COMPOSITIO MATHEMATICA

P. ROBBA

Propriété d'approximation pour les éléments algébriques

Compositio Mathematica, tome 63, nº 1 (1987), p. 3-14

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__63_1_3_0>

Compositio Mathematica 63: 3–14 (1987)

Propriété d'approximation pour les éléments algébriques

P. ROBBA
Unité Associée au CNRS no. 752, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay, France

Received 22 April 1986; accepted in revised form 10 October 1986

1. Introduction

1.1. Soit $R \subset \bar{R}$ un couple d'anneaux commutatifs intègres. On suppose que $\bar{R}$ est muni d'une valuation, et que R est dense dans $\bar{R}$ pour la topologie associée.

DÉFINITION. On dira que le couple $R \subset \bar{R}$ a *la propriété d'approximation* si: Pour toute famille finie $\{f_i\}_{i \in I}$ de polynômes dans $R[Y]$, où $Y = [Y_1, \ldots, Y_n]$ dénote un ensemble de n indéterminées et pour toute solution $\bar{y} \in \bar{R}^n$ du système d'équations $f_i(\bar{y}) = 0$, $i \in I$, on peut trouver une solution $y \in R^n$ arbitrairement proche de $\bar{y}$.

1.2. Si $n = 1$ (cas d'une seule indéterminée), comme les racines d'un polynôme sont isolées, on voit que si le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété d'approximation, alors R est algébriquement clos dans $\bar{R}$. Serge Lang a conjecturé que si $R \subset \bar{R}$ est un couple "naturel" d'anneaux avec $\bar{R}$ complet et R algébriquement clos dans $\bar{R}$, alors le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété d'approximation.

En particulier S. Lang [L] a montré que si $\bar{R}$ est un corps complet de caractéristique 0 et si E est un corps algébriquement clos dans $\bar{R}$ alors le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété d'approximation.

D'autres exemples importants de propriété d'approximation sont dus à M. Artin ([A1], [A2]).

1.3. Soit K un corps valué ultramétrique complet de caractéristique 0. Soit $\mathcal{O}$ son anneau de valuation. Soit $X = (X_1, \ldots, X_m)$. On munit $\mathcal{O}[[X]]$ de la valuation suivante.

Pour $u = \Sigma a_\nu X^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^m$, $u \in \mathcal{O}[[X]]$, on pose

$$|u| = \sup_\nu |a_\nu|.$$

Ceci peut s'interpréter comme la norme de la convergence uniforme dans le polydisque unité ouvert de $\hat{K}^m$ ($x \in \hat{K}^m$, $\sup_i |x_i| < 1$), où $\hat{K}$ désigne une extension valuée assez grande de K.

Nous noterons A_m l'anneau des éléments de $\mathcal{O}[[X]]$ algébriques sur $\mathcal{O}[X]$. Pour la topologie associée à $|\ |$, A_m n'est pas dense dans $\mathcal{O}[[X]]$ si $m \geqslant 1$, nous noterons $\bar{A}_m$ l'adhérence de A_m dans $\mathcal{O}[[X]]$ pour cette topologie.

Les éléments de $\bar{A}_m$, limites uniformes de fonctions algébriques, sont appelés des *éléments algébriques* (dans le polydisque unité ouvert), d'où le titre de cet article.

Nous nous proposons de démontrer la propriété d'approximation suivante.

1.4. THÉORÈME. *Le couple $A_m \subset \bar{A}_m$ a la propriété d'approximation.*

1.5. Dans un exposé [*R*] sur des résultats d'approximation dus à Artin [A1], Bosch [B], van den Dries [D], nous avions établi le critère suivant.

