COMPOSITIO MATHEMATICA

J.-L. WALDSPURGER

Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur GL(2)

Compositio Mathematica, tome 54, nº 2 (1985), p. 121-171

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__54_2_121_0>

Compositio Mathematica 54 (1985) 121–171.

QUELQUES PROPRIETES ARITHMETIQUES DE CERTAINES FORMES AUTOMORPHES SUR GL(2)

J-L. Waldspurger

Soit f une forme modulaire holomorphe parabolique de poids k pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$. Notons

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,e^{2\pi i n z}$$

son développement en série de Fourier. Soit σ un automorphisme du corps $\mathbb{C}$. Alors la fonction ${}^{\sigma}f$ définie par

$${}^{\sigma}f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(a_n)\,e^{2\pi i n z}$$

est encore une forme modulaire holomorphe parabolique de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$. On en déduit que si f est propre pour les opérateurs de Hecke, et normalisée par $a_1=1$, le sous-corps $\mathbb{Q}(f)$ de $\mathbb{C}$ engendré par les a_n est une extension finie de $\mathbb{Q}$.

Ces résultats, largement généralisés, qu'on démontre grâce à l'isomorphisme d'Eichler-Shimura, sont à la base de la théorie arithmétique des formes modulaires. Cette théorie se confond pour une large part avec l'oeuvre de Shimura [Sh]. Le corps $\mathbb{Q}(f)$ est un des objets importants attachés à f. Il joue un grand rôle dans la théorie des valeurs spéciales de la fonction L attachée à f ([Sh], [D]).

Depuis l'introduction massive du langage adélique et des méthodes de théorie des groupes dans la théorie des formes modulaires, divers auteurs ont repris la théorie ci-dessus dans ce nouveau cadre. Citons Borel [B1] pour l'étude de la correspondance d'Eichler-Shimura, et Harder pour cells des questions de rationalité dans la théorie cohomologique des groupes arithmétiques, et dans celle des valeurs spéciales de fonctions L ([H]).

Dans un premier paragraphe, on propose un exposé de la théorie ci-dessus pour les représentations automorphes paraboliques de GL_2 sur un corps de nombres, vérifiant certaines conditions aux places archimédiennes. Les principaux résultats sont plus ou moins bien connus. Let méthodes employées sont sans originalité puisqu'elles remontent à Shimura. Notre but est de fournir un exposé de référence pour des travaux ultérieurs.

Un deuxième paragraphe est consacré à une étude analogue pour les représentations d'un groupe de quaternions. En se restreignant aux représentations de caractère central trivial, la théorie est en tout point analogue à celle concernant GL_2.

Le troisième paragraphe est plus original. Soient π une représentation comme ci-dessus, disons de PGL_2, E l'espace de la représentation π. On peut définir le corps de rationalité $\mathbb{Q}(\pi)$ de la représentation π, qui est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et une extension finie de $\mathbb{Q}$. On définit un sous-$\mathbb{Q}(\pi)$-espace $\tilde{E}^0$: ses éléments sont caractérisés (grosso modo) par le fait que leur intégrale le long de tout sous-tore maximal de PGL_2 est, à un facteur explicite près, un élément de $\mathbb{Q}(\pi)$. Cet espace $\tilde{E}^0$ est stable par la composante locale π_v de π pour toute place finie v. En étudiant les propriétés arithmétiques de l'intégrale d'une forme automorphe le long d'un tore, on montre que (grosso modo) $\tilde{E}^0$ engendre E sur $\mathbb{C}$. On peut considérer $\tilde{E}^0$ comme un sous-espace de formes "arithmétiques". Un résultat analogue a été obtenu par Shimura ([Sh2]).

I. Formes automorphes sur GL(2) et rationalite

I.1. Représentations des groupes et rationalité. Un Lemme

Notons $\mathscr{S}$ le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}$. Soient G un groupe, E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, π une représentation de G dans E. Pour $\sigma \in \mathscr{S}$, définissons une classe d'isomorphie de représentations ${}^{\sigma}\pi$ de G. Soient E' un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et t' un isomorphisme σ-linéaire de E sur E' (on a $t'(\lambda e) = \sigma(\lambda)t'(e)$ pour tous $e \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Pour $g \in G$, on définit ${}^{\sigma}\pi(g) \in \mathrm{GL}(E')$ par la formule

$$ {}^{\sigma}\pi(g) = t' \circ \pi(g) \circ t'^{-1}. $$

Alors ${}^{\sigma}\pi$ est une représentation de G dans E' dont la classe d'isomorphie est indépendante du couple (t', E'). Soient

$$ \mathscr{S}(\pi) = \{\sigma \in \mathscr{S}; {}^{\sigma}\pi \sim \pi\}, $$

$\mathbb{Q}(\pi)$ le sous-corps des éléments de $\mathbb{C}$ fixés par $\mathscr{S}(\pi)$. On dit que $\mathbb{Q}(\pi)$ est le corps de rationalité de la représentation π. En général π n'est pas réalisable sur $\mathbb{Q}(\pi)$. On a toutefois le lemme ci-dessous.

Si H est un sous-groupe de G et $\chi \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^{\times})$, posons

$$ E^{H,\chi} = \{e \in E; \forall h \in H, \pi(h)e = \chi(h)e\}. $$

Si $\chi = 1$, on note simplement $E^H = E^{H,1}$.

LEMME I.1: *Soient π une représentation irréductible de G dans E, H un sous-groupe de G, $\chi \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Q}(\pi)^{\times})$, L un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}(\pi)$. Supposons que* $\dim_{\mathbb{C}} E^{H,\chi} = 1$. *Alors il existe un sous-L-espace vectoriel E^0 de E tel que*

(i) $E = E^0 \otimes_L \mathbb{C}$,

(ii) E^0 *est stable par $\pi(g)$ pour tout $g \in G$.*

Get espace E^0 est unique à homothétie près, et $\dim_L(E^{H,\chi} \cap E^0) = 1$.

DÉMONSTRATION: Soient $e \in H^{H,\chi}$, $e \neq 0$, et E^1 le $\mathbb{Q}(\pi)$-espace engendré par les éléments $\pi(g)e$ pour tout $g \in G$. Cet espace vérifie (ii) et engendre E sur $\mathbb{C}$ puisque π est irréductible. Supposons que l'application naturelle $E^1 \otimes_{\mathbb{Q}(\pi)} \mathbb{C} \to E$ n'est par injective. On peut trouver des éléments $e_1, \ldots, e_n$ de E^1, libres sur $\mathbb{Q}(\pi)$, et des $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0. \tag{A}$$

On peut supposer n minimal, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \notin \mathbb{Q}(\pi)$. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\pi)$ tel que $\sigma(\lambda_2) \neq \lambda_2$. Comme ${}^{\sigma}\pi \sim \pi$, il existe un isomorphisme σ-linéaire $t: E \to E$ tel que pour tout $g \in G$, $\pi(g) = t \circ \pi(g) \circ t^{-1}$. On voit alors que $t(e) \in E^{H,\chi}$. Quitte à multiplier t par un scalaire, on peut supposer que $t(e) = e$. Alors $t(\pi(g)e) = \pi(g)e$ pour tout $g \in G$, puis $t(e') = e'$ pour tout $e' \in E^1$. En appliquant t à la relation (A), on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda_i) e_i = 0.$$

D'où

$$\sum_{i=2}^{n} [\sigma(\lambda_i) - \lambda_i] e_i = 0.$$

Cette relation contredit la minimalité de n. Donc $E = E^1 \otimes_{\mathbb{Q}(\pi)} \mathbb{C}$. Posons $E^0 = E^1 \otimes_{\mathbb{Q}(\pi)} L$. Cet espace vérifie les propriétés voulues.

Soit E^2 un sous-espace vérifiant les mêmes propriétés que E^0. Soit $\sigma \in \mathcal{S}$ tel que $\sigma|_L = 1$. Grâce aux égalités (i) pour E^0 et E^2, on définit deux isomorphismes σ-linéaires de E, ${}^{\sigma}t_0 = \mathrm{id}_{E^0} \otimes \sigma$, $\sigma_{t_2} = \mathrm{id}_{E^2} \otimes \sigma$. D'après (ii), ils commutent à π. Donc $({}^{\sigma}t_0)^{-1} \circ {}^{\sigma}t_2$ est un isomorphisme (linéaire) de E commutant à π. Grâce à l'hypothèse $\dim_{\mathbb{C}} E^{H,\chi} = 1$, et à l'irréductibilité, π vérifie le lemme de Schur. Donc $({}^{\sigma}t_0)^{-1} \circ {}^{\sigma}t_2$ est une homothétie. Cela étant vrai pour tout σ tel que $\sigma|_L = 1$, on en déduit facilement que E^2 est homothétique à E^0. □

I.2. Représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$ *et rationalité, pour F un corps p-adique*

Soient F un corps local non archimédien, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, ϖ une uniformisante de F. On appelle caractère de F, ou $F^\times$, un homomorphisme continu de F, ou $F^\times$, dans $\mathbb{C}^\times$. Soient $G=\mathrm{GL}_2(F)$, π une représentation admissible irréductible de G dans un espace E, ω son caractère central. Si $\sigma\in\mathscr{S}$, la représentation ${}^\sigma\pi$ est encore admissible et irréductible, de caractère central $\dot{\sigma}\circ\omega$.

LEMME I.2.1: *Soit L un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *contenant* $\mathbb{Q}(\pi)$. *Il existe un sous-L-espace vectoriel* E^0 *de E tel que*

(i) $E=E^0\otimes_L\mathbb{C}$,

(ii) E^0 *est stable par* $\pi(g)$ *pour tout* $g\in G$.

Cet espace E^0 *est unique à homothétie près.*

Démonstration: Si $\dim_{\mathbb{C}}E=1$, c'est évident. Sinon $\dim_{\mathbb{C}}E$ est infinie, la théorie du nouveau vecteur nous dit que pour un certain sous-groupe de congruence H de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$, $\dim_{\mathbb{C}}E^H=1$. On applique le lemme I.1. □

La variante suivante est utile. Fixons sur G une mesure de Haar telle que la mesure de tout sous-groupe ouvert compact appartienne à $\mathbb{Q}^\times$. Soit $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions sur G, localement constantes, à support compact. Muni du produit de convolution, $\mathscr{H}$ est une algèbre ("de Hecke"). Soit $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}$ le $\mathbb{Q}$-espace des éléments de $\mathscr{H}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$. C'est une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre. On peut identifier représentations admissibles de G et représentations admissibles de $\mathscr{H}$, ou $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}$. En particulier, soient $\sigma\in\mathscr{S}$ et (t', E') comme au (I.1). La représentation ${}^\sigma\pi$ de $\mathscr{H}$ est définie par la formule

$$ {}^\sigma\pi(f)=t'\circ\pi\left(\sigma^{-1}\circ f\right)\circ t'^{-1} $$

pour toute $f\in\mathscr{H}$.

Si K est un sous-groupe de G, on note $\mathscr{H}^K$ et $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^K$ les sous-algèbres de fonctions biinvariantes par K.

LEMME I.2.2: *Soient L un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *contenant* $\mathbb{Q}(\pi)$, *K un sousgroupe ouvert compact de G. Il existe un sous-L-espace vectoriel* $E^{K,0}$ *de* E^K *tel que*

(i) $E^K=E^{K,0}\otimes_L\mathbb{C}$,

(ii) $E^{K,0}$ *est stable par* $\pi(f)$ *pour toute* $f\in\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^K$.

Cet espace $E^{K,0}$ *est unique à homothétie près.*

DÉMONSTRATION: Soit E^0 vérifiant les conditions du Lemme I.2.1. Par intégration, on voit que $(E^0)^K$ engendre E^K sur $\mathbb{C}$. Alors $E^{K,0}=(E^0)^K$ vérifie (i) et (ii). Par ailleurs E^K est de dimension finie, et la représentation de $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^K$ dans E^K est irréductible. Elle vérifie donc le lemme de Schur. L'unicité en résulte, ainsi qu'au lemme I.1. □

EXEMPLE: Soient μ_1, μ_2 deux caractères de F^*, et $\sigma \in \mathscr{S}$. Notons μ_i', $i = 1, 2$, les caractères définis par

$$\mu_i'(x) = |x|^{-1/2}\sigma(\mu_i(x)|x|^{1/2})$$

pour tout $x \in F^x$. Alors

$-si$ $\pi \sim \pi(\mu_1, \mu_2)$, ${}^\sigma\pi \sim \pi(\mu_1', \mu_2')$,

$-si$ $\pi \sim \sigma(\mu_1, \mu_2)$, ${}^\sigma\pi \sim \sigma(\mu_1', \mu_2')$.

En effet si $\mathscr{B}(\mu_1, \mu_2)$ est le module induit des fonctions $f: G \to \mathbb{C}$, localement constantes et telles que

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(a)\mu_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|^{1/2} f(g)$$

pour tous $g \in G$, a, $d \in F^x$, $b \in F$, l'application $f \mapsto \sigma \circ f$ est un isomorphisme σ-linéaire de $\mathscr{B}(\mu_1, \mu_2)$ sur $\mathscr{B}(\mu_1', \mu_2')$. Let assertions en résultent.

LEMME I.2.3: *Soient μ_1, μ_2 deux caractères non ramifiés de F^x. Si $\pi \sim \pi(\mu_1, \mu_2)$, $\mathbb{Q}(\pi)$ est le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par $(\mu_1(\varpi) + \mu_2(\varpi))|\varpi|^{1/2}$ et $\omega(\varpi)$.*

DÉMONSTRATION: Cela résulte des assertions ci-dessus et du fait que si μ_1', μ_2', μ_1'', μ_2'' sont quatre caractères non ramifiés de F^x, on a

$$\begin{aligned} \pi(\mu_1', \mu_2') \sim \pi(\mu_1'', \mu_2'') \Leftrightarrow (\mu_1', \mu_2') = (\mu_1'', \mu_2'') \quad &\text{ou} \\ (\mu_1', \mu_2') = (\mu_2'', \mu_1''),& \\ \Leftrightarrow \mu_1'(\varpi) + \mu_2'(\varpi) = \mu_1''(\varpi) + \mu_2''(\varpi), \quad &\text{et} \\ \mu_1'\mu_2'(\varpi) = \mu_1''\mu_2''(\varpi).& \end{aligned}$$

□

Soit ψ un caractère de F, non trivial. Supposons provisoirement E de dimension infinie. Soient $\mathscr{W}$ le modèle de Whittaker de π relatif à ψ, $\mathscr{K}$ son modèle de Kirillov. Pour $\sigma \in \mathscr{S}$, soit ${}^\sigma\mathscr{W}$, resp. ${}^\sigma\mathscr{K}$, l'espace des fonctions $\sigma \circ f$ pour $f \in \mathscr{W}$, resp. $f \in \mathscr{K}$. Le groupe G agit dans ${}^\sigma\mathscr{W}$ par translations à droite et dans ${}^\sigma\mathscr{K}$ via l'isomorphisme de restriction à la diagonale ${}^\sigma\mathscr{W} \to {}^\sigma\mathscr{K}$.

LEMME I.2.4: *Munis de ces actions, les espaces ${}^\sigma\mathscr{W}$, resp. ${}^\sigma\mathscr{K}$, sont les modèles de Whittaker, resp. de Kirillov, de la représentation ${}^\sigma\pi$ relatifs au caractère $\sigma \circ \psi$.*

C'est immédiat. □

PROPOSITION I.2.5: *Soient* χ *un caractère de* $F^{\times}$, *et* $\sigma \in \mathcal{S}$. *On a les égalités*

$$L({}^{\sigma}\pi \otimes (\sigma \circ \chi), 1/2) = \sigma(L(\pi \otimes \chi, 1/2)),$$

$$\varepsilon({}^{\sigma}\pi \otimes (\sigma \circ \chi), 1/2, \sigma \circ \psi) = \sigma(\varepsilon(\pi \otimes \chi, 1/2, \psi)).$$

DÉMONSTRATION: Si π est cuspidale, ${}^{\sigma}\pi$ l'est aussi, les deux fonctions L sont égales à 1. Si π n'est pas cuspidale, on calcule explicitement les fonctions L grâce aux formules de l'exemple ci-dessus. Pour les facteurs ε, on peut supposer, grâce à [JL] p. 110, que E est de dimension infinie (ou bien on traite à part le cas dim $E = 1$). Soit χ le modèle de Kirillov de π relatif à ψ. Fixons sur $F^{\times}$ une mesure de Haar telle que mes$(\mathcal{O}^{\times}) \in \mathbb{Q}^{\times}$. Pour $e \in \mathcal{K}$, posons

$$Z(e, \chi) = L(\pi \otimes \chi, 1/2)^{-1} \int_{F^{\times}} e(x)\chi(x) \mathrm{d}x,$$

quand cette intégrale converge. On sait que par prolongement analytique, on peut définir $Z(e, \chi)$ pour tout χ, et on a l'équation fonctionnelle

$$Z(\pi(w)e, \chi^{-1}\omega^{-1}) = \varepsilon(\pi \otimes \chi, 1/2, \psi) Z(e, \chi), \tag{B}$$

pour

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquons la même théorie à la représentation ${}^{\sigma}\pi$, aux caractères $\sigma \circ \psi$ et $\sigma \circ \chi$, et à l'élément $\sigma \circ e$ de ${}^{\sigma}\chi$. On obtient

$$Z\left({}^{\sigma}\pi(w)(\sigma \circ e), \sigma \circ (\chi\omega)^{-1}\right) = \varepsilon({}^{\sigma}\pi \otimes (\sigma \circ \chi), 1/2, \sigma \circ \psi) \times Z(\sigma \circ e, \sigma \circ \chi). \tag{C}$$

D'après le lemme I.2.4, ${}^{\sigma}\pi(w)(\sigma \circ e) = \sigma \circ (\pi(w)e)$. Comme l'intégrale $Z(e, \chi)$ s'exprime facilement comme une somme finie, on voit que

$$Z(\sigma \circ e, \sigma \circ \chi) = \sigma(Z(e, \chi)).$$

En combinant alors l'égalité (C) à l'égalité déduite de (B) par application de σ, on obtient l'égalité de l'énoncé. □

I.3. Représentations aux places archimédiennes et rationalité

Soient h, $a \in \mathbb{Z}$ tels que $h \geqslant 2$, $a \equiv h \bmod 2$, et $\varepsilon \in \{0, 1\}$. On note $d = (h, a, \varepsilon)$, $r[d]$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$r[d](g) = \mathrm{Sym}^{h-2}(g) \otimes \left[(\det g)^{1+(a-h)/2}\, \mathrm{sgn}(\det g)^{\varepsilon}\right]$$

pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, et $R[d]$ l'espace de cette représentation.

Soient $h_1, h_2, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $h_i \geqslant 2$, $a_i \equiv h_i \bmod 2$ pour $i = 1, 2$. On note $d = (h_1, h_2, a_1, a_2)$, $r[d]$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ définie par

$$r[d](g) = \mathrm{Sym}^{h_1-2}(g) \otimes \overline{\mathrm{Sym}}^{h_2-2}(g) \otimes \left[(\det g)^{1+(a_1-h_1)/2} (\overline{\det}\, g)^{1+(a_2-h_2)/2}\right]$$

pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, et $R[d]$ l'espace de cette représentation.

Soient F un corps de nombres, S_1, resp. S_2, l'ensemble des places réelles, resp. complexes, de F, $S = S_1 \cup S_2$, $\bar{S}$ l'ensemble des plongements de F dans $\mathbb{C}$. L'ensemble S est le quotient de $\bar{S}$ par la relation d'équivalence identifiant deux plongements conjugués. On fixe une section $S \to \bar{S}$. Pour toute place v de F, notons F_v le complété de F en v, $G_v = \mathrm{GL}_2(F_v)$. Posons $G_\infty = \prod_{v \in S} G_v$. Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\bar{S}} \times \mathbb{Z}^{\bar{S}} \times \{0, 1\}^{S_1}$, formé des éléments $d = ((h_v)_{v \in \bar{S}}, (a_v)_{v \in \bar{S}}, (\varepsilon_v)_{v \in S_1})$, tels que $h_v \geqslant 2$, $a_v \equiv h_v \bmod 2$, pour tout $v \in \bar{S}$. Pour un tel d, notons $r[d]$ la représentation de G_∞

$$r[d] = \bigotimes_{v \in S} r[d_v]$$

où $d_v = (h_v, a_v, \varepsilon_v)$ si $v \in S_1$, $d_v = (h_v, h_{\bar{v}}, a_v, a_{\bar{v}})$ si $v \in S_2$. On note $R[d]$ l'espace de $r[d]$, $r_F[d]$ la restriction de $r[d]$ à $G_F = \mathrm{GL}_2(F)$, plongé naturellement dans G_∞. Le groupe $\mathscr{S}$ agit par composition sur $\bar{S}$. Il agit sur D par la formule suivante: pour $d \in D$ comme ci-dessus, et $\sigma \in \mathscr{S}$,

$$\sigma d = \left((h'_v)_{v \in \bar{S}}, (a'_v)_{v \in \bar{S}}, (\varepsilon'_v)_{v \in S_1}\right)$$

où $h'_v = h_{\sigma^{-1} \circ v}$, $a'_v = a_{\sigma^{-1} \circ v}$ pour tout $v \in \bar{S}$, $\varepsilon'_v = \varepsilon_v$ pour tout $v \in S_1$. Pour $d \in D$, notons $\mathscr{S}(d) = \{\sigma \in \mathscr{S};\ \sigma d = d\}$, $\mathbb{Q}(d)$ le sous-corps des éléments de $\mathbb{C}$ fixés par $\mathscr{S}(d)$.

PROPOSITION I.3: *Soit $d \in D$.*

(i) *Pour tout $\sigma \in \mathscr{S}$, les représentations ${}^{\sigma}r_F[d]$ et $r_F[\sigma d]$ sont équivalentes.*

(ii) $\mathbb{Q}(r_F[d]) = \mathbb{Q}(d)$.

(iii) *Soit L un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}(d)$. Il existe un sous-L-espace vectoriel R^0 de $R[d]$ tel que*

(a) $R[d] = R^0 \otimes_L \mathbb{C}$,

(b) *R^0 est stable par $r[d](g)$ pour tout $g \in G_F$.*

Cet espace R^0 est unique à homothétie près.

