\tilde{G}/G$.

$$\dim \tilde{G}/G = 6 \quad \text{pour} \quad u \in E_0$$

$$\dim \tilde{G}/G = 5 \quad \text{pour} \quad u \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$$\dim \tilde{G}/G = 4 \quad \text{pour} \quad u \in E_4 \cup E_5 \cup E_6 \cup E_7$$

$$\dim \tilde{G}/G = 3 \quad \text{pour} \quad u \in E_8 \cup E_9$$

$$\dim \tilde{G}/G = 2 \quad \text{pour} \quad u \in E_{10} \cup E_{11}$$

$$\dim \tilde{G}/G = 1 \quad \text{pour} \quad u \in E_{12}$$

$$\dim \tilde{G}/G = 0 \quad \text{pour} \quad u \in E_{13}$$

On vérifie aussi que les coefficients de b sont semi-continus inférieurement au sens de Zariski.

3. Définition de la matrice N_τ

Considérons l'application de Kodaïra-Spencer

$$\mathrm{Der}\, C[u] \to C[X, Y, u] \Big/ \left(F, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}\right)$$

$$\delta \to [\delta F]$$

On note L le noyau de cette application. On obtient un système de générateurs de L de la façon suivante: on écrit, pour $(m_1, m_2) \in N^{*2}$

$$X^{m_1-1}Y^{m_2-1}F = \sum_{j\in J} h_{j,m_1,m_2} X^{p_{1,j}} Y^{p_{2,j}} \bmod \left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}\right).$$

On définit pour $(m_1, m_2) \in N^{*2}$

$$\partial_{m_1,m_2} = \sum_{j\in J} h_{j,m_1,m_2} \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Alors $\{\partial_{m_1,m_2} | (m_1, m_2) \in N^{*2}\}$ forme un système de générateurs de L.

On définit une graduation sur Der $C[u]$ en posant:

$$\deg u_j = j + 1, \quad j \in J,$$

$$\deg \frac{\partial}{\partial u_j} = -\deg u_j.$$

On note $L^+ = \{\partial \in L | \deg \partial > 0\}$. Alors, L^+ est un C-espace vectoriel de dimension finie égale à $\mu - \tau$. La matrice de Laudal-Pfister est la matrice suivante

$$N_\tau = (h_{j,m_1,m_2})\,\widehat{j \in J.}\atop \widehat{(m_1, m_2) \in B.}$$

C'est une matrice à $|J|$ lignes et colonnes qui possède la propriété suivante: Le rang de N_τ est égal à $\mu - \tau$.

Exemple. Pour la déformation à μ constant de $x^6 + y^7$, on a

$$N_\tau = \begin{pmatrix} 2u_1 & 3u_2 & 4u_3 & 9u_8 & 10u_9 & 16u_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 3u_2 & 4u_3 - \frac{10}{7}u_1^2 & 10u_9 \\ 0 & 0 & 0 & 2u_1 & 3u_2 & 9u_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2u_1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons une base de $\tilde{G}/G$:

Dans l'exemple que nous étudions, nous avons

$$v_1 = x^3y^6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad v_2 = x^4y^5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad v_3 = x^5y^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$v_8 = x^4y^6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad v_9 = x^5y^5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad v_{15} = x^5y^6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et si

$$u \in E_0 \quad \tilde{G}/G = \mathbb{C}v_1 + \mathbb{C}v_2 + \mathbb{C}v_3 + \mathbb{C}v_8 + \mathbb{C}v_9 + \mathbb{C}v_{15}$$

$$u \in E_1 \quad \tilde{G}/G = \mathbb{C}v_1 + \mathbb{C}v_2 + \mathbb{C}v_8 + \mathbb{C}v_9 + \mathbb{C}v_{15}$$

et par exemeple si

$$u \in E_5 \quad \tilde{G}/G = \mathbb{C}v_1 + \mathbb{C}v_3 + \mathbb{C}v_8 + \mathbb{C}v_{15}.$$