DÉFINITION. On dira que le couple $R \subset \bar{R}$ a la *propriété de division continue* si: Pour toute famille de polynômes $g, f_1, \ldots, f_s \in R[Y]$ avec $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, et pour tout $\bar{y} \in \bar{R}^n$ tel que $g(\bar{y})$ divise $f_i(\bar{y})$, $1 \leqslant i \leqslant s$, il existe $y \in R^n$ arbitrairement proche de $\bar{y}$, tel que $g(y)$ divise $f_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

1.6. PROPOSITION. *Soit R un anneau valué commutatif intègre de caractéristique* 0 *et soit $\bar{R}$ son complété. Si R est algébriquement clos dans $\bar{R}$ et si le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété de division continue, le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété d'approximation.*

1.7. Le résultat de Lang mentionné ci-dessus est un cas particulier de ce théorème car si R et $\bar{R}$ sont des corps la propriété de division continue est trivialement vérifiée.

Comme la référence [R] est difficilement accessible, nous reproduisons ci-dessous la démonstration de cette proposition. La démonstration est très proche de celle de Lang [L]. L'hypothèse de division continue apparaît comme un préliminaire à l'application du lemme de Newton.

1.8. Pour démontrer le Théorème 1.4, en vertu de cette proposition, il suffit de montrer que la propriété de division continue est satisfaite. Pour cela on procède comme chez Artin [A1] par une induction sur le nombre m de variables. Précisément on démontrera le résultat suivant.

1.9. PROPOSITION. *Si le couple $A_{m-1} \subset \bar{A}_{m-1}$ a la propriété d'approximation, alors le couple $A_m \subset \bar{A}_m$ a la propriété de division continue.*

1.10. Comme la propriété d'approximation est trivialement vérifiée pour $m = 0$ puisqu'alors $A_0 = \bar{A}_0 = 0$, le Théorème 1.4 découle des Propositions 1.6 et 1.9.

La démonstration de la Proposition 1.9 est une transcription de la démonstration du Lemma 2.9 de [A1].

Pour pouvoir établir cette propriété d'induction il nous sera nécessiare de disposer d'un théorème de préparation. Le paragraphe 4 est consacré à l'établissement de théorèmes de préparation et de division.

Pour tout élément algébrique de $\bar{A}_m$ on pourra se mettre dans les conditions d'application du théorème de préparation.

1.11. On peut aussi considérer sur $\mathcal{O}[[X]]$ la valuation X-adique. Alors A_m est dense dans $\mathcal{O}[[X]]$ et $\mathcal{O}[[X]]$ est complet pour cette valuation et on peut se demander si le couple $A_m \subset \mathcal{O}[[X]]$ a la propriété d'approximation. Lorsque la valuation de $\mathcal{O}$ est discrète la propriété d'approximation a lieu, c'est un cas particulier d'un résultat plus général d'Artin [A2]. Par contre si la valuation de $\mathcal{O}$ est dense, on ne sait pas démontrer la propriété d'approximation.

La méthode utilisée dans cet article ne permet pas d'obtenir la propriété d'approximation pour les raisons suivantes. D'une part, si la valuation de $\mathcal{O}$ n'est pas discrète, pour $u \in \mathcal{O}[[X]]$, on ne peut pas toujours se mettre dans les conditions d'application du théorème de préparation (cf. discussion du §5.1). Par ailleurs la continuité au sens de la topologie X-adique ne permet pas de contrôler la divisibilité par p (p = caractéristique du corps résiduel de K) et il semble bien qu'il faille, pour contourner cette difficulté, effectuer une désingularisation comme chez Artin.

1.12. Je tiens à exprimer ma gratitude envers J. Denef qui a attiré mon attention sur ce problème et m'a indiqué la référence [Laf] nécessaire à la complétion de ce travail.

2. Le lemme de Newton dans les anneaux valués complets

2.1. *Soit $\bar{R}$ un anneau commutatif intègre valué complet.*

Pour $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \bar{R}^n$, on pose $|y| = \max |y_i|$. Si $f(Y) = \Sigma_{\text{finie}}\, a_\nu Y^\nu$ est une application polynômiale de $\bar{R}^n$ dans $\bar{R}^n$, avec $a_\nu \in \bar{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}^n$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, on pose $\|f\| = \Sigma_\nu\, |a_\nu|$. (N.B. On considère à la fois le cas Archimédien et le cas non-Archimédien.)