DÉMONSTRATION: Pour tout entier $n \geqslant 1$, et tout $v \in \bar{S}$, notons encore v le plongement naturel

$$v\colon \mathrm{GL}_n(F) \to \mathrm{GL}_n(F_v).$$

Notons Sym^n l'homomorphisme évident

$$\mathrm{Sym}^n\colon \mathrm{GL}_2(F) \to \mathrm{GL}_{n+1}(F).$$

Pensons à nos représentations comme à des représentations matricielles. Pour d comme ci-dessus, on a alors, pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(F)$,

$$r_F[d](g) = \left[\bigotimes_{v \in \bar{S}} \left(v \circ \mathrm{Sym}^{h_v - 2}(g) \otimes v \circ \det(g)^{1 + (a_v - h_v)/2}\right)\right] \otimes \prod_{v \in S_1} \mathrm{sgn}(v \circ \det g)^{\varepsilon_v}.$$

Appliquons $\sigma \in \mathscr{S}$ aux coefficients. Comme les signes appartiennent à $\{\pm 1\}$ et sont donc invariants par σ, on obtient

$${}^{\sigma}r_F[d](g) = \left[\bigotimes_{v \in \bar{S}} \left(\sigma \circ v \circ \mathrm{Sym}^{h_v - 2}(g) \otimes \sigma \circ v \circ \det(g)^{1 + (a_v - h_v)/2}\right)\right] \otimes \prod_{v \in S_1} \mathrm{sgn}(v \circ \det g)^{\varepsilon_v}.$$

En écrivant σd comme ci-dessus, on obtient

$${}^{\sigma}r_F[d](g) = \left[\bigotimes_{v \in \bar{S}} \left(\sigma \circ v \circ \mathrm{Sym}^{h'_{\sigma \circ v} - 2}(g) \otimes \sigma \circ v \circ \det(g)^{1 + (a'_{\sigma \circ v} - h'_{\sigma \circ v})/2}\right)\right] \otimes \prod_{v \in S_1} \mathrm{sgn}(v \circ \det g)^{\varepsilon'_v}.$$

Une conjugaison indépendante de g permute les v. Donc ${}^{\sigma}r_F[d](g)$ est conjuguée à

$$\left[\bigotimes_{v \in \bar{S}} \left(v \circ \mathrm{Sym}^{h'_v - 2}(g) \otimes v \circ \det(g)^{1 + (a'_v - h'_v)/2}\right)\right] \otimes \prod_{v \in S_1} \mathrm{sgn}(v \circ \det g)^{\varepsilon'_v},$$

i.e. à $r_F[\sigma d](g)$. On obtient (i). Pour $d_1, d_2 \in D$, $r_F[d_1]$ et $r_F[d_2]$ sont équivalentes si et seulement si $d_1 = d_2$. Alors (ii) résulte de (i). Soient H le sous-groupe diagonal de G_F et χ son caractère

$$\chi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \prod_{v \in \bar{S}} \left(v(a)^{h_v - 2} v(ad)^{1+(a_v - h_v)/2}\right) \cdot \prod_{v \in S_1} \operatorname{sgn}(v(ad))^{\varepsilon_v}.$$

Posons $R = R[d]$. Il est clair que $\dim_{\mathbb{C}} R^{H,\chi} = 1$. On vérifie comme cidessus que les valeurs de χ sont invariantes par $\mathscr{S}(d)$, donc $\chi \in \operatorname{Hom}(H, \mathbb{Q}(d)^{x})$. L'assertion (iii) résulte du lemme I.1. □

I.4. Rappels de $\mathscr{J}$-K cohomologie

On considère un groupe G égal à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ou à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On note $\mathscr{J}$ son algèbre de Lie, K^0 le sous-groupe compact maximal $O_2(\mathbb{R})$ si $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $U_2(\mathbb{C})$ si $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, Z le centre de G, $K = K^0 Z$, $\mathscr{k}$ l'algèbre de Lie de K.

Soit (ρ, U) in $\mathscr{J}$-K-module (ρ est la représentation, U l'espace). Notons pour tout entier $n \geqslant 0$

$$C^n = C^n(\mathscr{J}, K, U) = \operatorname{Hom}_K(\wedge^n(\mathscr{J}/\mathscr{k}), U),$$

où K agit sur $\wedge^n(\mathscr{J}/\mathscr{k})$ via l'application adjointe. Pour $\eta \in C^n$, $X_0, \ldots, X_n \in \mathscr{J}$, posons

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(X_0 \wedge \ldots \wedge X_n) = {} & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \rho(X_i)\eta(X_0 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_n) \\ & + \sum_{i,j,0 \leqslant i<j \leqslant n} (-1)^{i+j} \eta\big([X_i, X_j] \wedge X_0 \\ & \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge \hat{X}_j \wedge \ldots \wedge X_n\big) \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend que des images des X_i dans $\mathscr{J}/\mathscr{k}$, et définit une cochaîne $\mathrm{d}\eta \in C^{n+1}$. Alors $(C^n)_{n \geqslant 0}$ muni de d, est un complexe. On note $H^n(\mathscr{J}, K, U)$ ses groupes de cohomologie.

Si $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, soit $d = (h, a, \varepsilon)$ comme au (I.3). On note $d' = (h, a, \varepsilon')$ où $\varepsilon' = 1 - \varepsilon$, $\check{d} = (h, -a, \varepsilon)$. La représentation $r[\check{d}]$ est la contragrédiente $r[d]^v$ de $r[d]$. Notons $(\pi[d], E[d])$ le $\mathscr{J}$$K$-module admissible irréductible qui apparait comme sous-module du module induit $\mathscr{B}(\mu_1, \mu_2)$, où μ_1 et μ_2 sont les caractères de $\mathbb{R}^x$ définis par

$$\mu_1(x) = x^{(a+h)/2-1}|x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x)^{\varepsilon},$$

$$\mu_2(x) = x^{(a-h)/2+1}|x|^{-1/2} \operatorname{sgn}(x)^{\varepsilon}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^x$. Remarquons que le module quotient est précisément $(r[d], R[d])$, et que $\pi[d] \sim \pi[d']$.

Si $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, soit $d = (h_1, h_2, a_1, a_2)$ comme au (I.3). On note $\check{d} = (h_1, h_2, -a_1, -a_2)$, on a $r[\check{d}] \sim r[d]^v$. Notons $(\pi[d], E[d])$ le $\mathscr{J}$ K-module admissible irréductible qui apparait comme sous-module du module induit $\mathscr{B}(\mu_1, \mu_2)$, où μ_1 et μ_2 sont les caractères de $\mathbb{C}^x$ définis par

$$\mu_1(x) = x^{(a_1+h_1)/2-1}\bar{x}^{(a_2+h_2)/2-1}(x\bar{x})^{1/2},$$

$$\mu_2(x) = x^{(a_1-h_1)/2+1}\bar{x}^{(a_2-h_2)/2+1}(x\bar{x})^{-1/2}$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^x$. Le module quotient est encore $(r[d], R[d])$.

Dans les deux cas, posons pour simplifier $(r, R) = (r[d], R[d])$. Soit (π, E) un $\mathscr{J}K$-module admissible irréductible Considérons le module $(\rho, U) = (\pi \otimes r^v, E \otimes R^v)$. Pour $n \geqslant 0$, posons $C^n = C^n(\mathscr{J}, K, U)$, $H^n = H^n(\mathscr{J}, K, U)$.

Proposition I.4:

(1) *Supposons* $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
  (i) *Si* π *n'est isomorphe ni à* $r[d]$, *ni à* $r[d']$, *ni à* $\pi[d]$, $H^n = \{0\}$ *pour tout* n.
  (ii) *Si* $\pi \sim r[d]$, $H^0 \simeq \mathbb{C}$ *et* $H^n = \{0\}$ *pour* $n \neq 0$.
  (iii) *Si* $\pi \sim r[d']$, $H^2 \simeq \mathbb{C}$ *et* $H^n = \{0\}$ *pour* $n \neq 2$.
  (iv) *Si* $\pi \sim \pi[d]$, $C^1 \simeq H^1 \simeq \mathbb{C}$ *et* $C^n = H^n = \{0\}$ *pour* $n \neq 1$.

(2) *Supposons* $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
  (i) *Si* π *n'est isomorphe ni à* $r[d]$, *ni à* $\pi[d]$, $H^n = \{0\}$ *pour tout* n.
  (ii) *Si* $\pi \sim r[d]$, $H^0 \simeq H^3 \simeq \mathbb{C}$ *et* $H^n = \{0\}$ *pour* $n \neq 0, 3$.
  (iii) *Si* $\pi \sim \pi[d]$, $C^1 \simeq H^1 \simeq \mathbb{C}$, $C^2 \simeq H^2 \simeq \mathbb{C}$, $C^n = H^n = \{0\}$ *pour* $n \neq 1, 2$.

C'est bien connu. □

Donnons, dans les cas (1.iv) et (2.iii), une construction d'un générateur de C^1. Posons $(\pi, E) = (\pi[d], E[d])$, soit $(b, \mathscr{B})$ le $\mathscr{J}K$-module induit décrit avant la proposition. Il y a un sous-module invariant B_1 tel que si b_1 est l'action b de $\mathscr{J} \times K$ dans B_1, (b_1, B_1) est isomorphe à (π, E). Il y a un supplémentaire B_2 de B_1, invariant par K, tel que si $p_2 : \mathscr{B} \to B_2$ est la projection de noyau B_1, et si $\mathscr{J} \times K$ agit dans B_2 par l'action b_2 définie par

$$b_2(k) = b(k),\ b_2(X) = p_2 \circ b(X),$$

pour $k \in K$, $X \in \mathscr{J}$, alors (b_2, B_2) est isomorphe à (r, R). Notons $p_1 : \mathscr{B} \to B_1$ la projection de noyau B_2. Définissons $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathscr{J}, \mathrm{Hom}(B_2, B_1))$ par

$$\eta(X)(x) = p_1 \circ b(X)(x)$$

pour tous $X \in \mathscr{g}$, $x \in B_2$. Comme B_2 est stable par K, $\eta(X)=0$ si $X \in \mathscr{k}$. Faisons agir K sur $\mathscr{g}$ par l'action adjointe, et sur Hom(B_2, B_1) de la façon usuelle. Pour $k \in K$, $X \in \mathscr{g}$, et $x \in B_2$, on a

$$\begin{aligned}\eta(\mathrm{Ad}(k)\cdot X)(x) &= p_1 \circ b(\mathrm{Ad}(k)\cdot X)(x)\\ &= p_1 \circ b(k) \circ b(X) \circ b(k^{-1})(x).\end{aligned}$$

Mais

$$p_1 \circ b(k) = b_1(k) \circ p_1, \quad b(k^{-1})(x) = b_2(k^{-1})(x),$$

d'où

$$\begin{aligned}\eta(\mathrm{Ad}(k)\cdot X)(x) &= b_1(k) \circ p_1 \circ b(X) \circ b_2(k^{-1})(x)\\ &= b_1(k) \circ \eta(X)\big(b_2(k)^{-1}(x)\big),\\ &= [k \cdot \eta(X)](x).\end{aligned}$$

En résumé $\eta \in \mathrm{Hom}_K(\mathscr{g}/\mathscr{k}, \mathrm{Hom}(B_2, B_1))$. De plus $\eta \neq 0$ sinon B_2 serait stable par $\mathscr{g}$, ce qui n'est pas vrai. Identifions B_1 à E, B_2 à R, puis Hom(R, E) à $E \otimes R^v$. Alors η s'identifie à un élément non nul de C^1.

I.5. Formes automorphes et $\mathscr{g}$-K-cohomologie

Les hypothèses et notations introduites ici sont valables pour tout le reste du chapitre.

Soient F un corps de nombres, $\mathbb{A}$ l'anneau de ses adèles, $\mathbb{A}_f$ celui des adèles finies, $\mathbb{A}^x$ le groupe des idèles, et, pour toute place v de F, F_v le complété de F en v. On définit S, $\bar{S}$, etc... comme au (I.3). Posons $s=|S|$. Pour tout groupe algébrique H défini sur F, on note $H_F = H(F)$, $H_{\mathbb{A}} = H(\mathbb{A})$, $H_f = H(\mathbb{A}_f)$, $H_v = H(F_v)$ pour toute place v de F, $H_\infty = \prod_{v \in S} H_v$. Soient $G = \mathrm{GL}_2$, Z son centre, B le groupe des matrices triangulaires supérieures. Pour toute place $v \in S$, on définit $\mathscr{g}_v = \mathrm{Lie}(G_v)$, et des groupes K_v^0, K_v comme au (I.4). On pose $\mathscr{g}_\infty = \oplus_{v \in S} \mathscr{g}_v = \mathrm{Lie}(G_\infty)$, $K_\infty^0 = \prod_{v \in S} K_v^0$, $K_\infty = \prod_{v \in S} K_v$. On note symboliquement $\mathscr{H}$ l'algèbre de Hecke de G, pour laquelle on adopte les mêmes notations que pour un groupe algébrique ($\mathscr{H}_{\mathbb{A}}$, etc ...).

Donnons-nous un élément $d \in D$ et un caractère continu $\omega \in \mathrm{Hom}(F^x \backslash \mathbb{A}^x, \mathbb{C}^x)$. On note $d = ((h_v)_{v \in \bar{S}}, (a_v)_{v \in \bar{S}}, (\varepsilon_v)_{v \in S_1})$, et pour $v \in S$, on définit d_v comme au (I.3). Notons ω_v les complétés locaux de ω. On suppose que pour toute place $v \in S$, ω_v est égal au caractère central de $r[d_v]$, i.e.

$$\omega_v(x)=x^{a_v}, \qquad \text{si} \quad v\in S_1,$$

$$\omega_v(x)=x^{a_v}\bar{x}^{a_v}, \qquad \text{si} \quad v\in S_2,$$

pour tout $x\in F_v^\times$. L'existence d'un tel ω impose des conditions à d. On peut voir que, pour d donné, il existe ω comme ci-dessus si et seulement si la condition suivante est vérifiée

- si $S_1\neq\emptyset$, l'application $\bar{S}\to\mathbb{Z}$, $v\mapsto a_v$, est constante;
- si $S_1=\emptyset$, l'application $S\times\mathscr{S}\to\mathbb{Z}$, $(v,\sigma)\mapsto a_{\sigma\circ v}+a_{\sigma\circ\bar{v}}$, est constante.

Soient $\mathscr{A}(\omega)$ l'espace des formes automorphes sur $G_F\backslash G_{\mathbf{A}}$, de caractère central ω, $\mathscr{A}_0(\omega)$ le sous-espace des formes paraboliques. L'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}$ agit sur $\mathscr{A}(\omega)$ et $\mathscr{A}_0(\omega)$ via les translations à droite. Soit $\mathscr{A}_1(\omega)$ l'espace somme de $\mathscr{A}_0(\omega)$ et des sous-espaces irréductibles de dimension 1 de $\mathscr{A}(\omega)$. Notons $A_0(\omega)$, resp. $A_1(\omega)$, l'ensemble des sous-espaces irréductibles de $\mathscr{A}_0(\omega)$, resp. $\mathscr{A}_1(\omega)$. Grâce au théorème de multiplicité 1, on peut considérer $A_0(\omega)$ et $A_1(\omega)$ comme des ensembles de représentations. On note (π, E), ou π, ou E, un élément de $A_0(\omega)$ ou $A_1(\omega)$, π étant une représentation et E son espace. Si $\pi\in A_1(\omega)$, il existe pour toute place v de F une représentation admissible irréductible π_v de $\mathscr{H}_v$, telle que π soit isomorphe au produit tensoriel restreint $\otimes_v\pi_v$. Notons $A_1(\omega, d)$ l'ensemble des $\pi\in A_1(\omega)$ tels que pour toute place $v\in S_1$, resp. S_2, π_v est isomorphe soit à $r[d_v]$, soit à $r[d_v']$, soit à $\pi[d_v]$, resp. soit à $r[d_v]$, soit à $\pi[d_v]$, cf. (I.3.4), et $A_0(\omega, d)=A_1(\omega, d)\cap A_0(\omega)$. On a $A_0(\omega, d)=A_1(\omega, d)$ sauf si $h_v=2$ pour tout $v\cap\bar{S}$.

Soient K un sous-groupe ouvert compact de G_f, $\mathscr{C}(\omega, K)$ l'espace des fonctions $\varphi: G_F\backslash G_{\mathbf{A}}/K\to\mathbb{C}$ qui sont C^∞ comme fonctions des composantes aux places archimédiennes et qui vérifient $\varphi(zg)=\omega(z)\varphi(g)$, pour tous $z\in Z_{\mathbf{A}}$, $g\in G_{\mathbf{A}}$, $\mathscr{C}_B(\omega, K)$ l'espace des fonctions sur $B_F\backslash G_{\mathbf{A}}/K$ vérifiant les mêmes propriétés. Notons $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}^K$, $\mathscr{H}_f^K$ les sous-algèbres des éléments bi-K-invariants de $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}$ et $\mathscr{H}_f$. L'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}^K$ agit sur $\mathscr{C}(\omega,K)$ et $\mathscr{C}_B(\omega, K)$ via les translations à droite. En particulier, ces espaces sont des $\mathscr{I}_\infty$-K_∞-modules. Posons, pour tout $n\geqslant 0$

$$H^n=H^n_{\omega,d,K}=H^n\big(\mathscr{I}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}(\omega, K)\otimes R[d]^v\big),$$

$$H^n_B=H^n_{B,\omega,d,K}=H^n\big(\mathscr{I}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}_B(\omega, K)\otimes R[d]^v\big).$$

L'injection naturelle $\mathscr{C}(\omega, K)\to\mathscr{C}_B(\omega, K)$ définit par fonctorialité une application $H^n\to H^n_B$ dont nous noterons $\tilde{H}^n$ le noyau.

Soit $(\pi, E)\in A_1(\omega)$. Ecrivons $\pi\sim\otimes_v\pi_v$, soient E_v l'espace de la représentation π_v, $E_f=\otimes_{v\notin S}E_v$ (produit restreint), E^K et E_f^K les sous-espaces des éléments de E ou E_f fixés par K. On a $E^K\subset\mathscr{C}(\omega, K)$, d'où une application

$$H^n(\mathscr{J}_\infty,\ K_\infty,\ E^K \otimes R[d]^v) \to H^n.$$

Notons $H^n(E) = H^n_{\omega,d,K}(E)$ son image.

L'algèbre $\mathscr{H}_f^K$ agit dans les espaces H^n, H^n_B, $\tilde{H}^n$, $H^n(E)$, E_f^K.

THÉORÈME I.5.1: (1) *Il existe un ensemble* $\mathscr{E}$ *tel que*

(i) $\mathscr{E} \subset A_1(\omega,\ d)$,

(ii) *si* $E \in \mathscr{E}$, *on a* $E_f^K \neq \{0\}$, *et il existe un entier* $m \geqslant 1$ *tel que les* $\mathscr{H}_f^K$*-modules* $H^s(E)$ *et* $m \cdot E_f^K (= E_f^K \oplus \dots \oplus E_f^K)$ *soient isomorphes*,

(iii) *il y a une décomposition en somme directe de* $\mathscr{H}_f^K$*-modules*

$$\tilde{H}^s = \bigoplus_{E \in \mathscr{E}} H^s(E).$$

(2) *Si* $E \in A_0(\omega,\ d)$ *et* $E_f^K \neq \{0\}$, *alors* $E \in \mathscr{E}$ *et l'entier* m *du* (ii) *est égal à* 1.

DÉMONSTRATION: (a) Ici les propriétés de "rationalité" de ω et $r[d]$ n'interviennent pas. Supposons démontré le théorème pour le caractère $\omega|\omega|^{-1}$, et la représentation $r[d] \otimes |\omega \circ \det|^{-1/2}$. On en déduit le théorème pour ω et $r[d]$, par un procédé de tensorisation. On suppose donc ω unitaire. Posons pour simplifier les notations $(r,\ R) = (r[d],\ R[d])$.

(b) Notons $\mathscr{C}_2(\omega,\ K)$ l'espace des $\varphi \in \mathscr{C}(\omega,\ K)$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$, tous $X_1, \dots, X_i \in \mathscr{J}_\infty$, $|X_1 * \dots * X_i * \varphi|$ est de carré intégrable sur $G_F Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}$. Pour tout $n \geqslant 0$, soit $H^n_{(2)}$ l'image de l'application naturelle

$$H^n(\mathscr{J}_\infty,\ K_\infty,\ \mathscr{C}_2(\omega,\ K) \otimes R^v) \to H^n.$$

On sait qu'il existe un ensemble $\mathscr{E}_2 \subset A_1(\omega)$ tel que $H^s_{(2)}$ se décompose en une somme directe de $\mathscr{H}_f^K$-modules

$$H^s_{(2)} = \bigoplus_{E \in \mathscr{E}_2} H^s(E).$$

On peut supposer que si $E \in \mathscr{E}_2$, $H^s(E) \neq \{0\}$. On sait de plus que si $E \in A_0(\omega)$, les modules $H^s(E)$ et $H^s(\mathscr{J}_\infty,\ K_\infty,\ E^K \otimes R^v)$ sont isomorphes ([B1]).

(c) Soit $(\pi,\ E) \in A_1(\omega)$, écrivons $E \simeq \otimes_v E_v$ comme plus haut, posons $E_\infty = \otimes_{v \in S} E_v$. On a $E^K \simeq E_f^K \otimes E_\infty$, d'où

$$H^s(\mathscr{J}_\infty,\ K_\infty,\ E^K \otimes R^v) \simeq E_f^K \otimes H^s(\mathscr{J}_\infty,\ K_\infty,\ E_\infty \otimes R^v).$$

D'après la formule de Künneth, on a

$$H^*(\mathscr{J}_\infty,\ K_\infty,\ E_\infty \otimes R^v) \simeq \bigotimes_{v \in S} H^*(\mathscr{J}_v,\ K_v,\ E_v \otimes R[d_v]^v).$$

Grâce à la proposition I.4, ces formules montrent que si $H^s(E) \neq \{0\}$, on a $E \in A_1(\omega, d)$, $E_f^K \neq \{0\}$, $H^s(E) \simeq m \cdot E_f^K$ comme $\mathscr{H}_f^K$-modules pour un certain entier m, et même $H^s(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, E^K \otimes R^v) \simeq E_f^K$ si $E \in A_0(\omega, d)$.