II. Etude de la déformation de $X^{n+1} + Y^n$

La déformation à μ constant de $X^{n+1} + Y^n$ s'écrit

$$\begin{aligned} F(X, Y) = X^{n+1} + Y^n &+ u_1X^{n-1}Y^2 + u_2X^{n-2}Y^3 + \cdots + u_{n-3}X^3Y^{n-2} \\ &+ u_{n+2}X^{n-1}Y^3 + \cdots \qquad\qquad + u_{2n-3}X^4Y^{n-2} \\ &+ u_{2n+3}X^{n-1}Y^4 + \cdots \qquad\qquad + u_{3n-3}X^5Y^{n-2} \\ &+ \cdots \\ &+ u_{1+(p-1)(n+1)}X^{n-1}Y^{p+1} + \cdots + u_{pn-3}X^{p+2}Y^{n-2} \\ &+ \cdots \\ &+ u_{1+(n-4)(n+1)}X^{n-1}Y^{n-2}. \end{aligned}$$

On écrit

$$J = \{i + (p-1)(n+1) \mid 1 \leqslant p \leqslant n-3 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-p-2\}$$

$$|J| = (n-2)(n-3)/2$$

Si $j \in J$ on écrit $j = h_j + (\varrho_j - 1)(n + 1)$ avec $1 \leqslant \varrho_j \leqslant n - 3$ et $1 \leqslant h_j \leqslant n - \varrho_j - 2$; on a $p_{1,j} = n - h_j$ et $p_{2,j} = \varrho_j + h_j$

1. Calcul de M_b

Nous allons montrer la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *On peut décomposer M_b en blocs*

$$M_b = (M_{\lambda,\nu})_{\substack{1 \leqslant \lambda \leqslant n-3, \\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-3}}$$

chaque $M_{\lambda,\nu}$ étant une matrice à λ lignes et n $-$ 2 $-$ ν *colonnes*

$$M_{\lambda,\nu} = (a^{\lambda,\nu}_{\sigma,i})_{\substack{1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda \\ 1 \leqslant i \leqslant n-2-\nu}}$$

où

i) $M_{\lambda,\nu} = (0)$ *si* $\lambda > \nu$.

ii) *Pour* $1 \leqslant \lambda \leqslant n - 3$, $1 \leqslant \nu \leqslant n - 3$ *et* $\nu \geqslant \lambda$

$$a^{\lambda,\nu}_{\sigma,i} = -u_{i+\lambda-\sigma+(\nu-\lambda)(n+1)} + \sum_{\substack{\delta_l \in N \\ \Sigma\delta_l(l+1) = i+\lambda-\sigma+(\nu-\lambda)(n+1)+1 \\ \Sigma\delta_l \geqslant 2}} (-1)^{\Sigma\delta_l} \prod \frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!}$$

$$\times \left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)_{(\Sigma\delta_l\varrho_l-(\nu-\lambda)-1)} \left(\frac{\nu+i+1}{n}\right)_{(\nu-\lambda-\Sigma\delta_l(\varrho_l-1))}$$

Preuve. Les coefficients de la matrice $M_{\lambda,\nu}$ sont donnés par les résidus des fonctions $I_0(F, (m_1, m_2))\,(s)$ pour $m_1 + m_2 = \lambda + 1$ pour

$$s = -\beta'_{i+(\nu-1)(n+1)},\; 1 \leqslant i \leqslant n - \nu - 2$$

Pour calculer les coefficients de la matrice $M_{1,\nu}$, $1 \leqslant \nu \leqslant n - 3$, on cherche le résidu de $I_0(F, (1, 1))\,(s)$ pour $s = -\beta'_{i+(\nu-1)(n+1)}$, $1 \leqslant i \leqslant n - 2 - \nu$

$$\text{Res} \quad I_0(F, (1, 1))\,(s) = \frac{\Gamma(\beta'_{i+(\nu-1)(n+1)})^{-1}}{n(n+1)}$$

$$s = -\beta'_{i+(\nu-1)(n+1)}$$

$$1 \leqslant i \leqslant n - 2 - \nu$$

$$\left[-u_{i+(v-1)(n+1)}\Gamma\left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)\Gamma\left(\frac{v+i+1}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i+1+(v-1)(n+1)\\ \Sigma\delta_l\geqslant 2}}\prod\frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!}\Gamma\left(\frac{\Sigma\delta_l p_{1,l}+1}{n+1}\right)\Gamma\left(\frac{\Sigma\delta_l p_{2,l}+1}{n}\right)\right].$$

On obtient donc

$$M_{1,1} = \left(-u_i+\sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i+1\\ \Sigma\delta_l\geqslant 2}}(-1)^{\Sigma\delta_l}\prod\frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!}\left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)_{(\Sigma\delta_l-1)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n-3}$$

$$M_{1,v} = \left(-u_{i+(v-1)(n+1)}+\sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i+1+(v-1)(n+1)\\ \Sigma\delta_l\geqslant 2}}(-1)^{\Sigma\delta_l}\prod\frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)_{(\Sigma\delta_l\varrho_l-v)}\left(\frac{v+i+1}{n}\right)_{(v-1-\Sigma\delta_l(\varrho_l-1))}\right)_{1\leqslant i\leqslant n-2-v}$$