Soit Φ une application polynômiale de $\bar{R}^n$ dans $\bar{R}^n$. On considère son développement taylorien au voisinage de $y_0 \in \bar{R}^n$:

$$\Phi(y_0 + v) = \Phi(y_0) + Jv + Q(v),$$

où $J = J(y_0)$ est la matrice jacobienne, et $Q = Q(y_0)$ est une application polynômiale ne contenant que des termes au moins quadratiques.

Soit J^* la matrice transposée de la matrice des mineurs de J. D'après les formules de Cramer, $J^*J = \delta I$, où $\delta = \det(J)$ et I est la matrice unité.

2.2. Lemme de Newton. *Supposons que* $\delta = \delta(y_0) \neq 0$. *Posons* $M = \| J^*Q(y_0)\|$. *Si l'on a* $\Phi(y_0) = \delta(y_0)^2 h$ *avec* $|J^*h| < \frac{1}{2}\min(1, 1/|\delta(y_0)|, 1/2M)$, *il existe* $u \in \bar{R}^n$ *avec* $|u| \leqslant 2|J^*h|$ *tel que* $\Phi(y_0 + \delta u) = 0$.

Démonstration. On désire avoir

$$\Phi(y_0 + \delta u) = \delta^2 h + \delta J u + Q(\delta u) = 0.$$

Multipliant par J^* et tenant compte du fait que, Q ne contenant que des termes au moins quadratiques, $Q(\delta u)$ est divisible par δ^2, il suffit que l'on ait

$$u = -J^*h - J^*Q(\delta u)/\delta^2.$$

Pour $|u|, |v| \leqslant \omega = \min(1, 1/|\delta|, 1/2M)$, on a

$$|J^*Q(\delta u)/\delta^2 - J^*Q(\delta v)/\delta^2| \leqslant |u - v| \max(|u|, |v|)\, M \leqslant \tfrac{1}{2}|u - v|.$$

Posons $u_0 = 0$, et $u_n = -J^*h - (1/\delta^2)J^*Q(\delta u_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$. D'après un raisonnement classique, on montre par induction que

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - u_0| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} |J^*h|$$

et donc

$$|u_n| \leqslant 2\,|J^*h| \leqslant \omega.$$

Ceci montre que la suite u_n est de Cauchy, et donc converge vers une limite u qui est solution de notre problème et vérifie $|u| \leqslant 2\,|J^*h|$.

3. Démonstration de la Proposition 1.6

Soient $\{f_j\}_{j\in I}$ avec $f_j \in R[Y]$, et I ensemble fini; et soit $\bar{y} \in \bar{R}^n$ tel que $f_j(\bar{y}) = 0, j \in I$.

Soit $F = Fr(R)$ le corps des fractions de R. Il existe $\bar{t} = (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_s) \in \bar{R}^s$, base de transcendance sur F, et $\bar{\alpha} \in \bar{R}$ algébrique sur $F(\bar{t})$ tels que $F(\bar{t}, \bar{\alpha}) = F(\bar{y})$. On a

$$\bar{y}_i = \sum_v \frac{\varphi_{iv}(\bar{t})}{\psi_{iv}(\bar{t})} \bar{\alpha}^v = \frac{\varphi_i(\bar{t}, \bar{\alpha})}{\psi_i(\bar{t})},$$

avec $\varphi_i \in R[T, A]$, $\psi_i \in R[T]$ et $\psi_i(\bar{t}) \neq 0$, où $T = [T_1, \ldots, T_s]$ et A sont des indéterminées.

Soit $g(\bar{t}, A)$ le polynôme minimal de $\bar{\alpha}$ sur $F(\bar{t})$. On peut supposer que $g \in R[T, A]$. Comme F est de caractéristique 0, $(\partial g/\partial A)(\bar{t}, \bar{\alpha}) \neq 0$.