(d) On déduit de (b) et (c) que le théorème est vrai si on remplace $\tilde{H}^s$ par $H^s_{(2)}$. Notons $\mathscr{C}_c(\omega, K)$ l'espace des $\varphi \in \mathscr{C}(\omega, K)$ tels que $|\varphi|$ est à support compact dans $G_F Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}$, et pour tout $n \geqslant 0$, $\tilde{H}^n$ l'image de l'application naturelle

$$H^n(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}_c(\omega, K) \otimes R^v) \to H^n.$$

Notons $\mathscr{C}'_B(\omega, K)$ le quotient de $\mathscr{C}_B(\omega, K)$ par le sous-espace des éléments de $\mathscr{C}_B(\omega, K)$ qui s'annulent dans un certain domaine de Siegel. D'après [L] Lemme 2.3, la suite naturelle

$$0 \to \mathscr{C}_c(\omega, K) \to \mathscr{C}(\omega, K) \to \mathscr{C}'_B(\omega, K) \to 0$$

est exacte. On en deduit que $\tilde{H}^s$ est le noyau de l'application

$$H^s \to H^s(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}'_B(\omega, K) \otimes R^v).$$

Comme l'application $\mathscr{C}(\omega, K) \to \mathscr{C}'_B(\omega, K)$ se factorise par $\mathscr{C}(\omega, K) \to \mathscr{C}_B(\omega, K)$, $\tilde{H}^s$ est inclus dans ce noyau. Donc $\tilde{H}^s \subset \tilde{H}^s$. De plus $\mathscr{C}_c(\omega, K) \subset \mathscr{C}_2(\omega, K)$, d'où $\tilde{H}^s \subset H^s_{(2)}$. Alors $\tilde{H}^s$ est un sous-$\mathscr{H}_f^K$-module de $H^s_{(2)}$, et il existe $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}_2$ tel que l'assertion (1) soit vraie. Pour démontrer (2), il suffit de montrer que si $E \in A_0(\omega)$, on a $H^s(E) \subset \tilde{H}^s$.

(e) Soit $\mathscr{C}^0_B(\omega, K)$ l'espace des $\varphi \in \mathscr{C}_B(\omega, K)$ tels que

$$\int_{F \backslash \mathbf{A}} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \mathrm{d}b = 0$$

pour tout $g \in G_{\mathbf{A}}$. Si $E \in A_0(\omega)$, l'application $E^K \to \mathscr{C}(\omega, K) \to \mathscr{C}_B(\omega, K)$ se factorise par $E^K \to \mathscr{C}^0_B(\omega, K) \to \mathscr{C}_B(\omega, K)$, donc l'application

$$H^s(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, E^K \otimes R^v) \to H^s_B$$

se factorise par $H^s(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}^0_B(\omega, K) \otimes R^v)$. La dernière assertion de (d) résulte alors de la proposition ci-dessous. □

PROPOSITION I.5.2: *Pour tout* $n \geqslant 0$, $H^n(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}^0_B(\omega, K) \otimes R[d]^v) = \{0\}$.

Pour $F = \mathbf{Q}$, c'est le lemme 2.4 de $[L]$. Une démonstration analogue marche dans le cas général. □

Soit $(\pi, E) \in A_0(\omega, d)$. Il est utile d'expliciter l'isomorphisme $E_f^K \simeq H^s(E)$ du (2) du théorème I.5.1. Fixons un isomorphisme i: $\otimes_v E_v \to E$, et pour toute place $v \in S$, un élément non nul $\eta_v \in C^2(\mathscr{J}_v, K_v, E_v \otimes R[d_v]^v)$ (cf. proposition I.4). Soit $\eta \in C^s(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, E_\infty \otimes R[d]^v)$ l'élément déduit par tensorisation. Pour $e \in E_f^K$, soit $\eta'_e \in C^s(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, E \otimes R[d]^v)$ l'élément définit par

$$\eta'_e(X) = (i \otimes \mathrm{id})(e \otimes \eta(X)).$$

pout $X \in \Lambda^s(\mathscr{J}_\infty/\mathscr{k}_\infty)$ (le premier signe $\otimes$ est relatif à la décomposition $(\otimes_v E_v) \otimes R[d]^v$, le second à la décomposition $(\otimes_{v \notin S} E_v) \otimes [(\otimes_{v \in S} E_v) \otimes R[d]^v]$. Ces espaces sont canoniquement isomorphes). Soit $\eta''_e \in C^s(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}(\omega, K) \otimes R[d]^v)$ l'image naturelle de η'_e. Alors η''_e définit un élément $\eta_e \in H^s$, et l'application $e \mapsto \eta_e$ est l'isomorphisme cherché.

I.6. $\mathscr{J}$-K cohomologie, et cohomologie des groupes discrets

Notons $\mathrm{PG} = \mathrm{PGL}_2$, $p: G \to \mathrm{PG}$ la projection naturelle. Pour toute place v de F notons pr_v la projection évidente de $G_{\mathbf{A}}$ sur G_v ou de $\mathrm{PG}_{\mathbf{A}}$ sur PG_v. On définit de même pr_f et pr_∞.

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G_f. L'ensemble

$$I = I(K) = G_F \backslash G_{\mathbf{A}} / (G_\infty \times K) Z_{\mathbf{A}}$$

est fini (bien sûr $G_\infty \times K = \{g \in G_{\mathbf{A}};\ \mathrm{pr}_f g \in K,\ \mathrm{pr}_\infty g \in G_\infty\}$). Fixons un système de représentants $(x_i)_{i \in I}$, avec $x_i \in G_f$. Pour tout $i \in I$, posons $\Gamma'_i = G_F \cap (G_\infty \times x_i K x_i^{-1}) Z_{\mathbf{A}}$, $\Gamma''_i = \mathrm{pr}_\infty(\Gamma'_i)$, $\Gamma_i = p(\Gamma''_i) \subset \mathrm{PG}_\infty$.

LEMME I.6.1: *Si K est assez petit, Γ_i est sans torsion pour tout $i \in I$.*

DÉMONSTRATION: On montre facilement que, pour tout $i \in I$, il existe un sous-groupe de congruence $\tilde{\Gamma}_i \subset \Gamma_i$, d'indice fini et sans torsion. Il existe un sous-groupe K_i ouvert compact de K, d'indice fini, tel que

$$p \circ \mathrm{pr}_\infty\big(G_F \cap \big(G_\infty \times x_i K_i x_i^{-1}\big) Z_{\mathbf{A}}\big) \subset \tilde{\Gamma}_i.$$

Soit K_0 un sous-groupe ouvert compact de K, distingué, d'indice fini, contenu dans tous les K_i pour $i \in I$. Soient $\bar{K}$ un sous-groupe ouvert compact de K_0, $(\bar{x}_j)_{j \in J}$ un système de représentants de l'ensemble $J = I(\bar{K})$, $\bar{\Gamma}_j$, pour $j \in J$, les groupes analogues à Γ_i. Ces groupes sont sans torsion. En effet cette propriété ne dépend pas du système de représentants choisi, car changer de système conjugue les groupes $\bar{\Gamma}_j$ par des éléments de $\mathrm{pr}_\infty(\mathrm{PG}_F)$. On peut supposer que pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ et $k_j \in K$ tels que $\bar{x}_j = x_i k_j$. Alors pour tout $j \in J$,

$$\bar{x}_j \bar{K} \bar{x}_j^{-1} \subset \bar{x}_j K_0 \bar{x}_j^{-1} = x_i k_j K_0 k_j^{-1} x_i^{-1} = x_i K_0 x_i^{-1},$$

puisque K_0 est distingué dans K, d'où

$$\bar{x}_j \bar{K} \bar{x}_j^{-1} \subset x_i K_i x_i^{-1},$$

puis $\bar{\Gamma}_j \subset \tilde{\Gamma}_i$, qui est sans torsion. □

Nous supposerons désormais le groupe K assez petit pour vérifier la conclusion du lemme, et $\omega|_{K \cap Z_f} = 1$. Soient $i \in I$, $\gamma \in \Gamma_i'$, $k \in K$, $z \in Z_f$, tels que $\mathrm{pr}_f(\gamma) = x_i k x_i^{-1} z$. Posons $\omega_i(\gamma) = \omega_f(z)^{-1}$. Cela définit un caractère de Γ_i'. On note encore ω_i le caractère de Γ_i'' qui s'en déduit par l'isomorphisme $\Gamma_i' \xrightarrow{\sim} \Gamma_i''$. Notons $\mathscr{C}(\omega_i, \Gamma_i'')$ l'espace des fonctions φ sur G_∞, de classe C^∞, telles que

$$\varphi(\gamma z g) = \omega_i(\gamma)\omega_\infty(z)\varphi(g)$$

pour tous $\gamma \in \Gamma_i''$, $z \in Z_\infty$, $g \in G_\infty$. Si $\varphi \in \mathscr{C}(\omega, K)$ et $i \in I$, soit φ_i la fonction sur G_∞ définie par $\varphi_i(g) = \varphi(x_i g)$ pour tout $g \in G_\infty$. Alors $\varphi_i \in \mathscr{C}(\omega_i, \Gamma_i'')$ et l'application

$$\mathscr{C}(\omega, K) \to \bigoplus_{i \in I} \mathscr{C}(\omega_i, \Gamma_i'')$$

$$\varphi \mapsto (\varphi_i)_{i \in I}$$

est un isomorphisme. Posons pour tous $n \geqslant 0$ et $i \in I$

$$H_i^n = H^n(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}(\omega_i, \Gamma_i'') \otimes R[d]^v).$$

On a un isomorphisme

$$H^n \simeq \bigoplus_{i \in I} H_i^n.$$

Fixons $i \in I$. Posons $(r, R) = (r[d], R[d])$, soit (r_i, R_i) la représentation de Γ_i'' définie par $R_i = R$, $r_i = \omega_i^{-1} \otimes (r|_{\Gamma_i''})$. Elle est triviale sur $\Gamma_i'' \cap Z_\infty$ et définit une représentation de Γ_i encore notée (r_i, R_i). On définit les groupes de cohomologie $H^n(\Gamma_i, R_i^v)$. Nous allons définir pour tout n une application $A_i^n : H_i^n \to H^n(\Gamma_i, R_i^v)$ et prouver

PROPOSITION I.6.2: *Pour tous $i \in I$, $n \geqslant 0$, A_i^n est un isomorphisme.*

C'est bien connu, mais il est utile d'expliciter A_i^n.

DÉMONSTRATION: Soit $C_i^n = C^n(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}(\omega_i, \Gamma_i'') \otimes R^v)$.
(a) Soient $X = G_\infty/K_\infty$ (rappelons que $Z_\infty \subset K_\infty$), TX son fibré tangent, $C^n(X, R_i^v)$ l'espace des formes différentielles sur X, de degré n, de classe

C^∞, à valeurs dans R_ι^v. Le groupe Γ_ι agit sur X par translations à gauche, donc sur TX, et sur $C^n(X, R_\iota^v)$ par la formule

$$(\gamma \times \mu)(x) = (\gamma \times \mu)(x) = r_\iota^v(\gamma)\mu(\gamma^{-1} \cdot x)$$

pour $\mu \in C^n(X, R_\iota)$, $\gamma \in \Gamma_\iota$, $x \in \Lambda^n TX$. Notons $C^n(X, R_\iota^v)^{\Gamma_\iota}$ l'espace des invariants. Nous allons définir une application $B_\iota^n: C_\iota^n \to C^n(X, R_i^v)^{\Gamma_\iota}$.

Soient $g \in G_\infty$, $Y \in \mathscr{J}_\infty/\mathscr{k}_\infty$, f une fonction C^∞ sur X, qu'on peut considérer comme fonction sur G_∞, posons

$$\delta_{g,Y}(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(ge^{tY}).$$

Alors $\delta_{g,Y}$ définit une dérivation sur X. Elle ne dépend que de l'image de (g, Y) dans $[G_\infty \times (\mathscr{J}_\infty/\mathscr{k}_\infty)]/K_\infty$, où K_∞ agit sur G_∞ par translations à droite, et sur $\mathscr{J}_\infty$ par l'inverse de l'application adjointe. Par tensorisation, on en déduit une application

$$[G_\infty \times \wedge^n(\mathscr{J}_\infty/\mathscr{k}_\infty)]/K_\infty \to \wedge^n TX. \tag{D}$$

C'est un isomorphisme. Pour $g \in G_\infty$, soit $\varepsilon_g: \mathscr{C}(\omega_\iota, \Gamma_\iota'') \to \mathbb{C}$ l'évaluation en g.

Soit $\eta \in C_\iota^n$. On définit $\mu: G_\infty \times \Lambda^n(\mathscr{J}_\infty/\mathscr{k}_\infty) \to R_\iota^v$ par

$$\mu(g, Y) = (\varepsilon_g \otimes r^v(g)) \circ \eta(Y).$$

On vérifie que μ est invariante par K_∞. D'après (D), elle définit un élément de $C^n(X, R_i^v)$. On vérifie que cet élément est invariant par Γ_i. On le note $B_i^n(\eta)$, ce qui définit l'application B_i^n.

(b) L'application B_i^n "passe à la cohomologie", et définit une bijection

$$B_i^n: H_i^n \to H^n(\Gamma_i \backslash X, \mathscr{F}_i^v),$$

si $\mathscr{F}_\iota$ est le fibré sur $\Gamma_i \backslash X$ déduit de la représentation (r_i, R_i).

(c) Nous allons définir une application $Q_i^n: H^n(\Gamma_i \backslash X, \mathscr{F}_\iota^v) \to H^n(\Gamma_i, R_i^v)$. Cette construction est valable pour toute variété X isomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour un certain N, et tout groupe Γ_i y opérant proprement et librement.

Pour $m, n \geqslant 0$ soit $C^{m,n}$ l'espace des fonctions de $(\Gamma_i)^n$ dans $C^m(X, R_i^v)$. La dérivation des formes différentielles définit une dérivation

$$d_X: C^{m,n} \to C^{m+1,n}.$$

On définit une dérivation

$$d_\Gamma: C^{m,n} \to C^{m,n+1}$$

par la formule habituelle

$$(d_\Gamma c)(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}) = \gamma_1 \times c(\gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j c(\gamma_1, \ldots, \gamma_j\gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_{n+1}) + (-1)^{n+1} c(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

pour $c \in C^{m,n}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} \in \Gamma_i$. Les dérivations d_X et d_Γ commutent, d_X est exacte en degré $m \neq 0$, d_Γ est exacte en degré $n \neq 0$.

Soit $\mu \in C^n(X, R_i^v)^{\Gamma_i}$, avec $d\mu = 0$. On définit par récurrence $\mu_j \in C^{n-j,j}$, $j = 0, \ldots, n$, tel que $d_X\mu_j = 0$, $d_\Gamma\mu_j = 0$. Pour $j = 0$, μ_0 est l'image de μ par la bijection naturelle $C^{n,0} = C^n(X, R_i^v)$. L'invariance de μ par Γ_i implique $d_\Gamma\mu_0 = 0$. Si on a construit μ_j pour $j < n$, comme $d_X\mu_j = 0$, il existe $\mu'_j \in C^{n-j-1,j}$ tel que $d_X\mu'_j = \mu_j$. On pose $\mu_{j+1} = d_\Gamma\mu'_j$. Les éléments de $C^0(X, R_i^v)$ annulés par la différentielle sont les constantes, qui s'identifient à leurs valeurs dans R_i^v. On voit alors que μ_n s'identifie à un n-cocycle sur Γ_i à valeurs dans R_i^v, dont on note $Q_i^n(\mu)$ la classe de cohomologie. Elle est indépendante des choix effectués. Cela définit l'application Q_i^n. C'est un isomorphisme, son inverse se construisant par le même procédé.

(d) On pose $A_i^n = Q_i^n \circ B_i^n$. La proposition résulte de (b) et (c). □

On note A^n la composée des applications

$$H^n \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} H_i^n \xrightarrow{\oplus A_i^n} \bigoplus_{i \in I} H^n(\Gamma_i, R_i^v).$$

Pour tout $i \in I$, l'ensemble

$$J(i) = B_F \backslash G_F / \Gamma'_i$$

est fini. Soient $(h_{ij})_{j \in J(i)}$, un système de représentants, et, pour tout $j \in J(i)$,

$$\Delta'_{ij} = \left(h_{ij}^{-1} B_F h_{ij}\right) \cap \left(G_\infty \times x_i K x_i^{-1}\right) Z_{\mathbf{A}},$$

$$\Delta''_{ij} = \mathrm{pr}_\infty\left(\Delta'_{ij}\right), \ \Delta_{ij} = p\left(\Delta''_{ij}\right).$$

On vérifie que $\Delta_{ij} \subset \Gamma_i$. On peut alors définir des groupes de cohomologie $H^n(\Delta_{ij}, R_i^v)$, des applications de restriction

$$\mathrm{res}_{ij}^n : H^n(\Gamma_i, R_i^v) \to H^n\left(\Delta_{ij}, R_i^v\right),$$

puis par sommation

$$\mathrm{res}^n\colon \bigoplus_{i\in I} H^n(\Gamma_i, R_i^v) \to \bigoplus_{i\in I}\ \bigoplus_{j\in J(i)} H^n(\Delta_{ij}, R_i^v).$$

PROPOSITION I.6.3: *Pour tout $n \geqslant 0$, l'isomorphisme A^n envoie le sous-espace $\tilde{H}^n$ sur le noyau de* res^n.

DÉMONSTRATION: Pour $i \in I$, $j \in J(i)$, soit $\mathscr{C}(\omega_i, \Delta''_{ij})$ l'espace des fonctions φ sur G_∞, de classe C^∞, telles que

$$\varphi(\delta z g) = \omega_i(\delta)\omega_\infty(z)\varphi(g)$$

pour tous $\delta \in \Delta''_{ij}$, $z \in Z_\infty$, $g \in G_\infty$. Comme l'ensemble $(h_{ij}x_i)_{i\in I, j\in J(i)}$ est un système de représentants de

$$B_F \backslash G_{\mathbf{A}} / (G_\infty \times K) Z_{\mathbf{A}},$$

l'application suivante est un isomorphisme

$$\mathscr{C}_B(\omega, K) \to \bigoplus_{i\in I}\ \bigoplus_{j\in J(i)} \mathscr{C}(\omega_i, \Delta''_{ij})$$

$$\varphi \mapsto (\varphi_{ij})$$

où $\varphi_{ij}(g) = \varphi(h_{ij}x_i g)$ pour tout $g \in G_\infty$. Pour tous $n \geqslant 0$ et $i \in I$, $j \in J(i)$, posons

$$H_{ij}^n = H^n\big(\mathscr{G}_\infty, K_\infty, \varphi(\omega_i, \Delta''_{ij}) \otimes R^v\big).$$

Alors $H_B^n \simeq \oplus_{i,j} H_{ij}^n$. Pour tous i, j, on a $\Delta''_{ij} \subset \Gamma''_i$, d'où une application $\mathscr{C}(\omega_i, \Gamma''_i) \to \mathscr{C}(\omega_i, \Delta''_{ij})$, et par sommation un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\omega, K) & \longrightarrow & \mathscr{C}_B(\omega, K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_i \mathscr{C}(\omega_i, \Gamma''_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \mathscr{C}(\omega_i, \Delta''_{ij}) \end{array}$$

Il est commutatif, donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^n & \longrightarrow & H_B^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_i H_i^n & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} H_{ij}^n \end{array} \qquad \text{(E)}$$

qui s'en déduit l'est aussi. Pour tous i, j, on définit comme à la proposition I.6.2 un isomorphisme $A^n_{ij}: H^n_{ij} \to H^n(\Delta_{ij}, R^v_i)$. La construction montre que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^n_i & \longrightarrow & H^n_{ij} \\ {\scriptstyle A^n_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A^n_{ij}} \\ H^n(\Gamma_i, R^v_i) & \xrightarrow{\mathrm{res}^n_{ij}} & H^n(\Delta_{ij}, R^v_i) \end{array} \qquad \text{(F)}$$

est commutatif. En combinant (E), (F), et la définition de $\tilde{H}^n$, on obtient l'énoncé. □

I.7. Action de l'algèbre de Hecke

Fixons sur G_f une mesure de Haar telle que $\mathrm{mes}(K) \in \mathbb{Q}^*$. L'algèbre $\mathcal{H}_f^K$ est l'algèbre de convolution des fonctions sur G_f, à support compact, biinvariantes par K. Pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{H}_f^K$ agit sur H^n, donc sur $\oplus_{i \in I} H^n(\Gamma_i, R^v_i)$ via l'isomorphisme A^n. On note ρ ces deux actions. Nous allons expliciter la seconde.

Pour tout $i \in I$, fixons des applications continues

$$h_i: G_f \to G_F,\ k_i: G_f \to K,\ z_i: G_f \to Z_f,\ \tau(i, \cdot): G_F \to I,$$

telles que

(1) pour tout $g \in G_f$, $x_i g = \mathrm{pr}_f(h_i(g)) x_{\tau(i,g)} k_i(g) z_i(g)$,

(2) pour tous $g \in G_f$, $z \in Z_f$, $h_i(gz) = h_i(g)$, $k_i(gz) = k_i(g)$, $z_i(gz) = z\, z_i(g)$.

Un tel choix est possible. L'application $\tau(i, \cdot)$ est bien déterminée par (a).