Pour calculer la matrice $M_{\lambda,v}$, $v>\lambda$, on regarde le résidu de $I_0(F,\lambda-\sigma+1,\sigma))$ (s) pour $s=-\beta'_{i+(v-1)(n+1)}$, $1\leqslant i\leqslant n-2-v$

$$\operatorname*{Res}_{\substack{s=-\beta'_{i+(v-1)(n+1)}\\ 1\leqslant i\leqslant n-2-v}} I_0(F,(\lambda-\sigma+1,\sigma))(s) = \frac{\Gamma(\beta'_{i+(v-1)(n+1)})^{-1}}{n(n+1)}$$

$$\left[-u_{i+\lambda-\sigma+(v-\lambda)(n+1)}\Gamma\left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)\Gamma\left(\frac{v+i+1}{n}\right)\right.$$

$$+\sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i+\lambda-\sigma+(v-\lambda)(n+1)+1\\ \Sigma\delta_l\geqslant 2}}(-1)^{\Sigma\delta_l}\prod\frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!}\Gamma\left(\frac{\Sigma\delta_l p_{1,l}+\lambda-\sigma+1}{n+1}\right)$$

$$\left.\times\Gamma\left(\frac{\Sigma\delta_l p_{2,l}+\sigma}{n}\right)\right].$$

Donc

$$M_{\lambda,\lambda} = \left(-u_{i+\lambda-\sigma} + \sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i+\lambda-\sigma+1 \\ \Sigma\delta_l \geqslant 2}} (-1)^{\Sigma\delta_l} \prod \frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!} \right.$$

$$\left. \times \binom{n-i+1}{n+1}_{(\Sigma\delta_l-1)} \right)_{\substack{1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda \\ 1 \leqslant i \leqslant n-2-v}}$$

$$M_{\lambda,v} = \left(-u_{i+\lambda-\sigma+(v-\lambda)(n+1)} + \sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i+\lambda-\sigma+(v-\lambda)(n+1)+1 \\ \Sigma\delta_l \geqslant 2}} (-1)^{\Sigma\delta_l} \right.$$

$$\left. \times \prod \frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!} \binom{n-i+1}{n+1}_{(\Sigma\delta_l\varrho_l-(v-\lambda)-1)} \binom{v+i+1}{n}_{(v-\lambda-\Sigma\delta_l(\varrho_l-1))} \right)_{\substack{1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda \\ 1 \leqslant i \leqslant n-2-v}}$$

On remarque que la matrice $M_{\lambda,\lambda}$ s'obtient à partir de la matrice $M_{\lambda-1,\lambda-1}$ en supprimant la dernière colonne et en ajoutant comme première ligne

$$\left(-u_{i+\lambda-1} + \sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i+\lambda \\ \Sigma\delta_l \geqslant 2}} (-1)^{\Sigma\delta_l} \prod \frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!} \binom{n-i+1}{n+1}_{(\Sigma\delta_l-1)} \right)_{1 \leqslant i \leqslant n-2-\lambda}$$

De la forme de la matrice M_b, on peut tirer les conséquences suivantes.

PROPOSITION 4. *Si l'èlèment en σ-ième ligne et* i-*ième colonne de la matrice $M_{v,v}$ est non nul, alors $-\beta'_{i+k(n-1)}$ est racine de b si $v - \sigma \leqslant k \leqslant n - 3 - i$.*

PROPOSITION 5. *On a*

$$\dim \tilde{G}/G = (n-2)(n-3)/2,$$

si et seulement si, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n-3$, on a

$$u_i \neq \sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i+1 \\ \Sigma\delta_l \geqslant 2}} (-1)^{\Sigma\delta_l} \prod \frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!} \binom{n-i+1}{n+1}_{\Sigma\delta_l-1}.$$

2. Calcul de la matrice N_τ

Nous allons montrer la propoposition suivante:

PROPOSITION 6. *On peut décomposer N_τ en blocs*

$$N_\tau = (N_{\lambda,\nu})_{\substack{1 \leqslant \lambda \leqslant n-3 \\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-3}},$$

chaque $N_{\lambda,\nu}$ étant une matrice à λ lignes et $n - 2 - \nu$ colonnes

$$N_{\lambda,\nu} = (b_{\sigma,i}^{\lambda,\nu})_{\substack{1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda \\ 1 \leqslant i \leqslant n-2-\nu}}$$

où

i) $N_{\lambda,\nu} = (0)$ *si* $\lambda > \nu$;

ii) *pour* $1 < \sigma \leqslant \lambda - 1$ *et* $1 \leqslant i \leqslant n - 2 - \nu$, $b_{\sigma,i}^{\lambda,\nu} = b_{\sigma,i}^{\lambda-1,\nu-1}$;

iii) *pour* $1 \leqslant i \leqslant n - 2 - \nu$

$$b_{1,i}^{\lambda,\nu} = b_{1,i+1}^{\lambda-1,\nu-1} - \sum_{\substack{\varrho_1+\varrho_2=\nu+1 \\ \varrho_2 \geqslant \lambda}} \frac{n-i+1}{n+1} u_{i-1+(\varrho_1-1)(n+1)} b_{1,1}^{\lambda-1,\varrho_2-1};$$

iv) *pour* $1 \leqslant \nu \leqslant n - 3$, $1 \leqslant i \leqslant n - 2 - \nu$

$$b_{1,i}^{1,\nu} = (i + (\nu - 1)(n + 1))u_{i+(\nu-1)(n+1)}.$$

Preuve. Nous notons $I = (\partial F/\partial X, \partial F/\partial Y)\, C[X, Y, u]$. Pour calculer $N_{1,\nu}$, $1 \leqslant \nu \leqslant n - 3$, nous devons écrire

$$F = \sum_{j\in J} h_{j,1,1} X^{p_{1,j}} Y^{p_{2,j}} \bmod I.$$

Or, nous avons

$$F = \sum_{j\in J} (j + 1)u_j X^{p_{1,j}} Y^{p_{2,j}} \bmod I.$$

Donc

$$N_{1,\nu} = ((i + (\nu - 1)(n + 1) + 1)u_{i+(\nu-1)(n+1)})_{1 \leqslant i \leqslant n-2-\nu}$$

Pour calculer $N_{2,v}$, $v \geqslant 2$, nous devons calculer XF et YF mod I. On a

$$YF = \sum_{j\in J} (j+1)u_j X^{p_{1,j}} Y^{p_{2,j}+1} \bmod I$$

$$= \sum_{v=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2-v} (i+(v-1)(n+1)+1)u_{i+(v-1)(n+1)} X^{n-i} Y^{v+i+1} \bmod I$$

$$= \sum_{v=2}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-2-v} (i+(v-2)(n+1)+1)u_{i+(v-2)(n+1)} X^{n-i} Y^{v+i} \bmod I.$$

$$XF = \sum_{j\in J} (j+1)u_j X^{p_{1,j}+1} Y^{p_{2,j}} \bmod I$$

$$= \sum_{v=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2-v} (i+(v-1)(n+1)+1)u_{i+(v-1)(n+1)} X^{n+1-i} Y^{v+i} \bmod I$$

$$= \sum_{v=1}^{n-3} (2+(v-1)(n+1))u_{1+(v-1)(n+1)} X^n Y^{v+1}$$

$$+ \sum_{v=2}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-3-v}$$

$$\times\ (i+1+(v-2)(n+1)+1)u_{i+1+(v-2)(n+1)} X^{n-i} Y^{v+i} \bmod I.$$

Or

$$X^n = -\sum_{\varrho=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-2-\varrho} \frac{n-i}{n+1} u_{i+(\varrho-1)(n+1)}\, X^{n-i-1} Y^{\varrho+1} \bmod I.$$

Donc

$$(2+(v-1)(n+1))u_{1+(v-1)(n+1)} X^n Y^{v+1}$$

$$= -\sum_{\varrho=1}^{n-3} \sum_{i=2}^{n-1-\varrho} \frac{(2+(v-1)(n+1))(n-i+1)}{(n+1)}$$

$$\times\ u_{i-1+(\varrho-1)(n+1)} u_{1+(v-1)(n+1)} X^{n-i} Y^{v+\varrho+i}.$$

Donc

$$N_{2,\nu} = \left((i + 2 + (\nu - 2)(n + 1))u_{i+1+(\nu-2)(n+1)} - \sum_{\substack{\varrho_1+\varrho_2=\nu \\ \varrho_2 \geqslant 2}} \times \frac{(2 + (\varrho - 1)(n + 1))(n + 1 - i)}{(n + 1)} \times u_{1+(\varrho_1-1)(n+1)}u_{i-1+(\varrho_2-1)(n+1)} \times (i + (\nu - 2)(n + 1) + 1)u_{i+(\nu-2)(n+1)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n-2-\nu}$$