Posons $\delta = (\partial g/\partial A)(T, A)\Pi_{i=0}^n \psi_i(T)$. Comme $g(\bar{t},\bar{\alpha}) = 0$ et $\bar{y}_i\psi_i(\bar{t}) - \varphi_i(\bar{t}, \bar{\alpha}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, le polynôme $\delta^2(\bar{t}, \bar{\alpha})$ divise $g(\bar{t}, \bar{\alpha})$ et $\bar{y}_i\psi_i(\bar{t}) - \varphi_i(\bar{t}, \bar{\alpha})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, donc d'après la propriété de division continue, il existe $(t, \beta, z) \in R^{s+1+n}$, arbitrairement proche de $(\bar{t}, \bar{\alpha}, \bar{y})$ tel que $\delta^2(t, \beta, z)$ divise $g(t, \beta)$ et $z_i\psi_i(t) - \varphi_i(t, \beta)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Considérons l'application Φ_t

$$(\alpha, y) \mapsto (g(t, \alpha), (y_i\psi_i(t) - \varphi_i(t, \alpha)), 1 \leqslant i \leqslant n),$$

application polynômiale de $\bar{R}^{1+n}$ dans $\bar{R}^{1+n}$. On voit que le déterminant de sa matrice jacobienne est δ. En prenant (t, β, z) suffisamment proche de $(\bar{t}, \bar{\alpha}, \bar{y})$, on aura

$$\begin{array}{lll} M(t, \beta, z) := \|J^*Q\| & \text{proche de} & M(\bar{t}, \bar{\alpha}, \bar{g}), \\ \delta(t, \beta, z) & \text{proche de} & \delta(\bar{t}, \bar{\alpha}, \bar{y}) \neq 0, \\ |\Phi_t(\beta, z)/\delta^2| & \text{proche de} & |\Phi_{\bar{t}}(\bar{\alpha}, \bar{y})/\delta^2| = 0. \end{array}$$

On sera donc dans les conditions d'application du lemme de Newton et par conséquent il existe $(\alpha, y) \in \bar{R}^{1+n}$ proche de $(\bar{\alpha}, \bar{y})$ tel que $g(t, \alpha) = 0$ et $y_i\psi_i(t) - \varphi_i(t, \alpha) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Comme R est algébriquement clos dans $\bar{R}$ et que $g(t, A) \in R[A]$, on voit que $\alpha \in R$. On voit ensuite, pour les mêmes raisons, que $y_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Enfin, pour tout j, $f_j(\ldots, [\varphi_i(T, A)]/[\psi_i(T)], \ldots) = g(T, A)h_j(T, A)$ puisque $f_j(\ldots, [\varphi_i(\bar{t}, \bar{\alpha})]/[\psi_i(\bar{t})], \ldots) = 0$. On peut choisir t suffisamment proche de $\bar{t}$ de sorte que les dénominateurs $\psi_i(t)$ et les dénominateurs de

$h_j(t, \alpha)$ ne s'annulent pas. On voit alors que, pour y construit précédemment, on aura $f_j(y) = 0$.

4. Théorèmes de préparation et de division

Théorèmes de division et de préparation dans $\mathcal{O}[[X]]$

4.1. Nous gardons les notations de 1.3.

On pose $X' = (X_1, \ldots, X_{m-1})$.

Soit $f = \Sigma_{j \geqslant 0} a_j(X')X_m^j \in \mathcal{O}[[X']][X_m] = \mathcal{O}[[X]]$. On dit que f est *distinguée en X_m d'ordre s si*:

$$a_s(0) \text{ est une unité de } \mathcal{O} \text{ et } |a_j(0)| < |a_s(0)| = 1 \text{ pour } j < s.$$

Soit $P \in \mathcal{O}[[X']][[X_m]$ de degré s en X_m. On dira que P est *distingué* si P est distingué en X_m d'ordre s.

Nous rappelons les théorèmes classiques de division et de préparation dans les anneaux de séries formelles.