Soient $n \geqslant 0$, $g \in G_f$. Nous allons définir une application

$$(\Gamma_i)^n \to (\Gamma_{\tau(i,g)})^n$$
$$\gamma \mapsto g \cdot \gamma$$

Soient $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (\Gamma_i)^n$, et, pour $j = 1, \ldots, n$, $\gamma'_j \in G_F$ tel que $p \circ \mathrm{pr}_\infty(\gamma'_j) = \gamma_j$. Posons $g_0 = g$, et pour $j = 1, \ldots, n$, $g_j = x_i^{-1} \mathrm{pr}_f(\gamma'_1 \ldots \gamma'_j)^{-1} x_i g$. Pour $j = 1, \ldots, n$, posons $\xi'_j = h_i(g_{j-1})^{-1} \gamma'_j h_i(g_j)$, et $\xi_j = p \circ \mathrm{pr}_\infty(\xi'_j)$. D'après (b), ce terme ne dépend pas du choix des γ'_j. Montrons que $\xi_j \in \Gamma_{\tau(i,g)}$. Posons $\tau = \tau(i, g)$. On a l'égalité

$$x_i g_j = \mathrm{pr}_f(\gamma'_1 \ldots \gamma'_j)^{-1} x_i g = \mathrm{pr}_f\left[(\gamma'_1 \ldots \gamma'_j)^{-1} h_i(g)\right] x_\tau k_i(g) z_i(g).$$

Comme $\gamma'_\ell \in G_F$ pour tout ℓ, c'est une décomposition du type (a). Donc $\tau(i, g_j) = \tau$ et il existe $\nu'_j \in \Gamma'_\tau$ tel que

$$(\gamma'_1 \ldots \gamma'_j)^{-1} h_i(g) = h_i(g_j) \nu'_j.$$

Alors $\xi'_1 = \nu'^{-1}_1$, $\xi'_j = \nu'_{j-1}\nu'^{-1}_j$ si $j > 1$, donc $\xi'_j \in \Gamma'_\tau$ et $\xi_j \in \Gamma_\tau$ pour tout j. On peut poser $g \cdot \gamma = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Notons $C^n(\Gamma_\iota, R^v_\iota)$ l'espace des cochaînes. Soient $f \in \mathscr{H}_f^K$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_\iota) \in \oplus_{\iota \in I} C^n(\Gamma_\iota, R^v_i)$. Pour $i \in I$, définissons $\bar{\beta}_\iota \in C^n(\Gamma_\iota, R^v_\iota)$ par

$$\bar{\beta}_\iota(\gamma) = \int_{G_f} r^v(\mathrm{pr}_\infty \circ h_\iota(g)) \circ \bar{\alpha}_{\tau(\iota, g)}(g \cdot \gamma)\omega_f \circ z_\iota(g) f(g) \mathrm{d}g.$$

Remarque: la fonction à intéger est invariante à droite par un sous-groupe ouvert.

On pose $\rho_0(f)(\bar{\alpha}) = (\bar{\beta}_\iota)_{\iota \in I}$.

Remarque: cela ne définit pas une représentation d'algèbre.

Proposition I.7: *Soient* $f \in \mathscr{H}_f^K$, $\alpha \in \oplus_{\iota \in I} H^n(\Gamma_\iota, R^v_\iota)$, $\bar{\alpha} \in \oplus_{i \in I} C^n(\Gamma_i, R^v_i)$, $(\bar{\beta}_i)_{i \in I} = \rho_0(f)(\bar{\alpha})$. *On suppose que* α *est la classe de* $\bar{\alpha}$. *Alors* $d\bar{\beta}_\iota = 0$ *pour tout* $i \in I$, *et* $\rho(f)(\alpha)$ *est la classe de* $\rho_0(f)(\bar{\alpha})$.

Démonstration: On pose $h_{\iota,\infty} = \mathrm{pr}_\infty \circ h_\iota$ pour tout $i \in I$. Quand $\mathscr{H}_f^K$ agit "naturellement" dans un espace, on note ρ cette action.

(a) Action de $\mathscr{H}_f^K$ dans $\oplus_{\iota \in I} \mathscr{C}(\omega_\iota, \Gamma''_\iota)$. Soit $\varphi = (\varphi_\iota)$ dans cet espace. Identifions φ à un élément de $\mathscr{C}(\omega, K)$. Pour $i \in I$ et $y \in G_\infty$, on a

$$[\rho(f)\varphi]_i(y) = \rho(f)\varphi(x_\iota y) = \int_{G_F} \varphi(x_\iota y g) f(g) \mathrm{d}g.$$

Mais $x_\iota y g = h_i(g) x_{\tau(\iota,g)} k_\iota(g) z_\iota(g) h_{\iota,\infty}(g)^{-1} y$. D'après les différentes variances,

$$[\rho(f)\varphi]_i(y) = \int_{G_f} \varphi_{\tau(\iota,g)}\left(h_{i,\infty}(g)^{-1} y\right) \omega_f \circ z_\iota(g) f(g) \mathrm{d}g.$$

(b) Action de $\mathscr{H}_f^K$ dans $\oplus_{i \in I} C^n(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}(\omega_\iota, \Gamma''_i) \otimes R^v)$. Soit $\eta = (\eta_i)$ dans cet espace. Il résulte de (a) que pour tous $i \in I$, $y \in G_\infty$, $Y \in \wedge^n(\mathscr{J}_\infty / \mathscr{k}_\infty)$, $(\varepsilon_y \otimes \mathrm{id}_{R^v}) \circ [\rho(f)\eta]_\iota(Y) = \int_{G_f} (\varepsilon_{y'} \otimes \mathrm{id}_{R^v}) \circ \eta_{\tau(\iota,g)}(Y) \omega_f \circ z_i(g) f(g) \mathrm{d}g$, où on a posé $y' = h_{\iota,\infty}(g)^{-1} y$.

(c) Action de $\mathscr{H}_f^K$ dans $\oplus_{i \in I} C^n(X, R^v_\iota)^{\Gamma_\iota}$ (cf. démonstration de la proposition I.6.2). Le groupe G_∞ agit dans $C^n(X, R^v_i)$ par la formule

$$(g \cdot \mu)(x) = r^v(g) \circ \mu(g^{-1} \cdot x)$$

pour $\mu \in C^n(X, R^v_i)$, $g \in G_\infty$.

REMARQUES: (1) on a $R_\iota^v = R^v$, donc l'action $r^v(g)$ on un sens;

(2) si $g \in \Gamma_\iota''$, on n'a pas $g \times_\iota \mu = g \cdot \mu$. Par définition $g \times_\iota \mu = \omega_\iota(g) g$ μ dans ce cas.

Soit $\mu = (\mu_\iota) \in \oplus_{\iota \in I} C^n(X, R_\iota^{\#})^{\Gamma_\iota}$. Il résulte de (b) et des définitions que pour tout $i \in I$,

$$[\rho(f)\mu]_\iota = \int_{G_f} h_{\iota,\infty}(g) \cdot \mu_{\tau(i,g)} \omega_f \circ z_\iota(g) f(g) \mathrm{d}g.$$

(d) Soient μ comme ci-dessus, $\nu = \rho(f)\mu$. Supposons $\mathrm{d}\mu_\iota = 0$ pour tout i, donc $\mathrm{d}\nu_\iota = 0$ également. Pour tout $i \in I$. introduisons une suite $(\mu_{\iota,j})$, $j = 0, \dots, n$, avec $\mu_{\iota,j} \in C_\iota^{n-j,j}$, ainsi que dans la démonstration de la proposition I.6.2. (on a ajouté ici les indices i nécessaires). Pour tous $i \in I$, $j \in \{0, \dots, n\}$, $\gamma \in (\Gamma_\iota)^j$, posons

$$\nu_{i,j}(\gamma) = \int_{G_f} h_{\iota,\infty}(g) \cdot \left(\mu_{\tau(\iota,g),j}(g \cdot \gamma)\right) \omega_f \circ z_\iota(g) f(g) \mathrm{d}g. \tag{G}$$

Cela définit $\nu_{\iota,j} \in C_\iota^{n-j,j}$. Montrons, par récurrence sur j, que $(\nu_{\iota,j})$, $j = 0, \dots, n$, est une suite qui, relativement à ν_ι, vérifie les conditions imposées dans la démonstration de la proposition I.6.2.

Pour $j = 0$, $\nu_{\iota,0}$ est bien l'image de ν_ι par l'isomorphisme $C_\iota^{n,0} \simeq C^n(X, R_\iota^v)$. Cela résulte de (c).

Supposons démontrés $\mathrm{d}_X \nu_{\iota,j} = 0$, $\mathrm{d}_\Gamma \nu_{i,j} = 0$, avec $j < n$. On doit montrer qu'il existe $\nu'_{\iota,j} \in C_\iota^{n-j-1,j}$ tel que $\mathrm{d}_X \nu'_{\iota,j} = \nu_{\iota,j}$, $d_\Gamma \nu'_{\iota,j} = \nu_{\iota,j+1}$. Introduisons de tels éléments $\mu'_{\iota,j}$ relatifs à la suite $(\mu_{i,j})$. Posons pour tous $i \in I$, $\gamma \in (\Gamma_i)^j$,

$$\nu'_{\iota,j}(\gamma) = \int_{G_f} h_{\iota,\infty}(g) \cdot \left[\mu'_{\tau,j}(g \cdot \gamma)\right] \omega_f \circ z_\iota(g) f(g) \mathrm{d}g,$$

où on posé $\tau = \tau(i, g)$ pour simplifier. On a $\nu'_{i,j} \in C_\iota^{n-j-1,j}$. Comme $\mathrm{d}_X \mu'_{\tau,j} = \mu_{\tau,j}$, on voit que $\mathrm{d}_X \nu'_{i,j} = \nu_{\iota,j}$. Si $\gamma \in (\Gamma_i)^{j+1}$, notons $\gamma_1, \dots, \gamma_{j+1}$ see composantes, et posons $\gamma^0 = (\gamma_2, \dots, \gamma_{j+1})$, $\gamma^k = (\gamma_1, \dots, \gamma_k\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_{j+1})$ pour $k = 1, \dots, j$, $\gamma^{j+1} = (\gamma_1, \dots, \gamma_j)$. Puisque $\mathrm{d}_\Gamma \mu'_{\tau,j} = \mu_{\tau,j+1}$, et par construction de d_Γ, il suffit, pour démontrer $\mathrm{d}_\Gamma \nu'_{i,j} = \nu_{\iota,j+1}$, de démontrer les égalités suivantes pour tout $\gamma \in (\Gamma_i)^{j+1}$

$$\gamma_1 \underset{i}{\times} \left[\nu'_{\iota,j}(\gamma^0)\right] = \int_{G_f} h_{i,\infty}(g) \cdot \left[(g \cdot \gamma)_1 \underset{\tau}{\times} \mu'_{\tau,j}\left((g \cdot \gamma)^0\right)\right] \times \omega_f \circ z_\iota(g) f(g) \mathrm{d}g, \tag{H}$$

pour tout $k=1,\ldots,j+1$, (I)

$$\nu'_{\iota,j}(\gamma^k)=\int_{G_f} h_{\iota,\infty}(g)\cdot\left[\mu'_{\tau,j}\left((g\cdot\gamma)^k\right)\right]$$

$$\times\,\omega_f\circ z_\iota(g)f(g)\mathrm{d}g.$$

Les égalités (I) résultent de la définition de $\nu'_{i,j}$ et des égalités faciles

$$(g\cdot\gamma)^k=g\cdot\gamma^k,$$

pour tout $k=1,\ldots,j+1$.

Par définition, on a

$$\gamma_1\underset{i}{\times}\left[\nu'_{i,j}(\gamma^0)\right]=\int_{G_f}\gamma_1\underset{i}{\times}\left[h_{i,\infty}(g)\cdot\mu'_{\tau,j}(g\cdot\gamma^0)\right]\omega_f\circ z_i(g)f(g)\mathrm{d}g.$$

Soient $\gamma'_1\in G_F$ tel que $p\circ\mathrm{pr}_\infty(\gamma'_1)=\gamma_1$, $k\in K$, $z\in Z_f$ tels que $x_\iota^{-1}\ \mathrm{pr}_f(\gamma'_1)x_\iota=kz$. Effectuons dans l'intégrale le changement de variable $g\mapsto k^{-1}g$. Comme f est invariante à gauche par K, et qu'on a vu plus haut que $\tau(i,g)=\tau(i,k^{-1}g)$, on obtient

$$\gamma_1\underset{i}{\times}\left[\nu'_{i,j}(\gamma^0)\right]$$

$$=\int_{G_f}\gamma_1\underset{i}{\times}\left[h_{\iota,\infty}(k^{-1}g)\cdot\mu'_{\tau,j}\left((k^{-1}g)\cdot\gamma^0\right)\right]\omega_f\circ z_i(k^{-1}g)f(g)\mathrm{d}g.$$

(J)

Soit $g\in G_f$. On constate que

$$(k^{-1}g)\cdot\gamma^0=(g\cdot\gamma)^0. \tag{K}$$

Posons $g_1=x_i^{-1}\ \mathrm{pr}_f(\gamma'_1)^{-1}x_ig=k^{-1}z^{-1}g$, $(g\cdot\gamma)'_1=h_i(g)^{-1}\gamma'_1h_i(g_1)$. On vérifie les égalités

$$p\circ\mathrm{pr}_\infty\left[(g\cdot\gamma)'_1\right]=(g\cdot\gamma)_1,$$

$$h_{i,\infty}(g)\ \mathrm{pr}_\infty\left[(g\cdot\gamma)'_1\right]=\mathrm{pr}_\infty(\gamma'_1)h_{i,\infty}(k^{-1}g),$$

$$x_\tau^{-1}\ \mathrm{pr}_f\left[(g\cdot\gamma)'_1\right]x_\tau=k_i(g)k_i(g_1)^{-1}z_i(g)z_i(g_1)^{-1},$$

d'où

$$\omega_\tau\circ\mathrm{pr}_\infty\left[(g\cdot\gamma)'_1\right]=\omega_i\circ\mathrm{pr}_\infty(\gamma'_1)\,\omega_f\circ z_i(k^{-1}g)\,\omega_f\circ z_\iota(g)^{-1}.$$

On en déduit que pour tous $k \geqslant 0$, $\mu \in C^k(X, R^v)$,

$$\gamma_1 \underset{i}{\times} \left[h_{\iota,\infty}(k^{-1}g)\cdot\mu\right]\omega_f \circ z_\iota(k^{-1}g) = h_{\iota,\infty}(g)\cdot\left[(g\cdot\gamma)_1 \underset{\tau}{\times} \mu\right]\omega_f \circ z_\iota(g \tag{L}$$

Alors (H) se déduit de (J), (K), (L).

(e) L'énoncé résulte des définitions et de (d), en appliquant la formule (G) pour $j = n$. □

1.8. Formes automorphes et rationalité

Soit $\sigma \in \mathcal{S}$. Notons $\sigma\omega$ le caractère de $F^\times \backslash \mathbb{A}^\times$ tel que

- pour toute place v finie, $(\sigma\omega)_v = \sigma \circ \omega_v$,
- pour toute place $v \in S_1$ et tout $x \in F_v^\times$, $(\sigma\omega)_v(x) = x^b$, où $b = a_{\sigma^{-1}v}$,
- pour toute place $v \in S_2$ et tout $x \in F_v^\times$, $(\sigma\omega)_v(x) = x^b\bar{x}^c$, où $b = a_{\sigma^{-1}v}$, $c = a_{\sigma^{-1}\bar{v}}$.

De même si $\pi \sim \otimes_v \pi_v$ est une représentation admissible irréductible de $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ telle que $\pi_v \sim \pi[d_v]$ pour tout $v \in S$, notons $\sigma\pi$ la représentation telle que

- pour toute place v finie, $(\sigma\pi)_v = {}^\sigma(\pi_v)$,
- pour toute place $v \in S$, $(\sigma\pi)_v = \pi[(\sigma d)_v]$.

THÉORÈME I.8.1: *Soient $\pi \in A_0(\omega, d)$, $\sigma \in \mathcal{S}$. Alors $\sigma\pi \in A_0(\sigma\omega, \sigma d)$.*

DÉMONSTRATION: Soit E l'espace de π, utilisons les constructions des paragraphes précédents pour un sous-groupe K tel que

(a) il existe pour toute place finie v un sous-groupe ouvert compact K_v de G_v, tel que $K = \prod_{v \notin S} K_v$,
(b) K vérifie la condition du lemme I.6.1,
(c) $\dim E_f^K \geqslant 2$.

Pour toute représentation admissible (π', E') de G_f, resp. G_v, pour une place $v \notin S$, on note π'^K, resp. π'^{K_v}, la représentation qui s'en déduit de $\mathcal{H}_f^K$ dans E'^K, resp. de $\mathcal{H}_v^{K_v}$ dans $E'^{K_v}_v$. On introduit des indices d, ω dans les notations des paragraphes précédents, si besoin est.

Considérons le sous-espace $A^s_{d,\omega}(H^s_{d,\omega}(E))$ de $\oplus_{\iota \in I} H^s(\Gamma_i, R_\iota[d, \omega]^v)$. D'après le théorème I.5.1 et la proposition I.6.2, c'est un $\mathcal{H}_f^K$-module irréductible, isomorphe à E_f^K. Soit $t' : R[d] \to R[\sigma d]$ un isomorphisme σ-linéaire transformant $r_F[d]$ en $r_F[\sigma d]$ (cf. proposition I.3). On en déduit par fonctorialité en isomorphisme σ-linéaire $t'' : R[d]^v \to R[\sigma d]^v$ transformant $r_F[d]^v$ en $r_F[\sigma d]^v$. Pour tout $i \in I$, t'' transforme $r_i[d, \omega]^v$ en $r_i[\sigma d, \sigma\omega]^v$. Par fonctorialité, on obtient un isomorphisme σ-linéaire

$$t: \bigoplus_{i \in I} H^s\left(\Gamma_\iota, R_\iota[d, \omega]^v\right) \to \bigoplus_{i \in I} H^s\left(\Gamma_\iota, R_i[\sigma d, \sigma w]^v\right).$$

Notons $\rho_{d,\omega}$, resp. $\rho_{\sigma d,\sigma\omega}$, la représentation de $\mathscr{H}_f^K$ dans le premier, resp. second, terme. Pour $f \in \mathscr{H}_f^K$, on a l'égalité

$$\rho_{\sigma d,\sigma\omega}(f) = t \circ \rho_{d,\omega}(\sigma^{-1} \circ f) \circ t^{-1}$$

d'après la proposition I.7. Alors l'espace $t \circ A^s_{d,\omega}(H^s_{d,\omega}(E))$ est stable par l'action de $\mathscr{H}_f^K$. La représentation de $\mathscr{H}_f^K$ dans cet espace est isomorphe à $(\sigma\pi)_f^K$. Posons $H' = (A^s_{\delta d,\sigma\omega})^{-1} \circ t \circ A^s_{d,\omega}(H^s_{d,\omega}(E))$. Il vérifie la même propriété. Je dis que $H' \subset \tilde{H}^s_{\sigma d,\sigma\omega}$. Il est clair en effet qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} H^s(\Gamma_i, R_i[d, \omega]^v) & \xrightarrow{t} & \bigoplus_{i\in I} \mathrm{H}^s(\Gamma_i, R_i[\sigma d, \sigma\omega]^v) \\ \mathrm{res}^s_{d,\omega}\downarrow \bigoplus_{i,j} H^s(\Delta_{ij}, R_i[d, \omega]^v) & \to & \mathrm{res}^s_{\sigma d,\sigma\omega}\downarrow \bigoplus_{i,j} H^s(\Delta_{ij}, R_i[\sigma d, \sigma\omega]^v) \end{array}$$

On en déduit que $t(\mathrm{Ker}\ \mathrm{res}^s_{d,\omega})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{res}^s \sigma d, \sigma\omega)$. Comme $H^s_{d,\omega}(E) \subset \tilde{H}^s_{d,\omega}$, la proposition I.6.3 implique l'assertion. D'après le théorème I.5.1 et l'hypothèse (c) qui implique dim $H' \geqslant 2$, il existe $(\pi', E') \in A_0(\sigma\omega, \sigma d)$ tel que $H' = H^s_{\sigma d,\sigma\omega}(E')$. Donc $\pi'^K_f \sim (\sigma\pi)^K_f$, et $\pi'^{K_v}_v \sim (\sigma\pi)^{K_v}_v$ pour toute place finie v. Pour les places où les deux représentations ne sont pas ramifiées, cela implique $\pi'_v \sim (\sigma\pi)_v$. Par le théorème fort de multiplicité 1, cela détermine π', indépendamment de K. En choisissant alors K assez petit, la relation $\pi'^K_f \sim (\sigma\pi)^K_f$ implique $\pi'_f \sim (\sigma\pi)_f$, et $\pi' \sim \sigma\pi$. □

Corollaire I.8.2: *Si $A_0(\omega, d) \neq \emptyset$, on a $h_{\sigma v} = h_{\sigma\bar{v}}$ pour tous $v \in S_2$, $\sigma \in \mathscr{S}$.*

Rappelons que h_v fait partie de la donnée d_v.

Démonstration: Si $\pi \in A_0(\omega, d)$, $\pi \otimes |\omega|^{-1/2}$ est unitaire. Donc $r[d_v] \otimes |\omega_v|^{-1/2}$ l'est aussi pour tout $v \in S_2$. Cela implique $h_v = h_{\bar{v}}$. Grâce au théorème, on en déduit l'énoncé. □

Soient $\pi \in A_0(\omega, d)$, Σ un ensemble fini de places contenant S. Posons

$$\mathscr{S}(\pi, \Sigma) = \{\sigma \in \mathscr{S};\ {}^\sigma\pi_v \sim \pi_v \text{ pour tout } v \notin \Sigma\},$$

$$g(\pi) = \{\sigma \in \mathscr{S};\ \sigma\pi \sim \pi\},\ \mathscr{S}(\omega) = \{\sigma \in \mathscr{S};\ \sigma\omega = \omega\}.$$

Soient $\mathbb{Q}(\pi, \Sigma)$, $\mathbb{Q}(\pi)$ et $\mathbb{Q}(\omega)$ les corps des invariants de $\mathscr{S}(\pi, \Sigma)$, $\mathscr{S}(\pi)$ et $\mathscr{S}(\omega)$.

COROLLAIRE I.8.3:
(1) *On a l'égalité* $\mathbb{Q}(\pi, \Sigma) = \mathbb{Q}(\pi)$.
(2) *Le corps* $\mathbb{Q}(\pi)$ *contient* $\mathbb{Q}(d)$, $\mathbb{Q}(\omega)$, $\mathbb{Q}(\pi_v)$ *pour toute place finie* v. *C'est une extension finie de* $\mathbb{Q}$.