En particulier

$$N_{2,2} = \begin{pmatrix} (i + 2)u_{i+1} & - 2\dfrac{n + 1 - i}{n + 1}u_1 u_{i-1} \\ & (i + 1)u_i \end{pmatrix}_{1 \leqslant i \leqslant n-4}$$

On remarque que $N_{2,\nu}$ s'obtient à partir de $N_{1,\nu-1}$ en supprimant la dernière colonne et en ajoutant une première ligne.

Ecrivons

$$N_{\lambda,\nu} = (b_{\sigma,i}^{\lambda,\nu})_{\substack{1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda \\ 1 \leqslant i \leqslant n-2-\nu}}$$

Nous allons montrer que pour $1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda - 1$ et $1 \leqslant i \leqslant n - 2 - \nu$

$$b_{\sigma,i}^{\lambda,\nu} = b_{\sigma,i}^{\lambda-1,\nu-1}$$

Par définition

$$X^{\lambda-1-\sigma}Y^{\sigma}F = \sum_{\nu \geqslant \lambda} \sum_{i=1}^{n-1-\nu} b_{\sigma,i}^{\lambda-1,\nu-1} X^{n-i}Y^{\nu-1+i} \ (I).$$

Donc

$$X^{\lambda-1-\sigma}Y^{\sigma+1}F = \sum_{\nu \geqslant \lambda} \sum_{i=1}^{n-1-\nu} b_{\sigma,i}^{\lambda-1,\nu-1}X^{n-i}Y^{\nu+i} \ (I).$$

Donc les $\lambda - 1$ dernières lignes de la matrice $N_{\lambda,\nu}$ s'obtiennent à partir des $(\lambda - 1)$ lignes de la matrice $N_{\lambda-1,\lambda-1}$ en supprimant la denière colonne. Il nous reste à calculer la première ligne de $N_{\lambda,\nu}$. On a

$$X^{\lambda-1}F = \sum_{\nu \geqslant \lambda} \sum_{i=1}^{n-3-\nu} b_{1,i}^{\lambda-1,\nu-1} X^{n-i} Y^{\nu-1+i} \, (I)$$

$$X^{\lambda}F = \sum_{\nu \geqslant \lambda} b_{1,1}^{\lambda-1,\nu-1} X^{n} Y^{\nu} + \sum_{\nu \geqslant \lambda} \sum_{i=2}^{n-2-\nu} b_{1,i+1}^{\lambda-1,\nu-1} X^{n-i} Y^{\nu+i} (I)$$

$$b_{1,1}^{\lambda-1,\nu-1} X^{n} Y^{\nu} = -\sum_{\varrho=1}^{n-3} \sum_{i=2}^{n-1-\varrho}$$

$$\times \frac{n-i+1}{n+1} u_{i-1+(\varrho-1)(n+1)} b_{1,1}^{\lambda-1,\nu-1} X^{n-i} Y^{\nu+\varrho+i-1} (I)$$

Donc

$$X^{\lambda}F = \sum_{\nu,i} \Bigg(b_{1,i+1}^{\lambda-1,\nu-1} - \sum_{\substack{\varrho_1+\varrho_2=\nu+1 \\ \varrho_2 \geqslant \lambda}}$$

$$\times \left(\frac{n-i+1}{n+1} \right) u_{i-1+(\varrho_1-1)(n+1)} \, b_{1,1}^{\lambda-1,\varrho_2-1} \Bigg) X^{n-i} Y^{\nu+i}.$$

Donc

$$b_{1,i}^{\lambda,\nu} = b_{1,i+1}^{\lambda-1,\nu-1} - \sum_{\substack{\varrho_1+\varrho_2=\nu+1 \\ \varrho_2 \geqslant \lambda}} \left(\frac{n-i+1}{n+1} \right) u_{i-1+(\varrho_1-1)(n+1)} \, b_{1,1}^{\lambda-1,\varrho_2-1}.$$

En particulier, on a

$$b_{1,i}^{\nu,\nu} = b_{1,i+1}^{\nu-1,\nu-1} - \frac{n-i+1}{n+1} u_{i-1} b_{1,1}^{\nu-1,\nu-1}.$$

La proposition est démontrée.