4.2. THÉORÈME DE DIVISION. *Soit $f \in \mathcal{O}[[X]]$ distinguée en X_m d'ordre s. Pour $g \in \mathcal{O}[[X]]$ il existe un unique $h \in \mathcal{O}[[X]]$ et un unique $u \in \mathcal{O}[[X']][X_m]$, avec* $\deg_{X_n} u < s$, *tel que*

$$g = fh + u$$

De plus on a

$$|g| = \max(|h|, |u|).$$

4.3. THÉORÈME DE PRÉPARATION. *Soit $f \in \mathcal{O}[[X]]$ distinguée en X_m d'ordre s. Il existe $P \in \mathcal{O}[[X']][X_m]$ distingué de degré s et w unité de $\mathcal{O}[[X]]$ tels que $f = Pw$.*

Théorèmes de division et de préparation dans A_m.

4.4. Pour établir les théorèmes de division et de préparation dans le cas des séries formelles algébriques nous reprenons les démonstrations de Lafon [Laf] dans un contexte similaire. On utilise une technique de substitution.

4.5. PROPOSITION. *Soit $P \in \mathcal{O}[[X']][X_m]$ un polynôme distingué de degré s en X_m. Notons Ω une clôture algébrique de $K((X'))$, et soit y une racine de P dans Ω. Effectuons la division de $g \in \mathcal{O}[[X]]$ par P: $g(x) = P(X)h(X) + u(X', X_m)$. Posons $g(X', y) = u(X', y) \in \Omega$. Alors l'application $g(X) \mapsto g(X', y)$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres de $\mathcal{O}[[X]]$ dans Ω.*

Démonstration. C'est évident.

4.6. PROPOSITION. *Avec les notations de* 4.5, *soit $g \in A_m$ tel que $g(X', y) = 0$. Alors y est algébrique sur $\mathcal{O}[X']$.*

Démonstration. Si $g \in A_m$ on a une équation de dépendance algébrique: $a_q(X)g^q(X) + \cdots + a_0(X) = 0$ avec $a_i \in \mathcal{O}[X]$ et a_0 non identiquement nul. En substituant y à X_m il vient $a_0(X', y) = 0$.

4.7. PROPOSITION. *Soit $P \in \mathcal{O}[[X']][X_m]$ un polynôme distingué unitaire, $P = X_m^s + a_{s-1}(X')X_m^{s-1} + \cdots + a_0(X')$. Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{O}[[X]]$ tel que $Ph \in A_m$. Alors $P \in A_{m-1}[X_m]$ et $h \in A_m$.*

Démonstration. Soit y une racine de P dans Ω (avec les notations de 4.5). Posons $g = hP$. On a $g(X', y) = 0$ et donc d'après 4.6 y est algébrique sur $\mathcal{O}[X']$. Comme les a_i sont, au signe près, les fonctions symétriques élémentaires des racine de P dans Ω, les a_i sont algébriques sur $\mathcal{O}[X']$ et sont donc dans A_{m-1}. Puisque g et P sont dans A_m, h l'est aussi.

4.8. THÉORÈME DE PRÉPARATION DANS A_m. *Soit $f \in A_m$ distinguée en X_m d'ordre s. Alors il existe un unique polynôme unitaire distingué $P \in A_{m-1}[X_m]$ de degré s en X_m, et un unique w unité de A_m tels que $f = Pw$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de 4.3 et 4.7.

4.9. THÉORÈME DE DIVISION DANS A_m. *Soit $f \in A_m$ distinguée d'ordre s en X_m. Alors pour tout $g \in A_m$ il existe un unique $h \in A_m$ et un unique $u \in A_{m-1}[X_m]$, avec $\deg_{X_m} u < s$, tel que*

$$g = fh + u.$$

De plus on a

$$|g| = \max(|h|, |u|).$$

Démonstration. Grâce à 4.8 on peut supposer que f est un polynôme distingué unitaire de degré s en X_m. Dans $\mathcal{O}[[X']][X_m]$ on peut considérer une décomposition en produit de facteurs irréductibles de la forme $f = f_1 \ldots f_q$ où les f_i sont des polynômes unitaires distingués en X_m. Alors la Proposition 4.7 montre que les f_i sont dans $A_{m-1}[X_m]$. Puisque si l'on a une division pour chaque f_i, on a une division pour leur produit f, on peut supposer de plus que f est irréductible.