DÉMONSTRATION: (1) résulte du théorème fort de multiplicité 1. Les premières assertions de (2) sont immédiates. L'ensemble

$$\{(\sigma\omega, \sigma d);\ \sigma \in \mathcal{S}\}$$

est fini. Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, et tout sous-groupe ouvert compact K de G_f, l'ensemble des $E \in A_0(\sigma\omega, \sigma d)$ tels que $E^K \neq \{0\}$, est fini. Il résulte de la démonstration du théorème que $\mathcal{S}(\pi)$ est d'indice fini dans $\mathcal{S}$, d'où la dernière assertion. □

Soient L un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}(d)$ et $\mathbb{Q}(\omega)$, R^0 un sous L-espace de $R = R[d]$ vérifiant les conditions de la proposition I.3. On en déduit par dualité un sous-L-espace $R^{0,v}$ de R^v. Appliquons les constructions des paragraphes précédents pour un certain sous-groupe K. L'action r_i^v du groupe Γ_i laisse stable $R_i^{0,v} = R^{0,v}$, pour tout $i \in I$. On peut définir des groupes de cohomologie $H^n(\Gamma_i, R_i^{0,v})$ qui sont des L-espaces vectoriels.

LEMME I.8.4: *Pour tous* $i \in I$, $n \geqslant 0$, *on a l'égalité*

$$H^n(\Gamma_i, R_i^v) = H^n(\Gamma_i, R_i^{0,v}) \underset{L}{\otimes} \mathbb{C}.$$

DÉMONSTRATION: On a l'égalité $H^n(\Gamma_i, R_i^v) = \mathrm{Ext}^n_{\Gamma_i}(\mathbb{Z}, R_i^v)$, et de même avec $R_i^{0,v}$. D'après [S1] p. 124, $\mathbb{Z}$ possède une résolution projective finie par des $\mathbb{Z}[\Gamma_i]$-modules libres de type fini. L'assertion en résulte facilement. □

Pour tous $i \in I$, $n \geqslant 0$, posons $\tilde{H}^n(\Gamma_i, R_i^v) = \mathrm{Ker}(\mathrm{res}_i^n)$ (cf. I.6, la notation est évidente), $\tilde{H}^n(\Gamma_i, R_i^{0,v}) = \tilde{H}^n(\Gamma_i, R_i^v) \cap H^n(\Gamma_i, R_i^{0,v})$.

LEMME I.8.5: *Pour tous* $i \in I$, $n \geqslant 0$, *on a l'égalité*

$$\tilde{H}^n(\Gamma_i, R_i^v) = \tilde{H}^n(\Gamma_i, R_i^{0,v}) \underset{L}{\otimes} \mathbb{C}.$$

DÉMONSTRATION: On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(\Gamma_i, R_i^v) & \rightarrow & \bigoplus_{j \in J(i)} H^n(\Delta_{ij}, R_i^v) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^n(\Gamma_i, R_i^{0,v}) \underset{L}{\otimes} \mathbb{C} & \rightarrow & \bigoplus_{j \in J(i)} H^n(\Delta_{ij}, R_i^{0,v}) \underset{L}{\otimes} \mathbb{C} \end{array}$$

La première flèche verticale est un isomorphisme d'après le lemme I.8.4. On vérifie que la seconde est en tout cas injective. L'assertion en résulte facilement. □

Soit $(\pi, E) \in A_0(\omega, d)$. Supposons $\mathbb{Q}(\pi) \subset L$, $E^K \neq \{0\}$. Posons

$$H_\Gamma(E) = A^s(H^s(E)) \subset \bigoplus_{i \in I} H^s(\Gamma_i, R_i^v),$$

$$H_\Gamma(E)^0 = H_\Gamma(E) \cap \Big(\bigoplus_{i \in I} H^0(\Gamma_i, R_i^{0,v}) \Big).$$

Notons $\mathscr{H}_{\mathbb{Q},f}^K = \{ f \in \mathscr{H}_f^K;\ \forall g \in G_f,\ f(g) \in \mathbb{Q} \}$.

PROPOSITION I.8.6: *Sous ces hypothèses, $H_\Gamma(E)^0$ est un sous-L-espace vectoriel de $H_\Gamma(E)$ tel que*

(i) $H_\Gamma(E) = H_\Gamma(E)^0 \otimes_L \mathbb{C}$,

(ii) $H_\Gamma(E)^0$ *est stable par* $\pi_f(f)$ *pour toute* $f \in \mathscr{H}_{\mathbb{Q},f}^K$.

DÉMONSTRATION: On peut trouver un ensemble fini Σ de places finies, et un groupe $K_\Sigma \subset \prod_{v \in \Sigma} G_v$, tels que $K = K_\Sigma \times \prod_{v \notin \Sigma \cup S} K_v$, où pour $v \notin \Sigma \cup S$, K_v est le sous-groupe compact maximal standard de G_v. Pour toute place $v \notin \Sigma \cup S$, il existe un opérateur de Hecke bien connu $T_v \in \mathscr{H}_{\mathbb{Q},f}^K$, et un scalaire $a_v \in \mathbb{C}$ tels que $\pi_f(T_v)|_{E^K} = a_v \cdot \mathrm{id}$. Il résulte du théorème I.5.1 et du théorème fort de multiplicité 1 que $H_\Gamma(E)$ est l'espace des $\alpha \in \oplus_{i \in I} \tilde{H}^s(\Gamma_i, R_i^v)$ tels que

$$\rho_{\omega,d}(T_v)\alpha = a_v \alpha, \text{ pour toute } v \notin \Sigma \cup S. \tag{M}$$

Alors $H_\Gamma(E)^0$ est l'espace des $\alpha \in \oplus_{i \in I} \tilde{H}^s(\Gamma_i, R_i^{0,v})$ vérifiant (M). Un calcul facile et le lemme I.2.3 montrent que pour toute place $v \notin \Sigma \cup S$, $a_v \in \mathbb{Q}(\pi_v) \subset L$. Le lemme I.8.6 et un lemme d'algèbre (une matrice à coefficients dans L, diagonalisable sur $\mathbb{C}$, de valeurs propres dans L, est diagonalisable sur $L \ldots$) démontrent (i). L'espace $H_\Gamma(E)$ est stable par $\pi_f(f)$ pour toute $f \in \mathscr{H}_{\mathbb{Q},f}^K$. L'espace $\oplus_{i \in I} H^s(\Gamma_i, R_i^{0,v})$ également, comme il résulte de la proposition I.7. Leur intersection l'est aussi. □

II. Formes automorphes sur un groupe de quaternions et rationalite

On se borne dans ce chapitre à indiquer comment adapter les résultats du premier chapitre quand on remplace GL(2) par un groupe de quaternions.

II.1. Représentations d'un groupe de quaternions et rationalité; cas local p-adique

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, M l'algèbre de quaternions sur F, non déployée, $G = M^x$ le groupe de ses éléments inversibles, π une représentation admissible irréductible de G dans un espace E. Cet espace est de dimension finie. On suppose que le caractère central de π est trivial.

Si $\sigma \in \mathcal{S}$ la représentation ${}^{\sigma}\pi$ vérifie les mêmes propriétés. Le *lemme* I.2.1 reste vrai.

DÉMONSTRATION: D'après [W2] proposition 18, il existe un sous-tore maximal $T \subset G$ tel que $\dim_{\mathbb{C}} E^T = 1$. On applique le lemme I.1. □

REMARQUE: si on ne suppose plus le caractère central de π trivial, ce lemme devient faux. On peut construire un contre-example à l'aide de [S2] exercise 3, p. 108.

Le *lemme* I.2.2 se démontre comme au premier chapitre.

La *proposition* I.2.5 reste vraie.

DÉMONSTRATION: Si $\dim E = 1$, π est un caractère, les fonctions L se calculent aisément. Si $\dim E > 1$, ces fonctions sont égales à 1. Cela démontre la première égalité. Soit f une fonction de Schwartz sur M, on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}_{\psi} f$ par

$$\mathcal{F}_{\psi} f(m) = \int_M f(m') \psi(\mathrm{Tr}\ mm') \mathrm{d}m'$$

pour tout $m \in M$, où $\mathrm{d}m'$ est une mesure autoduale, et Tr la trace réduite. Notons N la norme réduite, fixons une mesure de Haar sur M^{x} telle que la mesure de tout sous-groupe ouvert compact appartienne à $\mathbb{Q}^{x}$. Soit c un coefficient non nul de π, posons

$$Z_c(f, \chi) = L(\pi \otimes \chi, 1/2)^{-1} \int_{M^{x}} f(g) c(g) \chi \circ N(g) |Ng| \mathrm{d}g.$$

L'intégrale converge si $|\chi(\varpi)|$ est assez petit et la fonction Z_c se prolonge en une fonction définie pour tout χ. On a l'égalité

$$Z_c\left(\mathcal{F}_{\psi} f, \chi^{-1}\right) = -\varepsilon(\pi \otimes \chi, 1/2, \psi) Z_c(f, \chi). \tag{$N_{\pi,c,\psi}$}$$

La fonction $\sigma \circ c$ est un coefficient de ${}^{\sigma}\pi$. Je dis qu'on a l'égalité

$$Z_{\sigma \circ c}(\sigma \circ f, \sigma \circ \chi) = \sigma\left[Z_c(f, \chi)\right].$$

En effet, si n est un entier assez grand, on a l'égalité

$$Z_c(f, \chi) = L(\pi \otimes \chi, 1/2)^{-1} \int_{C(n)} f(g) c(g) \chi \circ N(g) |Ng| \mathrm{d}g$$

$$+ \int_{\mathcal{O}_M^{x}} f(\varpi^n u) c(\varpi^n u) \chi \circ N(\varpi^n u) |\varpi|^{2n} \mathrm{d}u,$$

où $\mathcal{O}_M^\times$ est le groupe des unités de $M^\times$, $C(n)=\{g\in M^\times;\ |Ng|>|\varpi|^{2n}\}$. De même pour $Z_{\sigma\circ c}(\sigma\circ f,\ \sigma\circ c)$. Maintenant les intégrales sont essentiellement des sommes finies, et l'action de σ commute à ces intégrales, d'où l'assertion. On fait alors agir σ sur l'égalité $(N_{\pi,c,\psi})$. On compare l'égalité obtenue à $(N_{\sigma_{\pi},\sigma\circ c,\sigma\circ\psi})$. En remarquant que $\sigma\circ\mathscr{F}_\psi f=\sigma_{\sigma\circ\psi}(\sigma\circ f)$, on obtient l'égalité cherchée des facteurs ε. □

Il y a une injection JL qui à une représentation π admissible irréductible de G, de caractère central trivial, associe une représentation $\mathrm{JL}(\pi)$ de $\mathrm{GL}_2(F)$ ayant les mêmes propriétés ([JL] théorème 4.3).

LEMME II.1.1: *Soit π comme ci-dessus.*

(i) *Si $\sigma\in\mathscr{S}$, on a l'égalité* $\mathrm{JL}({}^\sigma\pi)={}^\sigma(\mathrm{JL}(\pi))$.

(ii) *On a l'égalité* $\mathbb{Q}(\pi)=\mathbb{Q}(\mathrm{JL}(\pi))$.

DÉMONSTRATION: La représentation $\mathrm{JL}(\pi)$ est caractérisée par les égalités

$$\varepsilon(\pi\otimes\chi,1/2,\psi)=\varepsilon(\mathrm{JL}(\pi)\otimes\chi,1/2,\psi),$$

$$L(\pi\otimes\chi,1/2)=L(\mathrm{JL}(\pi)\otimes\chi,1/2),$$

pour tout caractère χ de $F^\times$. On démontre alors (i) en appliquant la proposition I.2.5 à π et à $\mathrm{JL}(\pi)$. Le (ii) résulte de (i). □

LEMME II.1.2: *Si π est une représentation de $M^\times$ comme ci-dessus, ou une représentation irréductible spéciale ou cuspidale de* $\mathrm{PGL}_2(F)$, *$\mathbb{Q}(\pi)$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$, cyclotomique.*

DÉMONSTRATION: Dans le premier cas, notons Z le centre de $M^\times$, $M^\times/Z$ est compact, et π triviale sur un sous-groupe ouvert. Elle se factorise par un groupe fini et la propriété est bien connue. Dans le second cas π est dans l'image de l'application JL. On applique le lemme II.1.1. □

II.2. Représentations aux places archimédiennes

Soient $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{R}$, h un entier pair $\geqslant 2$. On note $r[h]$ la représentation de $\mathbb{H}^\times$ (unique à isomorphisme près), irréductible, de dimension $h-1$, de caractère central trivial, et $R[h]$ son espace. On note également $r[h]$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ notée $r[(h,0,0)]$ au I.3. Pour un couple (h_1,h_2) d'entiers pairs $\geqslant 2$, on note $r[h_1,h_2]$ la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ notée $r[(h_1,h_2,0,0)]$ au I.3.

Soient F un corps de nombres, M une algèbre de quaternions définie sur F, déployée ou pas, $G=M^\times$ (comme groupes algébriques. On adopte les notations du I.5). On définit S, S_1, S_2, $\bar{S}$ comme au I.3. Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\bar{S}}$ formé des $h=(h_v)_{v\in\bar{S}}$ tels que h_v est pair $\geqslant 2$

pour tout $v \in \bar{S}$. Pour un tel h, on note $r[h]$ la représentation de G_∞

$$r[h] = \Big(\bigotimes_{v \in S_1} r[h_v]\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{v \in S_2} r[h_v, h_{\bar{v}}]\Big),$$

$R[h]$ son espace, $r_F[h]$ la restriction de $r[h]$ à G_F plongé naturellement dans G_∞. On conserve, mutatis mutandis, les définitions du I.3.

La *proposition* I.3 reste vraie.

DÉMONSTRATION: Soit k un entier pair $\geqslant 2$. Définnissons un espace vectoriel S^k sur F de dimension $k-1$, et une représentation s^k de G_F dans S^k, rationnelle, irréductible, de caractère central trivial. On pose $S^2 = F$, $s^2 = 1$; S^4 est l'espace des éléments de M_F de trace nulle, s^4 la représentation de G_F par conjugaisons, et pour $k \geqslant 4$, (s^k, S^k) est l'unique sous-représentation de dimension $k-1$ de $\mathrm{Sym}^{k/2-1}(s^4)$, irréductible. Pour $v \in \bar{S}$, s^k définit une représentation complexe de G_F dans $S^k \otimes \mathbb{C}$, quie se prolonge par continuité en une représentation s_v^k de $G_{\mathbf{v}}$, où $\mathbf{v}$ est la place de F associée à v. On voit facilement que pour toute place $v \in S$,

$$r[h_v] \simeq s_v^{h_v}, \qquad \text{si} \quad v \in S_1,$$

$$r[h_v, h_{\bar{v}}] \simeq s_v^{h_v} \otimes s_{\bar{v}}^{h_{\bar{v}}}, \qquad \text{si} \quad v \in S_2.$$

Pensons à nos représentations comme à des représentations matricielles. A isomorphisme près, on a donc pour tout $g \in G_F$, l'égalité

$$r_F[h](g) = \bigotimes_{v \in \bar{S}} \big(v \circ s^{h_v}(g)\big).$$

On démontre alors (i) et (ii) comme au I.3.

Soit T un sous-tore maximal de G, défini sur F, tel que $T_{\mathbf{v}}$ soit déployé en toutes les places $v \in S$ telles que $G_{\mathbf{v}}$ le soit. On vérifie par un calcul explicite que pour toute place $v \in S_1$, resp. $v \in S_2$, $\dim_{\mathbb{C}} R[h_v]^{T_{\mathbf{v}}} = 1$, resp. $\dim_{\mathbb{C}} R[h_v, h_{\bar{v}}]^{T_{\mathbf{v}}} = 1$. Comme T_F est dense dans T_∞, on en déduit que $\dim_{\mathbb{C}} R[h]^{T_F} = 1$. Alors (iii) résulte du lemme I.1. □

REMARQUE: ici encore la proposition ne serait plus vraie si on ne se limitait pas aux représentations de caractère central trivial.

Let résultats du I.4 s'adaptent trivialement. Soient $G = \mathbb{H}^x$, $\mathscr{g}$ son algèbre de Lie, posons $K = G$, $\mathscr{k} = \mathscr{g}$. Le groupe K est compact modulo son centre. Pour un entier pair $h \geqslant 2$, notons $(\pi[h], E[h]) = (r[h], R[h])$ la représentation de G définie plus haut. Soit (π, E) un $\mathscr{g}K$-module admissible irréductible. On considère le module $(\rho, U) = (\pi \otimes r[h]^v, E \otimes R[h]^v)$. Pour $n \geqslant 0$, posons $C^n = C^n(\mathscr{g}, K, U)$, $H^n = H^n(\mathscr{g}, K, U)$.

LEMME II.2:

(i) *Si* π *n'est pas isomorphe à* $\pi[h]$, $H^n = \{0\}$ *pour tout* $n \geqslant 0$.

(ii) *Si* $\pi \simeq \pi[h]$, $C^0 \simeq H^0 \simeq \mathbb{C}$, *et* $C^n = H^n = \{0\}$ *pour* $n \neq 0$.

C'est évident. □

Remarquons qu'ici $r[h]^v \simeq r[h]$. Le même propriété vaut pour les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de caractère central trivial.

II.3. Formes automorphes. Cohomologie. Rationalité

Soient F un corps de nombres, M une algèbre de quaternions définie sur F, $G = M^x$, Z le centre de G. On adopte les notations de II.2 et de I.5. Soient S_1', resp. S_1'', l'ensemble des places réelles v de F où M_v est déployée, resp. non déployée. Posons $t = |S_1'| + |S_2|$. Pour toute place $v \in S$, on pose $\mathscr{J}_v = \mathrm{Lie}(G_v)$, on choisit un sous-groupe compact maximal K_v^0 de G_v, on pose $K_v = K_v^0 Z_v$. On se donne un élément $h = (h_v)_{v \in \bar{S}} \in H$.

On considère les représentations automorphes de $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}$ de caractère central trivial, de composantes infinies déterminées par h. Si M est déployée, il suffit de poser $\omega = 1$ et de remplacer d par h dans les résultats de I.5, 6, 7, 8. Indiquons ce qu'il faut modifier dans le cas où M n'est pas déployée.

Soient $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1$ l'espace des formes automorphes sur $G_F Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}$, $\mathscr{A}_0$ le sous-espace somme des sous-espaces irréductibles de dimension infinie de $\mathscr{A}$, A_1, resp. A_0, l'ensemble des sous-espaces irréductibles de $\mathscr{A}_1$, resp. $\mathscr{A}_0$. Soit $v \in S$. Si $v \in S_1''$, on a défini des représentations $r[h_v]$ et $\pi[h_v]$. Si $v \in S_1'$, on note $r[h_v]$, $r'[h_v]$, $\pi[h_v]$ les représentations notées $r[(h_v, 0, 0)]$, $r[(h_v, 0, 1)]$, $\pi[(h_v, 0, 0)]$ aux I.3, 4. Si $v \in S_1$, on note $r[h_v, h_{\bar{v}}]$, $\pi[h_v, h_{\bar{v}}]$ les représentations notées $r[(h_v, h_{\bar{v}}, 0, 0)]$, $\pi[(h_v, h_{\bar{v}}, 0, 0)]$ aux I.3.4. Notons $A_1(h)$ l'ensemble des $\pi \in A_1$ telles que pour toute place $v \in S_1'$, resp. S_1'', resp. S_2, π_v est isomorphe à $r[h_v]$ ou $r'[h_v]$ ou $\pi[h_v]$, resp. à $r[h_v]$ ou $\pi[h_v]$, resp. $r[h_v, h_{\bar{v}}]$ ou $\pi[h_v, h_{\bar{v}}]$. Posons $A_0(h) = A_0 \cap A_1(h)$.

Soient K un sous-groupe ouvert compact de G_f, $\mathscr{C}(K)$ l'espace des fonctions $\varphi: G_F Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}/K \to \mathbb{C}$ qui sont C^∞ comme fonctions des composantes aux places archimédiennes. Pour $n \geqslant 0$, on pose

$$H^n = \tilde{H}^n = H^n(\mathscr{J}_\infty, K_\infty, \mathscr{C}(K) \otimes R[h]).$$

Si $E \in A_1$, on définit $H^n(E)$ comme au I.5. Le théorème I.5.1 reste vrai sous la forme suivante (valable d'ailleurs pour tout M).

THÉORÈME II.3.1: (1) *Il existe un ensemble* $\mathscr{E}$ *tel que*

(i) $\mathscr{E} \subset A_1(h)$,

(ii) *si* $E \in \mathscr{E}$, *on a* $E_f^K \neq \{0\}$ *et il existe un entier* $m \geqslant 1$ *tel que les* $\mathscr{H}_f^K$*-modules* $H^t(E)$ *et* $m \cdot E_f^K$ *soient isomorphes*;

(iii) *il y a une décomposition en somme directe de $\mathscr{H}_f^K$-modules*

$$\tilde{H}^t = \bigoplus_{E \in \mathscr{E}} H^t(E).$$

(2) *Si* $E \in A_0(h)$ *et* $E_f^K \neq \{0\}$, *alors* $E \in \mathscr{E}$ *et l'entier m du* (ii) *est égal à* 1.

La démonstration est identique à celle du théorème I.5.1, en plus simple: $G_F Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}$ est compact, donc $\mathscr{C}(K) \subset L^2(G_F Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}})$. □

Soit $E \in A_0(h)$. On peut expliciter l'isomorphisme $E_f^K \simeq H^t(E)$ comme au I.5. Si $v \in S_1''$, il faut maintenant fixer un élément non nul $\eta_v \in C^0(\mathscr{J}_v, K_v, E_v \otimes R[h_v])$.

Les définitions des paragraphes I.6, 7 s'adaptent sans changement. On pose seulement $\omega = 1$, et on utilise $R[h]$ au lieu de $R[h]^v$, ces deux modules étant isomorphes.

La *proposition* I.6.2 et la *proposition* I.7 restent vraies.

Si $\pi \in A_0(h)$ et $\sigma \in \mathscr{S}$, on note encore $\sigma\pi$ la représentation de $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}$ telle que

- pour toute place v finie, $(\sigma\pi)_v = {}^{\sigma}(\pi_v)$,
- pour toute place $v \in S_1$, $(\sigma\pi)_v = \pi[(\sigma h)_v] = \pi[h_{\sigma^{-1}v}]$,
- pour toute place $v \in S_2$, $(\sigma\pi)_v = \pi[(\sigma h)_v, (\sigma h)_{\bar{v}}] = \pi[h_{\sigma^{-1}v}, h_{\sigma^{-1}\bar{v}}]$.