Nous pouvons tirer de la forme de la matrice N_{τ} les conséquences suivantes:

- Si n est pair, nou notons $N'_{\tau} = N_{(n-2)/2,(n-2)/2}$
- Si n est impair, nous notons N'_{τ} la matrice extraite de $N_{(n-3)/2,(n-3)/2}$ en supprimant la dernière colonne.

PROPOSITION 7. *On a* $\mu - \tau = (n-2)^2/4$ *si n est pair* (*resp.* $\mu - \tau = (n-1)(n-3)/4$ *si n est impair*) *si et seulement si le déterminant de* N'_τ *est non nul.*

On remarque que cette condition ne dépend que de $u_1, \ldots, u_{n-3}$. La matrice N_τ permet de déterminer explicitement les strates à τ-constant.

3. Comparaison des matrices M_b *et* N_τ

Nous allons noter C_b la matrice

$$C_b = (C_{\lambda,\nu})_{\substack{1 \leqslant \lambda \leqslant n-3 \\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-3}}$$

chaque $C_{\lambda,\nu}$ étant une matrice à λ lignes et $n - 2 - \nu$ colonnes

$$C_{\lambda,\nu} = (c_{\sigma,i}^{\lambda,\nu})_{\substack{1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda \\ 1 \leqslant i \leqslant n-2-\nu}}$$

où

$$c_{\sigma,i}^{\lambda,\nu} = [i + \lambda - \sigma + (\nu - \lambda)(n+1) + 1]a_{\sigma,i}^{\lambda,\nu}$$

Nous notons aussi $C_b = C_{(n-2)/2,(n-2)/2}$ si n pair et si n est impair, nous notons C_b la matrice extraite de $C_{(n-3)/2,(n-3)/2}$ en supprimant la dernière colonne. Nous allons montrer le résultat suivant:

PROPOSITION 8. *Le déterminant de* C_b *est nul si et seulement si le déterminant de* N_τ *est nul.*

Nous en déduisons:

PROPOSITION 9. *Si* τ *est minimum, alors le rang de* C_b *est* $\mu - \tau$.

Nous démontrons la Proposition 8. Notons

$$U_{i,m} = \sum_{\substack{\Sigma\delta_l(l+1)=i \\ \Sigma\delta_l=m}} (-1)^{\Sigma\delta_l} \prod \frac{u_l^{\delta_l}}{\delta_l!} \quad m \geqslant 1$$

et

$$Q_{i,j} = \sum_{m \geqslant 2} U_{i+j,m} \left(\frac{n - i + 1}{n + 1}\right)_{(m-1)}$$

Alors la i-ième colonne de la matrice M_b' est de la forme

$$\begin{pmatrix} -u_{i+n'-1} + Q_{i,n'} \\ -u_{i+n'-2} + Q_{i,n'-1} \\ -u_i \quad + Q_{i,1} \end{pmatrix}$$

où $n' = (n - 2)/2$ si n est pair et $n' = (n - 3)/2$ si n est impair. La i-ième colonne de la matrice N_τ' est de la forme

$$\begin{pmatrix} (i + n')\, u_{i+n'-1} - R_{i,n'} \\ (i + n' - 1)\, u_{i+n'-2} - R_{i,n'-1} \\ \dots \\ (i + 1)\, u_i - R_{i,1} \end{pmatrix}$$

où

$$R_{k,j} = \sum_{r=0}^{j-3} \frac{n - k - r}{n + 1} u_{k+r} B_{j-2-r} + \frac{n - k + 1}{n + 1} u_{k-1} B_{j-1} \quad \text{pour} \quad k > 1$$

$$R_{1,j} = \sum_{r=0}^{j-3} \frac{n - r - 1}{n + 1} u_{1+r} B_{j-2-r} \quad \text{pour} \quad j \geqslant 3$$

$R_{k,1} = 0$ pour tout k $R_{k,2} = (n - k + 1)/(n + 1)\ u_{k-1} B_1$ pour $k > 1$, $R_{1,2} = 0$. On a posé $B_k = b_{1,1}^{k,k}$ pour simplifier les notations. On définit les polynômes S_k par

$$S_{i-1}^i = 0 \text{ et, pour } k \in Z \text{ et } k < i - 1$$

$$S_k^i = \left[u_{i-k-1} - \sum_{m \geqslant 2} U_{i-k,m} \left(\frac{n - i + 1}{n + 1}\right)_{(m-1)}\right] \left(\frac{n - i + 1}{n + 1}\right).$$