D'après 4.2 on peut effectuer la division dans $\mathcal{O}[[X]]$ et l'on obtient $h \in \mathcal{O}[[X]]$, $u \in \mathcal{O}[[X']][X_m]$. Il suffit de montrer que $u \in A_{\mathrm{m}-1}[X_m]$ car alors il découlera de 4.7 que $h \in A_m$. Ecrivons

$$u = u_{s-1}(X')X_m^{s-1} + \cdots + u_0(X').$$

Soient $y_1 \ldots y_s$ les racines de f dans Ω. Les racines sont toutes distinctes (car car $K = 0$). On a pour $j = 1 \ldots s$

$$g(X', y_j) = u_{s-1}(X')y_j^{s-1} + \cdots + u_0(X').$$

Le système linéaire donne les $u_i(X')$ comme fonction rationnelle des y_j et des $g(X', y_j)$ (le déterminant du système est un déterminant de Vandermonde, non nul parce que les y_j sont tous distincts). On sait que les y_j sont algébriques sur $\mathcal{O}[X']$. Il nous suffit donc de démontrer que les $g(X', y_j)$ sont aussi algébriques sur $\mathcal{O}[X']$ pour terminer la démonstration. Or g satisfait une équation de dépendance algébrique: $a_n(X)g^n(X) + \cdots + a_0(X) = 0$ avec $a_0 \ldots a_n \in \mathcal{O}[X]$. On peut supposer que les a_i n'ont aucun facteur commun non constant. Si $a_n(X', y_j) = \cdots = a_1(X', y_j) = 0$ alors aussi $a_0(X', y_j) = 0$, ce qui contredirait la supposition précédente, donc l'un des $a_i(X', y_j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, n'est pas nul et $g(X', y_j)$ est donc algébrique sur $\mathcal{O}[X'][y_j]$ et donc sur $\mathcal{O}[X']$.

Théorèmes de division et de préparation dans $\bar{A}_m$

4.10. Théorème de division dans $\bar{A}_m$. *Soit $f \in \bar{A}_m$ distinguée d'ordre s en X_m. Alors pour tout $g \in \bar{A}_m$ il existe un unique $h \in \bar{A}_m$ et un unique $u \in \bar{A}_{m-1}[X_m]$, avec $\deg_{X_m} u < s$, tels que*

$$g = fh + u$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $f \in A_m$.

L'application $g \mapsto (h, u)$, $A_m \mapsto (A_m, (A_{m-1})^s)$ définie par le Théorème de division 4.9 est linéaire et continue. Comme A_m est dense dans $\bar{A}_m$ et que $\bar{A}_m$ et $(\overline{A_{m-1}})^s$ sont complets, cette application se prolonge en une application $\bar{A}_m \mapsto (\bar{A}_m, (\overline{A_{m-1}})^s)$.

Montrons maintenant que pour g fixé, h et u dépendent continûment de f. Soient $g \in \bar{A}_m$, f_1 et $f_2 \in A_m$, distinguées s en X_m. On a

$$g = f_1 h_1 + u_1 = f_2 h_2 + u_2.$$

On en déduit

$$(f_2 - f_1)h_2 = f_1(h_1 - h_2) + u_1 - u_2$$

et donc, par la continuité de la division,

$$|f_2 - f_1| \geqslant |(f_2 - f_1)h_2| = \max(|h_1 - h_2|, |u_1 - u_2|).$$

Soit $f \in \bar{A}_m$ distinguée d'ordre s en X_m. Considérons une suite $f_n \in A_m$ convergeant vers f. Pour $|f_n - f| < 1$, f_n sera aussi distinguée en X_m d'ordre s. Pour $g \in \bar{A}_m$ fixé, le quotient et le reste de la division de g par f_n forment des suites de Cauchy qui convergent donc vers des limites qui sont le quotient et le reste de la division de g par f.