Comme au I.8, on démontre le

THÉORÈME II.3.2: *Soient* $\pi \in A_0(h)$, $\sigma \in \mathscr{S}$. *Alors* $\sigma\pi \in A_0(\sigma h)$. □

REMARQUES: (1) Ce théorème résulte aussi du théorème I.8.1 et de la correspondance de Jacquet-Langlands, mais la démonstration directe a plus d'intérêt.

(2) Supposons F totalement réel et M totalement définie, i.e. M_v non déployée pour toute place $v \in S$. Alors $t = 0$. La partie "cohomologique" des démonstrations précédentes devient triviale. Le case le plus frappant est celui où $h_v = 2$ pour toute place $v \in S$, ce qui correspond au cas des formes modulaires holomorphes de poids 2. Pour $v \in S$, $\pi[h_v]$ est la représentation triviale. Posons

$$\mathscr{A}_h = \bigoplus_{E \in A_1(h)} E, \quad \mathscr{A}_{0,h} = \bigoplus_{E \in A_0(h)} E = \mathscr{A}_h \cap \mathscr{A}_0.$$

L'espace $\mathscr{A}_h^K$ des éléments de $\mathscr{A}_h$ invariants par K n'est autre que l'espace des fonctions sur l'ensemble fini $G_F Z_{\mathbf{A}} \backslash G_{\mathbf{A}}/(G_\infty \times K)$. L'espace $\mathscr{A}_{0,h}^K$ est le sous-espace des éléments de $\mathscr{A}_h^K$ orthogonaux aux caractères, i.e. annulés par certaines formes linéaires, d'ailleurs à coefficients rationnels dans la base des formes linéaires évaluations en un point. Le groupe $\mathscr{J}$ agit alors sur $\mathscr{A}_h^K$ et $\mathscr{A}_{0,h}^K$ par son action sur les valeurs des fonctions dans ces espaces. Le théorème cidessus est immédiat.

Avec des modifications évidentes, les *corollaires* I.8.2 et I.8.3 restent vrais. On a de plus

LEMME II.3.3: *Si* $\pi \in A_0(h)$, *le corps* $\mathbb{Q}(\pi)$ *est totalement réel.*

DÉMONSTRATION: Soit Σ un ensemble fini de places contenant S, tel que si $v \notin \Sigma$, M_v est déployée et il existe un caractère μ_v de $F_v^\times$, non ramifié, el que $\pi_v \simeq \pi(\mu_v, \mu_v^{-1})$. Comme $\pi \in A_0(h)$, π est unitaire. Si $v \notin \Sigma$, π_v l'est aussi, donc μ_v est unitaire ou à valeurs réelles. En tout cas, le terme $(\mu_v(\varpi) + \mu_v^{-1}(\varpi))|\varpi|_v^{1/2}$ est réel, où ϖ est une uniformisante de F_v. D'après le lemme I.2.3, $\mathbb{Q}(\pi_v)$ est réel. D'après le corollaire I.8.3, (1), $\mathbb{Q}(\pi)$ l'est aussi. D'après le théorème II.3.2, $\mathbb{Q}(\sigma\pi)$ l'est aussi pour tout $\sigma \in \mathscr{S}$. Mais si $\sigma \in \mathscr{S}$, $\mathbb{Q}(\sigma\pi) = \sigma(\mathbb{Q}(\pi))$. D'où l'énoncé. □

Le *lemme* I.8.4 reste vrai (on abandonne les ^{v}).
La *proposition* I.8.6 reste vraie.

III. Integrale d'une forme automorphe sur un tore

III.1. Préliminaires archimédiens

On conserve la situation du II.3: F est un corps de nombres, M une algèbre de quaternions définie sur F, déployée ou pas, $h = (h_v)_{v \in \bar{S}}$ un élément de H. On suppose que h vérifie la conclusion du corollaire I.8.2, i.e. $h_{\sigma v} = h_{\sigma \bar{v}}$ pour tous $v \in S_2$, $\sigma \in \mathscr{S}$. On pourra, si besoin est, considérer h comme une suite indicée par S, au lieu de $\bar{S}$. On se donne en outre un sous-tore maximal $\tilde{T}$ de M défini sur F vérifiant la condition
(P1) si $v \in S_1'$, $\tilde{T}_v$ est déployé.
On suppose que pour toute place $v \in S$, le groupe compact maximal K_v^0 est tel que $\tilde{T}_v \cap K_v^0$ est le sous-groupe compact maximal de $\tilde{T}_v$.

Soit $v \in S$. Notons $\tilde{\ell}_v$ l'algèbre de Lie de $\tilde{T}_v$, $\tilde{\ell}_v^c$ celle de $\tilde{T}_v \cap K_v$. L'espace $\tilde{\ell}_v/\tilde{\ell}_v^c$ est de dimension 1 si $v \in S_1' \cup S_2$, 0 si $v \in S_1''$. Fixons un élément non nul $\tilde{\tau}_v$ de $\wedge^1(\tilde{\ell}_v/\tilde{\ell}_v^c)$ dans le premier cas, de $\wedge^0(\tilde{\ell}_v/\tilde{\ell}_v^c)$ dans le second. Si $v \in S_1$, posons $(r_v, R_v) = (r[h_v], R[h_v])$, $(\pi_v, E_v) = (\pi[h_v], E[h_v])$. Si $v \in S_2$, posons $(r_v, R_v) = (r[h_v, h_{\bar{v}}], R[h_v, h_{\bar{v}}])$, $(\pi_v, E_v) = (\pi[h_v, h_{\bar{v}}], E[h_v, h_{\bar{v}}])$. On note R_v^*, E_v^* les espaces duaux, qui sont également des $\mathscr{I}_v$-K_v-modules, $R_v^{\tilde{T}_v}$, $R^{*\tilde{T}_v}_v$, $E^{*\tilde{T}_v}_v$ les sous-espaces des invariants par $\tilde{\ell}_v \times \tilde{T}_v \cap K_v$.

LEMME III.1.1: *On a les égalités* $\dim_{\mathbb{C}} R_v^{\tilde{T}_v} = \dim_{\mathbb{C}} R^{*\tilde{T}_v}_v = \dim_{\mathbb{C}} E^{*\tilde{T}_v}_v = 1$.

DÉMONSTRATION: Comme G_v lui-même agit dans R_v, $R_v^{\tilde{T}_v}$ est bien l'espace des invariants par $\tilde{T}_v$, qu'on calcule facilement en explicitant r_v. Comme $r_v \simeq (r_v)^v$, le même argument vaut pour R_v^*. L'assertion concernant $E^{*\tilde{T}_v}_v$ en résulte si $v \in S_1''$, auquel cas $E_v = R_v$, et est démontrée dans [W1], lemmes 19 et 22, pour $v \in S_1' \cup S_2$. □

On fixe des éléments non nuls $\tilde{\delta}_v \in R_v^{\tilde{T}_v}$, $\tilde{\ell}_v \in R^{*\tilde{T}_v}_v$, $\tilde{\ell}_{E,v} \in E^{*\tilde{T}_v}_v$.

LEMME III.1.2: *Le sous-espace des éléments de* E_v *qui appartiennent à l'espace du* K_v*-type minimal de* π_v, *et qui sont invariants par* $\tilde{T}_v \cap K_v$ *est de dimension* 1.

DÉMONSTRATION: Le K_v-type minimal de π_v intervient une seule fois dans π_v. On est ramené à la même assertion pour le représentation en question de K_v, qu'on connait. Le calcul est facile. □

On fixe un élément non nul $\tilde{e}_v$ de ce sous-espace. Fixons enfin un élément non nul $\eta_v \in C^1(\mathcal{J}_v, K_v, E_v \otimes R_v)$ si $v \in S_1' \cup S_2$, $\eta_v \in C^0(\mathcal{J}_v, K_v, E_v \otimes R_v)$ si $v \in S_1''$ (cf. proposition I.4 et lemme II.2).

LEMME III.1.3:

(i) *L'élément* $(\mathrm{id} \otimes \tilde{\ell}_v) \circ \eta_v(\tilde{\tau}_v)$ *de* E_v *est non nul et proportionnel à* $\tilde{e}_v$.

(ii) $\tilde{\ell}_{E,v}(\tilde{e}_v) \neq 0$.

DÉMONSTRATION: Identifions $E_v \otimes R_v$ à $\mathrm{Hom}(R_v, E_v)$, l'application id $\otimes\, \tilde{\ell}_v$ s'identifie à l'évaluation en $\tilde{\delta}_v$.

(a) Si $v \in S_1''$, on a $E_v \simeq R_v$, et $\eta_v(\tilde{\tau}_v)$ s'identifie à $\lambda \cdot \mathrm{id}_{R_v}$, pour un scalaire $\lambda \neq 0$. Donc $(\mathrm{id} \times \tilde{\ell}_v) \circ \eta_v(\tilde{\tau}_v) = \lambda \tilde{\delta}_v$. Mais $\tilde{e}_v$ et $\tilde{\delta}_v$ sont proportionnels par définition, d'où (i). Pour (ii), il s'agit de montrer que $\tilde{\ell}_v(\tilde{\delta}_v) \neq 0$. Soit $x \in R_v$ tel que $\tilde{\ell}_v(x) \neq 0$. Comme $\tilde{T}_v/Z_v$ est compact et $\tilde{\ell}_v$ est invariante par $\tilde{T}_v$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_v(x) &= \mathrm{mes}(\tilde{T}_v/Z_v)^{-1} \int_{\tilde{T}_v/Z_v} \check{r}_v(t) \tilde{\ell}_v(x) \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{mes}(\tilde{T}_v/Z_v)^{-1} \int_{\tilde{T}_v/Z_v} \tilde{\ell}_v(r_v(t)x) \mathrm{d}t \\ &= \tilde{\ell}_v(x').\end{aligned}$$

où

$$x' = \mathrm{mes}(\tilde{T}_v/Z_v)^{-1} \int_{\tilde{T}_v/Z_v} r_v(t) x \mathrm{d}t.$$

Mais par unicité, x' est proportionnel à $\tilde{\delta}_v$. Comme $\tilde{\ell}_v(x) \neq 0$, $\tilde{\ell}_v(\tilde{\delta}_v) \neq 0$.

(b) Supposons $v \in S_1' \cup S_2$. Adoptons les notations et interprétations du I.4, soit H un élément de $\tilde{\ell}_v$ se projetant sur $\tilde{\tau}_v$. Le terme $(\mathrm{id} \otimes \tilde{\ell}_v) \circ \eta_v(\tilde{\tau}_v)$ s'identifie à $p_1 \circ b(H)(\tilde{\delta}_v)$. S'il est nul, on a $p_1 \circ b(H')(\tilde{\delta}_v) = 0$ pour tout $H' \in \tilde{\ell}_v$. par définition de $\tilde{\delta}_v$, $p_2 \circ b(H')(\tilde{\delta}_v) = 0$ pour tout $H' \in \tilde{t}_v$. Donc $b(H')(\tilde{\delta}_v) = 0$ pour tout $H' \in \tilde{\ell}_v$, et $\tilde{\delta}_v$ est un élément non nul de $\mathscr{B}$ invariant par la composante neutre de $\tilde{T}_v$. A conjugaison près on peut supposer que $\tilde{T}_v$ est le tore diagonal et K_v^0 le groupe compact usuel. Considérons la fonction f définie sur F_v par

$$f(n) = \tilde{\delta}_v\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

pour tout $n \in F_v$. L'invariance de $\tilde{\delta}_v$ implique que $f(na) = \mu_2(a)|a|_v^{-1/2} f(n)$ pour tous $n \in F_v$, a dans la composante neutre de F_v^x. Alors f n'est pas continue en 0, ce qui contredit les conditions imposées aux éléments de $\mathscr{B}$. Donc $p_1 \circ b(H)(\tilde{\delta}_v) \neq 0$. On voit facilement que pour tous $x \in B_2$, $X \in \mathscr{J}_v$, $p_1 \circ b(X)(x)$ est dans le K_v-type minimal de B_1. Comme p_1 commute à l'action de K_v, et d'après les définitions de H et $\tilde{\delta}_v$, on voit que $p_1 \circ b(H)(\tilde{\delta}_v)$ est invariant par $\tilde{T}_v \cap K_v$. Par unicité (lemme III.1.2), il est proportionnel à $\tilde{e}_v$.

Il résulte de la démonstration des lemmes 19 et 22 de [W1] que $\tilde{\ell}_{E,v}$ n'est pas nulle sur le K_v-type minimal de π_v. Comme au (a), on en déduit par intégration que $\tilde{\ell}_{E,v}(\tilde{e}_v) \neq 0$. □

Posons $r = \otimes_{v \in S} r_v$, $R = \otimes_{v \in S} R_v$, $r_F = r|_{G_F}$. Soient L un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}(h)$, R^0 un sous-L-espace de R vérifiant les conditions de la proposition I.3, R^{0*} son dual comme L-espace, qui s'identifie à un sous-L-espace invariant par $\check{r}_F$ du dual complexe R^* de R. Soit T un sous-tore maximal de G, défini sur F et vérifiant la condition (P1) si $v \in S_1'$, T_v est déployé.

Si $v \in S$, les tores T_v et $\tilde{T}_v$ sont conjugués. Fixons $g_{T,v} \in G_v$ tel que $g_{T,v}^{-1} T_v g_{T,v} = \tilde{T}_v$, soit $g_T = (g_{T,v})_{v \in S} \in G_\infty$.

LEMME III.1.4: *On a les égalités* $\dim_L(R^0)^{T_F} = \dim_L(R^{0*})^{T_F} = 1$.

DÉMONSTRATION: Par conjugaison par g_T, le lemme 13 montre que $\dim_{\mathbb{C}} R^{T_\infty} = 1$. Comme T_F est dense dans T_∞, cela implique $\dim_{\mathbb{C}} R^{T_F} = 1$. La dernière assertion du lemme I.1 imPlique $\dim_L(R^0)^{T_F} = 1$. De même pour R^{0*} par passage à la contragrédiente. □

Posons $\tilde{\delta} = \otimes_{v \in S} \tilde{\delta}_v$, $\tilde{\ell} = \otimes_{v \in S} \tilde{\ell}_v$. On suppose, grâce au lemme ci-dessus, que $\tilde{\delta} \in R^0$, $\tilde{\ell} \in R^{0*}$. Il est clair que $r(g_T)\tilde{\delta} \in R^{T_F}$, et $\check{r}(g_T)\tilde{\ell} \in R^{*T_F}$. D'après le lemme ci-dessus ces termes sont proportionnels à des éléments de R^0, resp. R^{0*}. Nous allons calculer la constante de proportionnalité. Soient ξ, $\tilde{\xi} \in F^x$ tels que $F(\sqrt{\xi})$ et $F(\sqrt{\tilde{\xi}})$ soient les extensions quadratiques associées à T et $\tilde{T}$. Posons, par abus de notations

$$c(T)=\prod_{v\in S}|\xi\tilde{\xi}^{-1}|_v^{(h_v-2)/4}.$$

LEMME III.1.5:

(i) *L'image de $c(T)$ dans $\mathbb{C}^\times/\mathbb{Q}(h)^\times$ ne dépend pas des choix de ξ et $\tilde{\xi}$.*

(ii) $c(T)^2\in\mathbb{Q}(h)^*$.

(iii) *L'élément $c(T)r(g_T)\tilde{\delta}$ appartient à R^0, l'élément $c(T)\check{r}(g_T)\tilde{\ell}$ appartient à R^{0*}.*

DÉMONSTRATION: (a) Les assertions sont "invariantes par conjugaison", i.e. on peut remplacer T et $\tilde{T}$ par des tores conjugués sous G_F. Comme $c(T)r(g_T)\tilde{\delta}$ est proportionnel à un élément de R^0, et que $\tilde{\ell}(R^0)\subset L$, il suffit, pour démontrer que $c(T)r(g_T)\tilde{\delta}\in R^0$, de prouver que, quitte à conjuguer T et $\tilde{T}$, on a $\tilde{\ell}(c(T)r(g_T)\tilde{\delta})\in L^\times$. On va calculer ce terme.

(b) Posons $\tilde{F}=F(\sqrt{\xi})$, $F'=F(\sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}})$, $\tilde{F}'$ l'extension biquadratique composée de $\tilde{F}$ et F', ces extensions pouvant éventuellement être déployées. Notons $\tilde{\sigma}$, resp. σ', lélément de $\mathrm{Gal}(\tilde{F}'/F)$ dont la restriction à $\tilde{F}$, resp. F', est non triviale, et la restriction à F', resp. $\tilde{F}$ est triviale. Pour tout plongement $v\in\bar{S}$, on choisit un prolongement $\tilde{v}':\tilde{F}'\to\mathbb{C}$, on pose $\tilde{v}=\tilde{v}'|_{\tilde{F}}$, $v'=\tilde{v}'|_{F'}$. On suppose que si v_1 et v_2 sont conjugués, $\tilde{v}_1'$ et $\tilde{v}_2'$ le sont aussi. On sait qu'il existe une représentation fidèle de G_F dans $\mathrm{GL}_2(\tilde{F})$. Par extension des scalaires, elle se prolonge en une représentation de $G_{F'}$ dans $\mathrm{GL}_2(\tilde{F}')$. Plus précisément, il existe une constante non nulle $u\in F^\times$ telle que $G_{F'}$ soit isomorphe au groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\tilde{F}')$ telles que $d=\tilde{\sigma}(a)$, $c=u\tilde{\sigma}(b)$, le groupe G_F s'identifiant à l'intersection de ce groupe et de $\mathrm{GL}_2(\tilde{F})$. On peut supposer que $\tilde{T}_{F'}$ et $\tilde{T}_F$ s'identifient aux sous-groupes respectifs des éléments diagonaux. Soient k un entier pair $\geqslant 2$, s^k la représentation de $G_{F'}$ dans $\mathrm{GL}_{k-1}(\tilde{F}')$ composée du plongement ci-dessus et de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}\otimes\det^{1-k/2}$ de $\mathrm{GL}_2(\tilde{F}')$. Soient $v\in\bar{S}$, $\boldsymbol{v}$ la place de F définie par v, notons encore $\boldsymbol{v}$ son image par la section fixée $S\to\bar{S}$. Comme T et $\tilde{T}$ vérifient l'hypothèse (P1), $\xi\tilde{\xi}^{-1}$ est un carré de $F_{\boldsymbol{v}}$, donc $F'_{v'}\simeq F_{\boldsymbol{v}}$ et $G(F'_{v'})\simeq G(F_{\boldsymbol{v}})$. Il y a alors une représentation continue complexe s_v^k de $G_{\boldsymbol{v}}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif,

$$\begin{tikzcd}
G_F \arrow[rr, "s^k|_{G_F}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\boldsymbol{v}"'] & & \mathrm{GL}_{k-1}(\tilde{F}) \arrow[dr] \arrow[dd, "\tilde{v}"'] & \\
& G_{F'} \arrow[rr, "s^k"] \arrow[dl, "\boldsymbol{v}'"] & & \mathrm{GL}_{k-1}(\tilde{F}') \arrow[dl, "\tilde{v}'"] \\
G_{\boldsymbol{v}} \arrow[rr, "s_v^k"] & & \mathrm{GL}_{k-1}(\mathbb{C}) &
\end{tikzcd}$$

où les flèches $\boldsymbol{v}$, etc ... ont une signification évidente. On voit que

$$s_v^{h_v} \simeq r_v, \qquad \text{si} \quad v = \boldsymbol{v} \in S_1,$$

$$s_v^{h_v} \otimes s_{\bar{v}}^{h_v} \simeq r_{\boldsymbol{v}}, \qquad \text{si} \quad \boldsymbol{v} \in S_2.$$

Notons $H_v = \mathbf{C}^{h_v - 1}$ l'espace de la représentation $s_v^{h_v}$, $e_1^v, \ldots, e_{h_v-1}^v$ sa base canonique, $f_1^v, \ldots, f_{h_v-1}^v$ la base duale. Comme $\tilde{T}_F$ a été identifié à un sous-groupe du tore diagonal de $\mathrm{GL}_2(\tilde{F})$, on voit facilement que $e_{h_v/2}^v$ et $f_{h_v/2}^v$ sont invariants par $\tilde{T}_F$. identifions R à $\otimes_{v \in \tilde{S}} H_v$. On peut supposer que $\tilde{\delta}$ s'identifie à $\otimes_{v \in \tilde{S}} e_{h_v/2}^v$, et $\tilde{\ell}$ à $\otimes_{v \in \tilde{S}} f_{h_v/2}^v$.

Par définition de F', les tores T et $\tilde{T}$ sont conjugués sous $G_{F'}$. Soit $g \in G_{F'}$ tel que $g^{-1} T_{F'} g = \tilde{T}_{F'}$. On peut supposer que pour toute place $\boldsymbol{v} \in S$, le terme $g_{T,\boldsymbol{v}}$ choisi plus haut est l'image de g par l'application $G_{F'} \xrightarrow{\boldsymbol{v}'} G_{\boldsymbol{v}}$. D'après la commutativité du diagramme ci-dessus et nos identifications, on obtient

$$\tilde{\ell}(r(g_T)\tilde{\delta}) = \prod_{v \in \tilde{S}} f_{h_v/2}^v \left[\left(\tilde{v}' \circ s^{h_v}(g) \right) e_{h_v/2}^v \right].$$

Chaque terme local n'est autre que le coefficient "central" de la matrice $\tilde{v}' \circ s^{h_v}(g)$, qu'on va maintenant expliciter.