Nous allons montrer que pour tout σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant n' - 1$, il existe des polynômes T_j^σ, tels que

$$\begin{aligned}(i + n' - \sigma)u_{i+n'-\sigma-1} - R_{i,n'-\sigma} \\ - \sum_{1 \leqslant k < i} [(k + n' - \sigma)u_{k+n'-\sigma-1} - R_{k,n'-\sigma}]S_k^i \\ = (i + n' - \sigma)(u_{i+n'-\sigma-1} - Q_{i,n'-\sigma}) + \sum_{j \geqslant 0} T_j^\sigma (u_{i+j} - Q_{i,j+1}).\end{aligned}$$

Vérifions tout d'abord la formule pour $\sigma = n' - 1$. On a

$$Q_{i,1} = \sum_{m \geqslant 2} U_{i+1,m} \left(\frac{n - i + 1}{n + 1}\right)_{(m-1)},$$

$$R_{k,1} = 0 \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 1.$$

On montre que

$$(i + 1)u_i - \sum_{1 \leqslant k < i} (k + 1)u_k S_k^i = (i + 1)(u_i - Q_{i,1}).$$

On a

$$-(i + 1)U_{i+1,m} = \sum_{1 \leqslant k < i} (k + 1)u_k U_{i-k,m-1} \quad \text{pour} \quad m \geqslant 2. \tag{1}$$

Pour $\sigma = n' - 2$, on a

$$\begin{aligned}(i + 2)u_{i+1} - \frac{n - i + 1}{n + 1} u_{i-1} B_1 \\ - \sum_{1 < k < i} \left[(k + 2)u_{k+1} - \frac{n - k + 1}{n + 1} u_{k-1} B_1\right] S_k^i - 3u_2 S_1^i \\ = (i + 2)(u_{i+1} - Q_{i,2}).\end{aligned}$$

On a

$$\sum_{1 < k < i} \frac{n - k + 1}{n + 1} u_{k-1} S_k^i - \frac{n - i + 1}{n + 1} u_{i-1} = -S_0^i$$

$$\sum_{1 \leqslant k < i} (k + 2)u_{k+1} S_k^i + 2u_1 S_0^i = (i + 2)Q_{i,2} \tag{2}$$

Pour $\sigma = n' - l$, on calcule

$$L^i = (i+l)u_{i+l-1} - R_{i,l} - \sum_{1<k<i} [(k+l)u_{k+l-i} - R_{k,l}]S_k^i - R_{i,l}S_1^i$$

$$L^i = (i+l)\, u_{i+l-1} - \sum_{r=0}^{l-3} \frac{n-i-r}{n+1} u_{i+r}B_{l-2-r} - \frac{n-i+1}{n+1} u_{i-1}B_1$$

$$- \sum_{1<k<i} \left[(k+l)u_{k+l-1} - \sum_{r=0}^{l-3} \frac{n-k-r}{n+1} (k+r)B_{l-2-r}\right.$$

$$\left. - \frac{n-k+1}{n+1} u_{k-1}B_{j-1}\right] S_k^i$$

$$- \sum_{r=0}^{l-3} \frac{n-r-1}{n+1} u_{l+r}B_{l-2-r}S_1^i$$

On a

$$\sum_{1<k<i} \frac{n-k+1}{n+1} u_{k-1}S_k^i - \frac{n-i+1}{n+1} u_{i-1} = -S_0^i$$

$$\sum_{1\leqslant k<i} \frac{n-k-r}{n+1} u_{k+r}S_k^i - \frac{n-i+r}{n+1} u_{i+r}$$

$$= -S_{-r-1}^i + \frac{r+1}{n+1}(u_{i+r} - Q_{i,r+1}) - \sum_{t=1}^{r} \frac{n-t}{n+1} u_t S_{t-r}^i$$

Donc

$$L^i = (i+l)u_{i+l-1} - \sum_{1<k<i} (k+l)u_{k+l-1}S_k^i$$

$$- \sum_{R=0}^{l-3} B_{l-2-r}S_{-r-1}^i - \sum_{r=0}^{l-3}\sum_{t=1}^{r-1} \frac{n-t}{n+1} u_t B_{l-2-r}S_{t-r}^i$$

$$- B_{l-1}S_0^i - \sum_{r=0}^{l-3} \frac{n-r}{n+1} u_r B_{l-2-r}S_0^i$$

$$+ \sum_{r=0}^{l-3} \left(\frac{r+1}{n+1}\right) B_{l-2-r}(u_{i+r} - Q_{i,r+1}).$$