4.11. Théorème de préparation dans $\bar{A}_m$. *Soit $f \in \bar{A}_m$ distinguée d'ordre s en X_m. Il existe un polynôme unitaire $P \in \bar{A}_{m-1}[X_m]$ distingué de degré s en X_m et une unité w de $\bar{A}_m$ tels que $f = Pw$.*

5. La propriété d'approximation pour le couple $A_m \subset \bar{A}_m$.

5.1. Soit $\mathscr{R}$ un anneau unitaire, commutatif, intègre, muni d'une valuation ultramétrique. Dénotons par Γ une extension valuée complète, algébriquement close, du corps des fractions de $\mathscr{R}$.

Soit $u = \Sigma_{j \geqslant 0} u_j Y^j \in \mathscr{R}[[Y]]$, algébrique sur $\mathscr{R}[Y]$, tel que $\sup_j |u_j| < +\infty$. Alors $u(Y)$ définit une fonction analytique bornée dans la boule $B(0, 1^-) = \{y \in \Gamma; |y| < 1\}$. Dans cette boule u n'a qu'un nombre fini de zéros: en effet, considérons l'équation satisfaite par u $a_s(Y)u^s(Y) + \cdots + a_0(Y) = 0$ avec $a_i \in R[Y]$ et a_0 non identiquement nul, si y est un zéro de u, c'est forcément un zéro de a_0 et a_0 étant un polynôme n'a qu'un nombre fini de zéros. Si N est le nombre de zéros de u dans $B(0, 1^-)$ comptés avec leur multiplicité, il est bien connu que l'on a alors $|u_N| = \sup_j |u_j|$. Ce que l'on retiendra, c'est qu'il existe un indice N tel que $|u_N| = \sup_j |u_j|$.

Alors on voit par récurrence sur m que si $u = \Sigma_\nu a_\nu X^\nu \in A_m$, il existe un multi-indice μ tel que $|a_\mu| = \sup_\nu |a_\nu|$. En effet on peut écrire $u = \Sigma_j u_j(X') X_m^j \in A_{m-1}[[X_m]]$ avec u algébrique sur $A_{m-1}[X_m]$ et on a automatiquement $|u_j| \leqslant 1$. Donc il existe un N tel que $|u_N| = \sup_j |u_j| = \sup_\nu |a_\nu|$. D'après l'hypothèse de récurrence il existe alors un $\mu \in \mathbb{N}^m$ avec $\mu_m = N$ tel que $|a_\mu| = |u_N|$ ce qui démontre notre assertion.

Pour $u = \Sigma_\nu a_\nu X^\nu \in A_m$ on posera

$$n(u) = \inf(|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_m;\ |a_\mu| = |u| = \sup_\nu |a_\nu|).$$

D'après ce que nous venons de montrer cette définition a bien un sens.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la Proposition 1.9, ce qui démontrera la Théorème 1.4 ainsi que nous l'avons observé.

5.2. *Démonstration de la Proposition 1.9.* Soient $g, f_1, \ldots, f_r \in A_m[Y]$ avec $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, et soit $\bar{y} \in \bar{A}_m^n$ tel que $g(\bar{y})$ divise $f_i(\bar{y})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $(g(\bar{y}) \neq 0)$.

Comme $g(\bar{y}) \in \bar{A}_m$, d'après 5.1 $|g(\bar{y})|$ appartient au groupe des valeurs de $\mathcal{O}$. Soit $c \in \mathcal{O}$ tel que $|c| = |g(\bar{y})|$, alors c divise $g(\bar{y})$ et $|g(\bar{y})/c| = 1$. Soit $s = n(g(\bar{y})) = n(g(\bar{y})/c)$. On peut, par un changement de variables linéaire, se ramener au cas où $g(\bar{y})/c$ est distingué en X_m d'ordre s. Donc, en appliquant le Théorème de préparation 4.11, on a

$$g(\bar{y}) = c\,\bar{p}(X_m) \times \text{unité}$$

avec $\bar{p} = X_m^s + \bar{p}_1 X_m^{s-1} + \cdots + \bar{p}_s$, $\bar{p}_i \in \bar{A}_{m-1}$, $\bar{p}$ distingué.