(c) Identifions G_F et $G_{F'}$ à leurs images dans $\mathrm{GL}_2(\tilde{F})$ et $\mathrm{GL}_2(\tilde{F}')$, posons $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, soit $t \in T_F$ tel que $\mathrm{tr}(t) = 0$, $\det(t) = -\xi$. Posons

$$t = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\xi} & \beta \\ u\tilde{\beta} & -\alpha\sqrt{\xi} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in F$, $\beta \in \tilde{F}$, $\tilde{\beta} = \tilde{\sigma}(\beta)$, $\alpha^2 \xi + u\beta\tilde{\beta} = \xi$. La définition de g équivaut à dire que $g^{-1} t g$ est diagonal. On voit par calcul qu'on peut poser $a = d = 1$, $b = x$, $c = y^{-1}$, où x et y sont les deux solutions de l'équation

$$X^2 u\tilde{\beta} - 2X\alpha\sqrt{\xi} - \beta = 0$$

pour peu que $\beta \neq 0$, ce qu'on peut supposer en conjuguant T si besoin est. On a

$$x = \sqrt{\xi}\,(u\tilde{\beta})^{-1}\left(\alpha - \sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right),$$

$$y = \sqrt{\xi}\,(u\tilde{\beta})^{-1}\left(\alpha + \sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right).$$

(On vérifie que $y^{-1} = u\tilde{\sigma}(x)$, ce qui confirme que $g \in G_{F'}$).

Si k est un entier pair $\geqslant 2$, le coefficient central de $s^k(g)$ se calcule aisément. C'est

$$A^k = (ad-bc)^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 (ad)^i (bc)^{n-i},$$

où $n = k/2 - 1$. On calcule

$$A^k = \left(\sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right)^{-n} B^k,$$

où

$$B^k = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \left(\alpha - \sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right)^i \left(\alpha + \sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right)^{n-i}.$$

Par symétrie, on voit que $B^k \in F$. On peut supposer $B^k \neq 0$.

(d) D'après (b) et (c), et puisque pour tout $v \in \bar{S}$, $\tilde{v}'|_{F'} = v'$, $\tilde{v}'|_F = v$, on obtient

$$\tilde{\ell}(r(g_T)\tilde{\delta}) = \left[\prod_{v\in\bar{S}} v'\left(\sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right)^{1-h_v/2}\right]\left[\prod_{v\in\bar{S}} v(B^{h_v})\right].$$

Le deuxième produit appartient à $\mathbb{Q}(h)^\times$. En effet si $\sigma \in \mathscr{S}(h)$, on a

$$\sigma\left(\prod_{v\in\bar{S}} v(B^{h_v})\right) = \prod_{v\in\bar{S}} \sigma\circ v(B^{h_v}) = \prod_{v\in\bar{S}} v(B^{(\sigma h)_v}).$$

Mais $\sigma h = h$, donc le produit est invariant par σ.

Si $v \in S_1$, v' est encore réel, car T et $\tilde{T}$ vérifient (P1), donc

$$v'\left(\sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right) = \pm\left|\sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right|_{v'} = \pm|\xi\tilde{\xi}^{-1}|_v^{1/2}.$$

Si $v \in S_2$, par hypothèse $\overline{v'} = (\bar{v})'$. Donc

$$v'\left(\sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right)(\bar{v})'\left(\sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right) = \left|\sqrt{\xi\tilde{\xi}^{-1}}\right|_{v'} = |\xi\tilde{\xi}^{-1}|_v^{1/2}.$$

Dans se cas, on a en outre $h_v = h_{\bar{v}}$. On déduit des égalités ci-dessus que

$$\prod_{v\in S} |\xi\tilde{\xi}^{-1}|_v^{(h_v-2)/4} \cdot \tilde{\ell}(r(g_T)\tilde{\delta}) \in \mathbb{Q}(h)^\times.$$

D'après (a), cela implique la première assertion du (iii).

(e) Comme $r \simeq \check{r}$, la seconde assertion du (iii) est immédiate. Par ailleurs un calcul direct de passage à la contragrédiente déduit de la première assertion du (iii) la relation $c(T)^{-1}\check{r}(g_T)\tilde{\ell} \in R^{0*}$. En comparant les deux relations obtenues, on obtient $c(T)^2 \in L^x$, d'où (ii) en choisissant $L = \mathbb{Q}(h)$. Enfin la propriété (iii) est indépendante des choix de ξ et $\tilde{\xi}$, et détermine $c(T)$ modulo $\mathbb{Q}(h)^x$, d'où (i). □

REMARQUE: On peut démontrer directement (i) et (ii).

III.2. Préliminaires concernant les tores

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent. On fixe sur les groupes additifs et multiplicatifs intervenant dans nos calculs des mesures de Tamagawa, de la façon suivant. Soit $\psi_{\mathbb{Q}}$ le caractère des adèles de $\mathbb{Q}$, égal à 1 sur $\mathbb{Q}$ et dont la composante réelle $\psi_{\mathbb{R}}$ est définie par $\psi_{\mathbb{R}}(x) = e^{2\pi i x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout corps de nombres E, soit $\psi_E = \psi_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{Tr}_{E/\mathbb{Q}}$ le caractère des adèles de E. Pour toute place v de E, soit ψ_v le caractère de E_v, composante locale de ψ_E. On fixe comme mesure dx sur E_v la mesure de Haar autoduale pour ψ_v, et comme mesure sur E_v^x la mesure $\zeta_v(1)|x|_v^{-1}dx$, oùζ_v est la fonction zêta du corps E_v. On définit par produit des mesures sur les adèles de E et sur les idèles. On définit sur les groupes discretes la mesure de comptage, et sur le quotient de deux groupes munis de mesures, la mesure quotient. En particulier cela définit des mesures sur $T_{\mathbb{A}}$, T_F, $Z_{\mathbb{A}}$, etc ...

Notons χ_T le caractère quadratique de $\mathbb{A}^x/F^x$ associé à T, et $L(\chi_T, s)$ sa fonction L, produit sur toutes les places de F des fonctions L locales. Supposons déformais que T vérifie

(P2) T n'est pas déployé.

LEMME III.2.1: *On a l'égalité* $\mathrm{mes}(T_F Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}) = 2L(\chi_T, 1)$.

Ce dernier terme est fini grâce à (P2). L'assertion est bien connue. □

Notons T^c et $\tilde{T}^c$ les images réciproques dans T_∞ et $\tilde{T}_\infty$ des sousgroupes compacts maximaux de T_∞/Z_∞, $\tilde{T}_\infty/Z_\infty$. On fixe sur ces groupes des mesures telles que $\mathrm{mes}(T^c/Z_\infty) = \mathrm{mes}(\tilde{T}^c/Z_\infty) = 1$. On a une application $\mathrm{Ad}(g_T^{-1}): T_\infty \to \tilde{T}_\infty$, qui envoie T^c sur $\tilde{T}^c$ et passe donc au quotient.

LEMME III.2.2: *L'application* $\mathrm{Ad}(g_T^{-1}): T_\infty/T^c \to \tilde{T}_\infty/\tilde{T}^c$ *préserve les mesures.*

C'est évident. □

Notons t, t^c, $\tilde{t}$, $\tilde{t}^c$ les algèbres de Lie de T_∞, T^c, $\tilde{T}_\infty$, $\tilde{T}^c$. L'espace $\tilde{t}/\tilde{t}^c$ est de dimension $t = |S_1'| + |S_2|$. La mesure sur $\tilde{T}_\infty/\tilde{T}^c$ définit une application $\wedge^t(\tilde{t}/\tilde{t}^c) \to \mathbb{R}_+$. On choisit $\tilde{\tau} \in \wedge^t(\tilde{t}/\tilde{t}^c)$ dont l'image par cette application est 1. Cette condition détermine $\tilde{\tau}$ au signe près et le choix de $\tilde{\tau}$ équivaut au choix d'une orientation sur $\tilde{T}_\infty/\tilde{T}^c$.

Soient K un sous-groupe ouvert compact de G_f, $K_T = KZ_f \cap T_f$, qui est muni de la mesure induite par celle de T_f. Notons D_F le discriminant de F, $|\xi|_f$ le produit des $|\xi|_v$ sur les places finies v de F, où on rappelle que $F(\sqrt{\xi})$ est l'extension associée à T.

LEMME III.2.3: *On a la relation*

$$|D_F|^{1/2}|\xi|_f^{1/2}\ \mathrm{mes}(K_T/Z_f)\in \mathbb{Q}^x.$$

DÉMONSTRATION. Identifions T et $F(\sqrt{\xi})^x$. Tous les sous-groupes ouverts compacts de T_f/Z_f sont commensurables. On peut remplacer K_T par le groupe $\mathscr{O}^x_{T,f}Z_f$, où$\mathscr{O}^x_{T,f}$ où $\mathscr{O}^x_{T,f}$ est le produit sur toutes les places finies v de $F(\sqrt{\xi})$ des groupes des unités de $F(\sqrt{\xi})_v$. Notons $\mathscr{O}^x_{Z,f}$ le groupe correspondant pour F. Alors

$$\mathrm{mes}(\mathscr{O}^x_{T,f}Z_f/Z_f)=\mathrm{mes}(\mathscr{O}^x_{T,f}/\mathscr{O}^x_{Z,f})=|D_f|^{1/2}|D_\xi|^{-1/2},$$

où D_ξ est le discriminant de $F(\sqrt{\xi})$, d'après nos définitions et [T] p. 319. Notons D'_ξ l'idéal discriminant relatif de $F(\sqrt{\xi})/F$. On a l'égalité $|D_\xi|=D_F^2N_{F/\mathbb{Q}}(D'_\xi)$. Il est bien connu que pour toute place de F, les valuations de D'_ξ et ξ ont même parité. Donc $N_{F/\mathbb{Q}}(D'_\xi)|\xi|_{\mathrm{f}}^{-1}$ est un carré de $\mathbb{Q}^x$. Donc

$$\mathrm{mes}(\mathscr{O}^x_{T,f}/\mathscr{O}^x_{Z,f})\equiv|D_F|^{-1/2}|\xi|_f^{-1/2}\ \mathrm{mod}\ \mathbb{Q}^x.$$

Posons $U'_K=T_F\cap(T_\infty\times K_T)$, $\overline{U}_K=U'_K/(U'_K\cap Z_F)$.

LEMME III.2.4: *Si K est assez petit, $\overline{U}_K$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^t$.*

REMARQUE: la condition "K assez petit" dépend de T.
DÉMONSTRATION. Identifions T et $F(\sqrt{\xi})^x$. Notons E_T, E_Z les groupes d'unités de $F(\sqrt{\xi})^x$ et F^x.

(a) Montrons qu'il existe deux sous-groupes d'indice fini de $\overline{U}_K$ et de E_T/E_Z isomorphes. On peut supposer $K_T=\mathscr{O}^x_{T,f}Z_f$ (cf. démonstration du lemme III.2.3). Alors $E_T\subset U'_K$. Cette inclusion définit une injection $E_T/E_Z\to\overline{U}_K$. Soient $u\in U'_K$, $x\in\mathscr{O}^x_{T,f}$, $z\in Z_f$ tels que $\mathrm{pr}_f(u)=xz$, où pr_f est l'application évidente. Par finitude du nombre de classes de F, il existe un ensemble fini $\{z_1,\dots,z_h\}\subset Z_f$ tel que pour tout $z'\in Z_f$, il existe $v\in Z_F$, $i\in\{1,\dots,h\}$, $y\in\mathscr{O}^x_{Z,f}$ vérifiant $z'=\mathrm{pr}_f(v)z_iy$. On peut supposer $z_1=1$. Ecrivons une telle décomposition pour l'élément z ci-dessus. Alors $\mathrm{pr}_f(uv^{-1})=z_ixy$. Quitte à supposer u dans un sous-groupe d'indice fini de U'_K, on peut supposer $i=1$, $z_i=1$. Alors $uv^{-1}\in E_T$. Mais u et uv^{-1} ont même image dans $\overline{U}_K$. Donc l'application $E_T/E_Z\to\overline{U}_K$ a pour image un sous-groupe d'indice fini de $\overline{U}_K$, ce qui démontre l'assertion.

(b) D'après le théorème des unités, E_T, resp. E_Z, est le produit d'un groupe fini et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^a$, resp. $\mathbb{Z}^b$ où

$$b = |S_1| + |S_2| - 1,$$

et

$$a = 2|S_1'| + |S_1''| + 2|S_2| - 1,$$

d'après l'hypothèse (P1). Donc E_T/E_Z est le produit d'un groupe fini et d'un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^t$.

(c) Si $\bar{U}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\bar{U}_K$, il existe $K' \subset K$ tel que $\bar{U}_{K'} \subset \tilde{U}$. L'énoncé résulte alors de (a) et (b). □

Posons $U_K = \mathrm{pr}_\infty(\bar{U}_K)$. Les groupes U_K et $\bar{U}_K$ son isomorphes. On Suppose désormais K assez petit pour vérifier les lemmes I.6.1 et III.2.4. Fixons des éléments $(e_k)_{k=1,\dots,t}$ de U_K, formant une $\mathbb{Z}$-base de ce groupe. Quitte à choisir K encore plus petit, on peut supposer que, pour tout k, e_k est dans la composante neutre de T_∞/Z_∞. On fixe $\varepsilon_k \in t/\mathscr{J}_\infty$ tel que $e_k = \exp(\varepsilon_k)$, où $\mathscr{J}_\infty = \mathrm{Lie}(Z_\infty)$. Remarquons que l'algèbre engendrée par les ε_k est supplémentaire de $t^c/\mathscr{J}_\infty$. On suppose alors les e_i rangés dans un ordre tel que $\mathrm{Ad}(g_T^{-1})(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_t)$ est, modulo $\tilde{t}^c$, un multiple positif de $\tilde{\tau}$.

L'ensemble $J = T_F \backslash T_{\mathbf{A}}/(T_\infty \times K_T)$ est fini. Fixons un système de représentants $(t_j)_{j\in J}$, avec $t_j \in T_f$ pour tout $j \in J$. Introduisons les objets définis au I.6. Pour tout $j \in J$, il existe des éléments $i = i(j) \in I$, $m_j' \in G_F$, $k_j \in K$, $z_j \in Z_f$ tels que

$$t_j = \mathrm{pr}_f(m_j')x_{i(j)}k_jz_j.$$

Posons $m_j = \mathrm{pr}_\infty \circ p(m_j')$, et pour tout $k = 1, \dots, t$, $e_{k,j} = m_j^{-1}e_km_j$. On vérifie que $e_{k,j} \in \Gamma_{i(j)}$.

Soient $a_1, \dots, a_t$ la base canonique de $\mathbb{Z}^t$, $\{C^n(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C})\}_{n\geqslant 0}$ le complexe des cochaînes de $\mathbb{C}^t$ dans $\mathbb{C}$, où $\mathbb{Z}^t$ agit trivialement dans $\mathbb{C}$, $\mathscr{L}_t$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, t\}$, et sgn: $\mathscr{L}_t \to \{\pm 1\}$ la signature. Pour $\mu \in C^t(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C})$, posons

$$D(\mu) = \sum_{\sigma\in\mathscr{L}_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\mu(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(t)}).$$

Lemme III.2.5: *L'application D définit par restriction et passage au quotient une forme linéaire sur $H^t(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C})$.*

On note encore D cette forme linéaire.

DÉMONSTRATION: Si $t=0$, c'est évident. Si $t \geqslant 1$, il s'agit de montrer que pour tout $\mu \in C^{t-1}(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C})$, $D(d\mu)=0$. Le calcul est standard. □

Soient $j \in J$, $\mu \in C^t(\Gamma_{\iota(j)}, R)$ une cochaîne. Posons

$$D_j(\mu)=\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_t} \operatorname{sgn}(\sigma) \tilde{\ell} \circ r\left(g_T^{-1} m_j\right) \circ \mu\left(e_{\sigma(1), j}, \ldots, e_{\sigma(t), j}\right).$$

LEMME III.2.6: *L'application D_j définit par restriction et passage au quotient une forme linéaire sur $H^t(\Gamma_{\iota(j)}, R)$.*

On note encore D_j cette forme linéaire.

DÉMONSTRATION: Soit U_j le sous-groupe de $\Gamma_{\iota(j)}$ engendré par les $e_{k,j}$, $k=1, \ldots, t$. Il y a une application de restriction $H^t(\Gamma_{\iota(j)}, R) \rightarrow H^t(U_j, R)$. Comme $\tilde{\ell}$ est invariante par $\tilde{T}_\infty$, on vérifie que $\tilde{\ell} \circ r(g_T^{-1} m_j): R \rightarrow \mathbb{C}$ commute aux actions de U_j, où U_j agit trivialement sur $\mathbb{C}$. Par fonctorialité, on obtient une application $H^t(U_j, R) \rightarrow H^t(U_j, \mathbb{C})$. Identifions $e_{k,j}$ à a_k, on obtient une application $H^t(U_j, \mathbb{C}) \rightarrow H^t(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C})$. Enfin, il y a la forme linéaire $D: H^t(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$. Il est clair que D_j est la composée de ces applications. □

III.3. Un lemme élémentaire

Munissons la variété $\mathbb{Z}^t \backslash \mathbb{R}^t$ de l'orientation et de la mesure usuelles. L'intégration

$$\mu \mapsto \int_{\mathbb{Z}^t \backslash \mathbb{R}^t} \mu$$

définit une forme linéaire sur l'espace de cohomologie de De Rham $H^t(\mathbb{Z}^t \backslash \mathbb{R}^t, \mathbb{C})$. Introduisons comme dans la démonstration de la proposition I.6.2 l'isomorphisme $Q: H^t(\mathbb{Z}^t \backslash \mathbb{R}^t, \mathbb{C}) \rightarrow H^t(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C})$.

LEMME III.3: *Si $\mu \in H^t(\mathbb{Z}^t \backslash \mathbb{R}^t, \mathbb{C})$, on a l'égalité*

$$\int_{\mathbb{Z}^t \backslash \mathbb{R}^t} \mu=(-1)^{t(t+1)/2} D \circ Q(\mu).$$

DÉMONSTRATION: Les deux membres définissent des formes linéaires sur $H^t(\mathbb{Z}^t \backslash \mathbb{R}^t, \mathbb{C})$ qui est de dimension 1. Il suffit de vérifier l'égalité pour un élément μ non nul, par exemple l'image de la forme $\mu=\mathrm{d} x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d} x_t$. Utilisons des notations analogues à celles du I.6. On va calculer une suite $(\mu_n)_{n=0, \ldots, t}$, associée à μ, avec $\mu_n \in C^{t-n, n}$.

Soit $N=\{i_1,\dots,i_n\}$ un sous-ensemble de $\{1,\dots,t\}$, avec $i_1<\dots<i_n$. Pour $k\in\{1,\dots,n\}$ posons $s_N(i_k)=(-1)^{k+1}$. Posons $s_N=\prod_{i\in N}(-1)^i$, $\mathrm{d}x_N=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}$, soit N^c le complémentaire de N. Soient $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ des éléments de $\mathbb{Z}^t$, écrivons $\gamma_i=(\gamma_{i1},\dots,\gamma_{it})$, avec $\gamma_{ij}\in\mathbb{Z}$, on note $D_N(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ le déterminant extrait $|\gamma_{ij}|$, $i=1,\dots,n$, $j\in N$. Notons enfin $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des sous-ensembles à n éléments de $\{1,\dots,t\}$.

Pour $n\in\{0,\dots,t\}$ définissons $\mu_n\in C^{t-n,n}$ par la formule

$$\mu_n(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\frac{(t-n)!}{t!}\sum_{N\in\mathcal{N}_n}s_N D_N(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\mathrm{d}x_{N^c}$$

pour tous $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in\mathbb{Z}^t$. Montrons que ces termes vérifient les conditions voulues. Si $n=0$, μ_0 s'identifie bien à μ. On doit montrer que si $n\in\{0,\dots,t-1\}$, il existe $\mu'_n\in C^{t-n-1,n}$ tel que $\mathrm{d}_X\mu'_n=\mu_n$, $\mathrm{d}_\Gamma\mu'_n=\mu_{n+1}$ (en supposant $t\geqslant 1$). Si M est un sous-ensemble non vide de $\{1,\dots,t\}$, on vérifie la relation

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{|M|}\sum_{i\in M}s_M(i)x_i\mathrm{d}x_{M-\{i\}}\right)=\mathrm{d}x_M$$

Définissons alors μ'_n par

$$\mu'_n(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\frac{(t-n)!}{t!}\sum_{N\in\mathcal{N}_n}s_N D_N(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$$
$$\times\left[\frac{1}{t-n}\sum_{i\in N^c}s_{N^c}(i)x_i\mathrm{d}x_{N^c-\{i\}}\right].$$

On a bien $\mathrm{d}_X\mu'_n=\mu_n$. Pour $M\in\mathcal{N}_{n+1}$ et $i\in M$, on vérifie les relations

$$s_{M^c\cup\{i\}}(i)s_M(i)=(-1)^{i+1},$$
$$(-1)^i s_{M-\{i\}}=s_M.$$

D'où

$$\mu'_n(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\frac{(t-n-1)!}{t!}\sum_{M\in\mathcal{N}_{n+1}}s_M$$
$$\times\left[-\sum_{i\in M}s_M(i)D_{M-\{i\}}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)x_i\right]$$

Calculons $\mathrm{d}_\Gamma\mu'_n$. Grâce à la multilinéarité du déterminant, la plupart des termes s'annulent 2 à 2. Il reste, pour $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} \in \mathbb{Z}^t$

$\mathrm{d}_\Gamma \mu_n'(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}) = \gamma_1 \cdot \mu_n'(\gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}) - \mu_n'(\gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1})$.

Posons $\gamma_1 = (\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1t})$, avec $\gamma_{1j} \in \mathbb{Z}$. Alors pour tous $i \in \{1, \ldots, t\}$, $M \subset \{1, \ldots, t\}$,

$$\gamma_1 \cdot x_\iota = x_\iota - \gamma_{1\iota},$$

$$\gamma_1 \cdot \mathrm{d}x_M = \mathrm{d}x_M.$$

(Il y a une inversion entre l'action de $\mathbb{Z}^t$ sur $\mathbb{R}^t$ et son action sur les formes différentielles, qui explique la signe -). D'où

$$\mathrm{d}_\Gamma \mu_n'(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}) = \frac{(t-n-1)!}{t!} \sum_{M \in \mathcal{N}_{n+1}} s_M \times \left[\sum_{i \in M} s_M(i) \gamma_{1\iota} D_{m-\{\iota\}}(\gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}) \right] \mathrm{d}x_{M^c}.$$

En utilisant la formule de développement d'un déterminant selon se première ligne, cela démontre que $\mathrm{d}_\Gamma \mu_n' = \mu_{n+1}$.