Or

$$\sum_{r=0}^{l-3} B_{l-2-r}S^{i}_{-r-1} + \sum_{r=0}^{l-3}\sum_{t=1}^{r-1} \frac{n-t}{n+1} u_t B_{l-2-r} S^{i}_{l-r}$$

$$= \sum_{p=1}^{l-2} S^{i}_{-p}\left[B_{l-1-p} + \sum_{t=1}^{l-3-p} \frac{n-t}{n+1} u_t B_{l-2-t-p}\right]$$

et

$$B_{l-1-p} + \sum_{t=1}^{l-3-p} \frac{n-t}{n+1} u_t B_{l-2-t-p} = (l-p)u_{l-p-1}$$

$$B_{l-1} + \sum_{r=1}^{l-3} \frac{n-r}{n+1} u_r B_{l-2-r} = l u_{l-1}$$

Donc

$$L^{i} = (i+l)u_{i+l-1} - \sum_{1 \leqslant k < i} (k+l)u_{k+l-1}S^{i}_{k} - l u_{l-1} S^{i}_{0}$$

$$- \sum_{p=1}^{l-2} (l-p)u_{l-p-1}S^{i}_{-p} + \sum_{r=0}^{l-3} \left(\frac{r+1}{n+1}\right) B_{l-2-r}(u_{i+r} - Q_{i,r+1}).$$

Mais

$$\sum_{1 \leqslant k < i} (k+l)u_{k+l-1}S^{i}_{k} - l u_{l-1}S^{i}_{0} - \sum_{p=1}^{l-2} (l-p)u_{l-p-1}S^{i}_{p} = (i+l)Q_{i,l}$$

On a donc bien démontré que pour tout σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant n'-1$, il existe des polynômes T^{σ}_{j}, tels que

$$(i+n'-\sigma)u_{i+n'-\sigma-1} - R_{i,n'-\sigma} - \sum_{k<i} [(k+n'-\sigma)u_{k+n'-\sigma-1} - R_{k,n'-\sigma}]S^{i}_{k}$$

$$= (i+n'-\sigma)(u_{i+n'-\sigma-1} - Q_{i,n'-\sigma}) + \sum_{j \geqslant 0}^{n'-\sigma-3} T^{\sigma}_{j}(u_{i+j} - Q_{i,j+1})$$

On a

$$T^{n'-l}_{j} = \frac{j+1}{n+1} B_{l-2-j}.$$

La Proposition 8 s'en déduit.

Remerciements

Je tiens à remercier l'Institut Stephan Banach de Varsovie et les organisateurs du 'Semestre sur les Singularités' pour leur invitation et leur acceuil chaleureux. Les idées contenues dans ce papier proviennent des fructueuses discussions que j'ai eues pendant mon séjour à Varsovie avec Pfister et Yano, à qui j'exprime aussi ma reconnaissance. Enfin je remercie M. Saito pour ce qu'il m'a appris.

References

1. I.N. Bernstein: Prolongement analytique des fonctions généralisées avec paramètres. *Funkts. Analyz.* 64 (1972) 26–40.
2. P. Cassou-Noguès: Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées. *J. Number Theory 23, 1* (1986) 1–54.
3. P. Cassou-Nogues: Racines de polynômes de Bernstein. *Ann. Inst. Fourier* 4, 36 (1986).
4. O.A. Laudal et G. Pfister: *Modular singularities. Lecture Notes in Math.* (à paraître).
5. J.H.M. Steenbrink: Mixed Hodge Structure on the vanishing cohomology. *Nordic Summer School Symposium in Math.*, Oslo (1976) 525–562.
6. A. Varchenko: Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial. *Bull. Sci. Math.* 2ième série 104 (1980) 205–223.
7. T. Yano: Exponents of singularities of plane irreducible curves. *Science Reports of the Saitama University* Series A, X, 2 (1982) 21–28.
8. O. Zariski: *Le problème des modules pour les branches planes. Cours donné au centre de Mathematiques de l'Ecole Polytechnique*, 1973. Hermann, Paris (1986).
9. P. Cassou-Nogues: Prolongement de certaines séries de Dirichlet. *Amer. J. Math.* 105 (1984) 13–58.