Effectuons la division par $\bar{p}$ (Théorème 4.10)

$$\bar{y} = \bar{p}\,\bar{z}_\nu + \sum_{j=0}^{s-1} \bar{y}_{\nu j} X_m^j, \quad \bar{z}_\nu \in \bar{A}_m, \quad \bar{y}_{\nu j} \in \bar{A}_{m-1}.$$

Posons

$$\bar{y}'_\nu = \sum_{j=0}^{s-1} \bar{y}_{\nu j} X_m^j = \bar{y}_\nu - \bar{p}\,\bar{z}_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n.$$

En appliquant la formule de Taylor, on voit que $\bar{p}$ divise $g(\bar{y}')$ et $f_i(\bar{y}')$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Remplaçons $\bar{p}_j$ et $\bar{y}_{vj}$ par des variables P_j et Y_{vj}.

Faisons la division suivant les puissances de X_m de

$$g\left(\sum_{j=0}^{s-1} Y_{1j}X_m^j, \ldots\right), f_i\left(\sum_{j=0}^{s-1} Y_{1j}X_m^j, \ldots\right)$$

par $\bar{P} = X_m^s + P_1 X_m^{s-1} + \cdots + P_s$,

$$g = \bar{P}\,Q + \sum_{j=0}^{s-1} G_j\, X_m^j$$

$$f_i = \bar{P}\,Q_i + \sum_{j=0}^{s-1} F_{ij}\, X_m^j,$$

où G_j, $F_{ij} \in A_{m-1}[P_i, Y_{vj}]$.

Par construction, $\bar{p}_j$ et $\bar{y}_{vj}$ sont solutions des équations $G_j = 0$, $F_{ij} = 0$. D'après l'hypothèse de spécialisation continue pour le couple $A_{m-1} \subset \bar{A}_{m-1}$, on peut trouver des solutions arbitrairement proches p_j et $y_{vj} \in A_{m-1}$. On pose

$$p = X_m^s + p_1\, X_m^{s-1} + \cdots + p_s$$

$$y' = \sum_{j=1}^{s-1} y_{vj}\, X_m^j, \quad 1 \leqslant v \leqslant n.$$

Alors p divise $g(y')$ et $f_i(y')$.

On choisit $z \in A_m^n$ arbitrairement proche de $\bar{z}$, et on pose $y_v = p\, z_v + y'_v$. Donc y appartient à A_m^n et est arbitrairement proche de $\bar{y}$. De plus, p divise $g(y)$ et $f_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Pour y suffisamment proche de $\bar{y}$, on aura $|g(y) - g(\bar{y})| < |g(\bar{y})|$ et donc $|g(y)| = |g(\bar{y})| = |c|$, alors c divise $g(y)$ et $|g(y)/c| = 1$. De plus $g(y)/c$ sera aussi distingué d'ordre s en X_m et comme $\deg p = s$ on aura $g(y) = c\,p \times$ unité. Enfin comme $g(\bar{y})$ divise $f_i(\bar{y})$ on a $|f_i(\bar{y})| \leqslant |g(\bar{y})| = |c|$ et donc pour y assez proche de $\bar{y}$ on aura encore $|f_i(y)| \leqslant |c|$ ce qui montre que c divise $f_i(y)$. Puisque $c\,p$ divise $f_i(y)$, $g(y)$ aussi divise $f_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Bibliographie

[A1] M. Artin: On the solutions of analytic equations. *Invent. Math.* 5 (1968) 277–291.

[A2] M. Artin: Algebraic approximation of structures over complete local rings. *Inst. Hautes Etudes Sci., Publ. Math.* 36 (1969) 23–68.

[B] S. Bosch: A ridig analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations. *Math. Ann.* 255, 3 (1981) 395–404.

[D] L. van den Dries: A specialization theorem for p-adic power series converging on the closed unit disc. *J. Algebra* 73, 2 (1981) 613–623.

[Laf] J.-P. Lafon: Séries formelles algébriques. *C. R. Acad. Sci. Paris* 260 (1965) 3238–3241.

[L] S. Lang: On quasi algebraic closure. *Ann. Math.* 55 (1952) 379–390.

[R] P. Robba: Une propriété de spécialisation continue. *GEAU* 8e année, 26 (1980–81) 11 p.