Pour $n = t$, on obtient

$$Q(\mu)(\gamma_1, \ldots, \gamma_t) = \frac{1}{t!} s_{\{1,\ldots,t\}} D_{\{1,\ldots,t\}}(\gamma_1, \ldots, \gamma_t).$$

On calcule

$$s_{\{1,\ldots,t\}} = (-1)^{t(t+1)/2},$$

et, si $\sigma \in \mathcal{L}_t$,

$$D_{\{1,\ldots,t\}}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(t)}) = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Alors $D \circ Q(\mu) = (-1)^{t(t+1)/2}$, d'où la formule de l'énoncé. □

III.4. Intégrale sur un tore d'une forme automorphe parabolique

On reprend les hypothèses et notations de III, 1, 2. Posons $\tilde{e}_\infty = \otimes_{v \in S} \tilde{e}_v$, $\eta = \otimes_{v \in S} \eta_v$ (cf. III.1). On suppose que $(\mathrm{id} \otimes \tilde{\ell}) \circ \eta(\tilde{\tau}) = \tilde{e}_\infty$ (cf. lemme III.1.3).

Soient $E \in A_0(h)$, fixons un isomorphisme i: $\otimes_v E_v \to E$, avec $E_v = E[h_v]$ ou $E[h_v, h_{\bar{v}}]$ si $v \in S$. Supposons $E^K \neq \{0\}$. D'après I.5, 6, et II.3, les choix de η et i déterminent une injection

$$c\colon E_f^K \to \bigoplus_{i \in I} H^t(\Gamma_i, R)$$

$$e \mapsto (c(e)_\iota)_{i \in I}.$$

On définit par ailleurs une application

$$E_f^K \to E$$

$$e \mapsto \varphi_e = i(e \otimes \tilde{e}_\infty).$$

Soit enfin χ un caractère de $T_F Z_{\mathbf{A}} \backslash T_{\mathbf{A}}$, trivial sur T_∞ et sur K_T.

PROPOSITION III.4: *Sous ces hypothèses, si $e \in E_f^K$, on a l'égalité*

$$\int_{T_f Z_{\mathbf{A}} \backslash T_{\mathbf{A}}} \chi(t)\varphi_e(tg_T)\mathrm{d}t = (-1)^{t(t+1)/2} \operatorname{mes}(K_T/Z_f)$$
$$\times \sum_{j \in J} \chi(t_j) D_j(c(e)_{\iota(j)}).$$

DÉMONSTRATION: On a l'égalité

$$\int_{T_F Z_{\mathbf{A}} \backslash T_{\mathbf{A}}} \chi(t)\varphi_e(tg_T)\mathrm{d}t = \sum_{j \in J} A_j, \tag{Q}$$

où pour tout $j \in J$,

$$A_j = \int_{U_K' Z_{\mathbf{A}} \backslash (T_\infty \times K_T)} \chi(t_j t)\varphi_e(t_j t g_T)\mathrm{d}t.$$

Fixons j, posons $i = i(j)$. Par invariance de φ par G_F à gauche, par K à droite, et de χ par T_∞ et K_T, on a

$$A_j = \chi(t_j) \operatorname{mes}(K_T/Z_f) \int_{U_k \backslash PT_\infty} \varphi_e(x_i m_j^{-1} t g_T)\mathrm{d}t,$$

où $\mathrm{PT} = T_\infty / Z_\infty \subset PG_\infty$. Soit μ la forme différentielle sur $\Gamma_i \backslash X$ associée à e (cf. I.6). On considère μ comme une fonction sur $\mathrm{PG}_\infty \times \Lambda^t(\mathscr{J}_\infty / k_\infty)$, à valeurs dans R. Les définitions impliquent que pour tout $g \in \mathrm{PG}_\infty$,

$$\varphi_e(x_i g) = \tilde{\ell} \circ r(g^{-1}) \circ \mu(g, \tilde{\tau}).$$

Si $t \in PT_\infty$, on a l'égalité

$$\tilde{\ell} \circ r(g_T^{-1}) \circ r(t^{-1}) = \tilde{\ell} \circ r(g_T^{-1})$$

par définition de g_T et invariance de $\tilde{\ell}$ par $\tilde{T}_\infty$. Alors la relation ci-dessus implique

$$A_j = \operatorname{mes}(K_T/Z_f)\chi(t_j) \int_{U_K \backslash \mathrm{PT}_\infty} \tilde{\ell} \circ r(g_T^{-1} m_j) \circ \mu(m_j^{-1} t g_T, \tilde{\tau})\mathrm{d}t.$$

Soit $t' \in T^c$. On a $g_t^{-1}t'g_T \in \tilde{T}^c \subset K_\infty$. D'après l'invariance de μ sous K_∞, et le fait que $\mathrm{Ad}(t'')\tilde{\tau} = \tilde{\tau}$ pour tout $t'' \in \tilde{T}^c$, on a l'égalité

$$\mu\left(m_j^{-1}tt'g_T,\ \tilde{\tau}\right) = \mu\left(m_j^{-1}tg_T,\ \tilde{\tau}\right)$$

pour tous $t \in \mathrm{PT}_\infty$, $t' \in T^c$. Soit S la sous-variété de PT_∞, exponentielle de l'algèbre de Lie engendrée par les ε_k, $k = 1, \ldots, t$ (cf. III.2). Alors S est un sous-groupe de PT_∞ contenant U_K, et PT_∞ est le produit direct de S par T^c/Z_∞. D'où

$$A_j = \mathrm{mes}\left(K_T/Z_f\right)\chi\left(t_j\right)\int_{U_K\backslash S} \tilde{\ell} \circ r\left(g_T^{-1}m_j\right) \circ \mu\left(m_j^{-1}tg_T,\ \tilde{\tau}\right)\mathrm{d}t.$$

Posons $\varepsilon = \varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_t$. D'après le lemme III.2.2, on peut remplacer dans la formule ci-dessus $\tilde{\tau}$ par $\mathrm{Ad}(g_T^{-1})(\varepsilon)$, à condition de remplacer $\mathrm{d}t$ par la mesure sur S " valant 1 sur ε".

On voit facilement (grâce par exemple à la décomposition d'Iwasawa), qu'il existe un isomorphisme f: $X = G_\infty/K_\infty \to \mathbb{R}^a$ de variétés C^∞, où $a = 2|S_1'| + 3|S_2|$, tel que

(i) pour tous $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{R}$,

$$f\left(m_j^{-1}\exp\left(\sum_{k=1}^{t} x_k\varepsilon_k\right)g_T\right) = \left(x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0\right),$$

(ii) soient $g \in G_\infty$, $f(g) = (x_1, \ldots, x_a)$; alors pour tout $k \in \{1, \ldots, t\}$,

$$f\left(e_{k,j}g\right) = \left(x_1, \ldots, x_k + 1, \ldots, x_a\right),$$

où $e_{k,j} = m_j^{-1}e_k m_j$.

Notons μ' la forme différentielle sur $\mathbb{R}^a$, à valeurs complexes, déduite par f de la forme $\tilde{\ell} \circ r(g_T^{-1}m_j) \circ \mu$ sur X. Soit μ'' la restriction de μ' à $\mathbb{R}^t$, plongé dans $\mathbb{R}^a$ par $(x_1, \ldots, x_t) \mapsto (x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0)$. La forme μ'' est invariant par $\mathbb{Z}^t$ et on a l'égalité

$$A_j = \mathrm{mes}\left(K_T/Z_f\right)\chi\left(t_j\right)\int_{\mathbb{Z}^t\backslash\mathbb{R}^t}\mu''. \tag{R}$$

Soit $Q(\mu'')$ l'élément de $H^t(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C})$ associé à μ''. Considérons l'élément $c(e)_i \in H^t(\Gamma_i, R)$ associé à e. Dans la démonstration du lemme III.2.6, on lui a associé un élément de $H^t(\mathbb{Z}^t, \mathbb{C})$. On vérifie que cet élément est $Q(\mu'')$: il s'agit essentiellement de montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^t(\Gamma_i\backslash X,\ R) & \to & H^t(\Gamma_i,\ R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^t(U_j\backslash S,\ R) & \to & H^t(U_j,\ R), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes de la démonstration de la proposition I.6.2, la flèche de gauche est l'application déduite du plongement $t \mapsto m_j^{-1} t g_T$ de S dans X, et celle de droite la restriction. Les lemmes III.2.6 et III.3 montrent alors que

$$\int_{\mathbb{Z}^t \backslash \mathbb{R}^t} \mu'' = (-1)^{t(t+1)/2} D_j(c(e)_t). \tag{S}$$

Les formules (Q), (R), (S) démontrent la proposition. □

III.5. L'espaces des formes automorphes paraboliques arithmétiques

On converse les notations des paragraphes précédents. On considère E comme fixé, et le tore T et le sous-groupe K comme variables.

Soient donc $(\pi, E) \in A_0(h)$, i: $\otimes_v E_v \to E$ un isomorphisme. Posons $\tilde{E} = i(E_f \otimes \tilde{e}_\infty)$. On peut aussi définir $\tilde{E}$ comme l'espace des $\varphi \in E$ vérifiant

(i) pour toute place $v \in S$, la représentation de K_v dans l'espace engendré par les translatés $\pi_v(k)$, $k \in K_v$, est le K_v-type minimal de π_v,

(ii) pour toute place $v \in S$, φ est invariant par $\pi_v(t)$ pour tout $t \in \tilde{T}_v^c$.

On considère les couples (T, χ), où T est un sous-tore maximal de G défini sur F et χ un caractère de $T_F Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}$. On considère les conditions

(T1) pour toute place $v \in S_1$, si M_v est déployée, T_v l'est aussi,

(T2) T n'est pas déployé sur F,

(T3) $\chi|_{T_\infty} = 1$, et les valeurs de χ appartiennent à $\mathbb{Q}(\pi)^x$.

Soit ξ un élément de F^x tel que $F(\sqrt{\xi})$ soit l'extension quadratique associée à T. On pose

$$p(T) = \prod_{v \in S} |\xi|_v^{h_v/4}.$$

Comme au lemme III.1.5, ce terme modulo $\mathbb{Q}(\pi)^x$, ne dépend pas du choix du ξ. Supposons (T1) vérifiée. On introduit un terme g_T comme au III.1. si $\varphi \in E$ et $g \in G_f$, on pose

$$I(\varphi, g, T, \chi) = p(T)^{-1} \int_{T_F Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} \chi(t) \varphi(t g g_T) \mathrm{d}t.$$

Soit $\tilde{E}^0$ l'ensemble des $\varphi \in \tilde{E}$ tels que pour tout $g \in G_f$, tout couple (T, χ) vérifiant (T1), (T2), (T3), on ait

$$I(\varphi, g, T, \chi) \in \mathbb{Q}(\pi).$$

Considérons enfin la condition

$$\varepsilon(\pi, 1/2) = 1, \text{ ou il existe une place finie } v \text{ de } F \text{ telle que } M_v \tag{U}$$

ne soit pas déployée, ou il existe une place finie v de F telle oue M_v soit déployée et π_v soit spéciale ou cuspidale,
où ε est le facteur habituel.

THÉORÈME III.5.1: (1) *$\tilde{E}^0$ est un sous-$\mathbb{Q}(\pi)$-espace vectoriel de $\tilde{E}$, stable par $\pi_v(g)$ pour toute place finie v de F et tout $g \in G_v$.*

(2) *$\tilde{E}^0$ engendre $\tilde{E}$ sur $\mathbb{C}$.*

(3) *Si (U) est vérifiée, on a l'égalité $\tilde{E} = \tilde{E}^0 \otimes_{\mathbb{Q}(\pi)} \mathbb{C}$.*

DÉMONSTRATION: Le (1) est évident. Posons $L = \mathbb{Q}(\pi)$. Soit R^0 un sous-L-espace de R vérifiant les conditions de la proposition I.3. Pour toute place finie v, soit E_v^0 un sous-L-espace de E_v vérifiant les conditions du lemme I.2.1, tel que pour presque toute place v, E_v^0 contient le vecteur "marqué" de E_v. Posons $E_f^0 = \otimes_{v \notin S} E_v^0$. Nous allons montrer la propriété suivante:
(V) soient $e_1, e_2 \in E_f^0$, $\varphi_1 = i(e_1 \otimes \tilde{e}_\infty)$, $\varphi_2 = i(e_2 \otimes \tilde{e}_\infty)$, (T_1, χ_1), (T_2, χ_2) deux couples vérifiant les conditions (T1), (T2), (T3). Supposons $I(\varphi_1, 1, T_1, \chi_1) \neq 0$, $I(\varphi_2, 1, T_2', \chi_2) \neq 0$. Alors

$$I(\varphi_1, 1, T_1, \chi_1) I(\varphi_2, 1, T_2, \chi_2)^{-1} \in L.$$

Le (2) en résulte. En effet, comme E_f^0 est stable par π_v pour toute place finie v, il résulte de (V) une propriété analogue où on introduit des éléments $g_1, g_2 \in G_f$. Alors ou bien pour tout $e_1 \in E_f^0$ et pour tout triplet (g_1, T_1, χ_1), on a $I(\varphi_1, g_1, T_1, \chi_1) = 0$, auquel cas $\tilde{E}^0 = \tilde{E}$. Ou bien il existe (e_1, g_1, T_1, χ_1) tel que $I(\varphi_1, g_1, T_1, \chi_1) \neq 0$. Quitte à multiplier i par une constante, on peut supposer $I(\varphi_1, g_1, T_1, \chi_1) = 1$. Alors d'après (V), pour tout $e_2 \in E_f^0$, et tout (g_2, T_2, χ_2), on a $I(\varphi_2, g_2, T_2, \chi_2) \in L$. Donc $\varphi_2 \in \tilde{E}^0$. D'où $i(E_f^0 \otimes \tilde{e}_\infty) \subset \tilde{E}^0$, et (2).

Fixons $e_1, T_1, \chi_1, e_2, T_2, \chi_2$, vérifiant les hypothèses de (V). Soit K un sous-groupe ouvert compact de G_f, de la forme $K = \prod_{v \notin S} K_v$, où K_v est un sous-groupe de G_v, assez petit pour vérifier le lemme I.6.1 et le lemme III.2.4 pour T_1 et T_2, tel que $e_1 \in E_f^K$, $e_2 \in E_f^K$, $\chi_1|_{T_f \cap K} = \chi_{2|T_f \in K} = 1$. Effectuons les constructions du I.6 relatives à K. En particulier il y a un isomorphisme

$$c : E_f^K \to H_\Gamma(E) \subset \bigoplus_{i \in I} H^t(\Gamma_i, R).$$

Introduisons le sous-L-espace $H_\Gamma(E)^0$ de $H_\Gamma(E)$. La proposition I.8.6 et l'assertion d'unicité du lemme I.2.2 montrent que, quitte à multiplier i par une constante, on peut supposer

$$c\left(\left(E_f^0\right)^K\right) = H_\Gamma(E)^0.$$

En particulier $c(e_1)$ et $c(e_2)$ sont représentés par des cocycles à valeurs dans R^0. Considérons pour simplifier le seul triplet $(e, T, \chi) = (e_1, T_1, \chi_1)$ et les formes linéaires D_j associées (cf. III.2). L'endomorphisme $r(m_j)$ préserve R^0, car m_j est l'image d'un élément de G_F. D'après le lemme III.1.5, $\tilde{\ell} \circ r(g_T^{-1})$ envoie R^0 dans $c(T)L$. Donc D_j envoie $H^t(\Gamma_{\iota(j)}, R^0)$ dans $c(T)L$. D'après la proposition III.4, il existe donc $\ell \in L$ tel que, pour $\varphi = \varphi_1$,

$$I(\varphi, 1, T, \chi) = p(T)^{-1} \operatorname{mes}(K_t/Z_f) c(T) \ell.$$

D'après les définitions, le lemme III.2.3, et la formule de produit, il existe $q \in \mathbb{Q}^x$ tel que

$$p(T)^{-1} \operatorname{mes}(K_T/Z_f) c(T) = cq,$$

où

$$c = |D_F|^{-1/2} \prod_{v \in S} |\tilde{\xi}|_v^{(2-h_v)/4}.$$

Quitte à diviser i par c, on obtient $I(\varphi_1, 1, T_1, \chi_1) \in L$. De même $I(\varphi_2, 1, T_2, \chi_2) \in L$, d'où (V).

Si (U) est vérifiée, il résulte de [W2] proposition 16 et théorème 4, qu'il existe un caractère quadratique $\omega = \otimes_v \omega_v$ de $\mathbb{A}^x/F^x$ tel que

(i) si $v \in S$, $\omega_v = 1$,

(ii) $L(\pi \otimes \omega, 1/2) \neq 0$,

où L est la fonction L habituelle. Fixons un tel caractère. D'après [W2] proposition 22, il résulte de (ii) qu'on peut trouver un soustore T de G, défini sur F, et vérifiant (T2), $\varphi \in E$ et $g \in G_{\mathbb{A}}$ tels que

$$\int_{T_F Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} \omega \circ \det(tg) \varphi(tg) \mathrm{d}t \neq 0.$$

Fixons un tel tore T. Soit v une place de F. On sait qu'il existe qu plus un espace de fonctions continues sur $T_v \backslash G_v$, stable par l'action de $\mathscr{H}_v$ agissant via les translations à droite, tel que la représentation de $\mathscr{H}_v$ dans cet espace soit équivalente à $\pi_v \otimes \omega_v$. Le résultat ci-dessus montre que cet espace existe pour tout v. D'après (i) et un calcul facile, cela implique d'abord que T vérifie (T1). Ensuite on peut supposer que pour toute place v, E_v est l'ensemble des fonctions $(\omega_v \circ \det) f$, quand f parcourt l'espace ci-dessus. Il existe alors $c \in \mathbb{C}^x$ tel que pour tous $e = \otimes_v e_v \in \otimes_v E_v$, $g = (g_v) \in G_{\mathbb{A}}$, on a, en posant $\varphi = i(e)$,

$$\int_{T_F Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} \omega \circ \det(tg) \varphi(tg) \mathrm{d}t = c \prod_v e_v(g_v) \omega_v \circ \det(g_v).$$

Si $v \in S$, une conjugaison par $g_{T,v}$ et le (ii) du lemme III.1.3 montrent que $\tilde{e}_v(g_{T,v}) \neq 0$. La relation ci-dessus et l'irréductibilité de π_v pour tout place finie v montrent alors que pour tout $\varphi \in \tilde{E}$, $\varphi \neq 0$, il existe $g \in G_f$ tel que

$$\int_{T_F Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} \omega \circ \det(tg) \varphi(tgg_T) \mathrm{d}t \neq 0,$$

d'où $I(\varphi, g, T, \chi) \neq 0$ pour $\chi = \omega \circ \det$. Remarquons que le couple (T, χ) vérifie les conditions (T1), (T2), (T3). On a le lemme élémentaire

LEMME III.5.2: *Soient M un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, L un sous-corps de $\mathbb{C}$, M^0 un sous-L-espace vectoriel de M. Supposons que pour tout $m \in M$, $m \neq 0$, il existe $f \in M^*$ tel que $f(m) \neq 0$ et $f(M^0) \subset L$. Alors l'application naturelle $M^0 \underset{L}{\otimes} \mathbb{C} \to M$ est injective.* □

Par définition, les applications $\varphi \mapsto I(\varphi, g, T, \chi)$ envoient $\tilde{E}^0$ dans $\mathbb{Q}(\pi)$. Le résultat ci-dessus et le lemme montrent que l'application $\tilde{E}^0 \otimes_{\mathbb{Q}(\pi)} \mathbb{C} \to \tilde{E}$ est injective, donc (3) résulte de (2). □

REMARQUES: (1) Si T ne vérifie pas (T1), alors pour tout χ vérifiant (T3), tous $\varphi \in E$, $g \in G_{\mathbb{A}}$,

$$\int_{T_F Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} \chi(t) \varphi(tg) \mathrm{d}t = 0.$$

(2) La condition (T2) est probablement superflue.

Bibliographie

[B1] A. BOREL: Cohomology of Arithmetic Groups. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vancouver (1974) pp. 435–442.

[B2] A. BOREL: *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris (1969).

[D] P. DELIGNE: Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, in Automorphic Forms, Representations and L-Functions, *Proceedings of Symposia in Pure Math.* XXXIII, Part 2, AMS 1979, pp. 313–346.

[H] G. HARDER: General aspects in the theory of modular symbols, preprint.

[JL] H. JACQUET et R.P. LANGLANDS: Automorphic Forms on GL(2), *Springer Lecture Notes* 114, Berlin-Heidelberg-New-York (1970).

[L] R.P. LANGLANDS: Modular forms and ℓ-adic representations, in Modular Functions of One Variable II, *Springer Lecture Notes* 349, *Berlin-Heidelberg-New-York* (1973) *pp*. 361–500.

[S1] J-P. SERRE: Cohomologie des groupes discrets, in Prospects in Mathematics, *Annals of Math. Studies* 70, Princeton (1971) 77–169.

[S2] J-P. SERRE: *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris (1967).

[Sh] G. SHIMURA: Une bonne part de l'oeuvre de Shimura depuis 15 ans et consacrée au développement de la théorie que nous occupe ici, et à ses multiples applications arithmétiques. Il faudrait citer ici la plupart des articles qu'il a publiés. Contentons-nous de donner la référence fondamentale [Sh1] et celle, plus récente, [Sh2] où il développe une théorie analogue à celle de notre troisième chapitre.

[Sh1] G. SHIMURA: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, *Publ. of the Math. Soc. of Japan* 11 (1971).

[Sh2] G. SHIMURA: The periods of certain automorphic forms of arithmetic type, *Jour. of the Fac. of Sc. Tokyo* 28 (1982) 605–632.

[W1] J-L. WALDSPURGER: Correspondance de Shimura, *J. Math. pures et appliquées* 59 (1980) 1–133.

[W2] J-L. WALDSPURGER: Correspondances de Shimura et quaternions, non publié.

Citons également:

A. ROBERT: Modular Representations of the Group GL(2) over a local Field, *J. of Algebra* 22 (1972) 386–405.

C. SOULE: Cohomologie des groupes discrets et formes automorphes, in Variétés de Shimura et Fonctions L, par L. Breen, J-P. Labesse, *Publ. Math. de l'Univ. Paris VII, Paris* (1979) p. 131–143.

(Oblatum 22-VII-1983)

10, rue Baudoin
75013 Paris
France