

# COMPOSITIO MATHEMATICA

Z. MEBKHOUT

## Une équivalence de catégories

*Compositio Mathematica*, tome 51, n° 1 (1984), p. 51-62

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1984\\_\\_51\\_1\\_51\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1984__51_1_51_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE ÉQUIVALENCE DE CATÉGORIES

Z. Mebkhout

### Sommaire

§ 1. Introduction . . . . .	51
§ 2. Régularité et dualité . . . . .	52
§ 3. Énoncé des théorèmes . . . . .	53
§ 4. Démonstration du Théorème 3.1 . . . . .	55
Bibliographie . . . . .	61

### § 1. Introduction

On démontre que les faisceaux  $Ext_{\mathbf{C}_X}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$  sont des systèmes différentiels d'ordre infini si  $\mathcal{F}$  est un faisceau  $\mathbf{C}_X$ -analytiquement constructible sur une variété analytique complexe lisse  $X$ . Compte tenu des théorèmes de *dualité* locale pour les systèmes différentiels, ceci établit l'*équivalence de catégories* entre la catégorie dérivée des complexes constructibles et la catégorie des complexes bornés de  $\mathcal{D}_X^\infty$ -modules à cohomologie holonome. Cela ne résulte pas tout à fait par *dévisage* au cas où  $\mathcal{F}$  est le faisceau caractéristique d'un espace analytique fermé de  $X$ . Faute de disposer de "localisation étale" pour rendre *constants* des faisceaux *localement constants*, il nous faut utiliser la résolution des singularités comme *J.L. Verdier* [11], dont nous suivons la démonstration, qui établit que les faisceaux  $Ext_{\mathbf{C}_X}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  sont constructibles si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des faisceaux constructibles sur un *espace analytique complexe*. Les autres ingrédients sont le théorème de *comparaison* locale de [9], l'extension canonique d'une connexion de *P. Deligne* [1], la *régularité* des systèmes holonomes, le théorème d'images directes des  $\mathcal{D}_X$ -modules holonomes sous la condition d'existence de filtrations globales de *M. Kashiwara* [5] et on invoque enfin le théorème de *Grauert-Remmert* comme *A. Grothendieck* [2] pour conserver la *régularité* par un morphisme projectif.

Nous obtenons en fait que tout faisceau constructible est *localement* solution d'un système holonome d'ordre fini *régulier*, mais nous n'avons pas examiné la globalisation. L'équivalence établie fournit donc un dictionnaire entre énoncés *géométriques* concernant les faisceaux constructibles et énoncés *analytiques* concernant les systèmes différentiels. Un exemple est la dualité de *Poincaré-Verdier* qui trouve son analogue dans la dualité pour les systèmes différentiels (cf. [10], Chap. IV) qui a été notre motivation initiale. Nous verrons un autre exemple concernant la

connexion de *Gauss-Manin* d'une singularité. Nous utilisons les notations suivantes:

- $(X, \mathcal{O}_X)$  : variété analytique complexe lisse de dimension  $n$ .  
 $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}$  : faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini sur  $X$ .  
 $\mathcal{D}_X^\infty = \mathcal{D}^\infty$  : faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini sur  $X$ .  
 $D(\mathcal{D})_h$  : catégorie dérivée des complexes bornés de  $\mathcal{D}$ -modules à gauche à cohomologie holonome.  
 $D(\mathcal{D}^\infty)_h$  : catégorie dérivée des complexes bornés de  $\mathcal{D}^\infty$ -modules à gauche à cohomologie holonome.  
 $D(\mathbf{C}_X)_c$  : catégorie dérivée des complexes  $\mathbf{C}$ -analytiquement constructibles.  
 $\mathfrak{M}$  : objet de  $D(\mathcal{D})_h$ .  
 $\mathfrak{M}^\infty$  : objet de  $D(\mathcal{D}^\infty)_h$ .  
 $\mathcal{F}$  : objet de  $D(\mathbf{C}_X)_c$ .  
 $\Omega_X = \Omega$  : faisceaux des  $n$ -formes holomorphes.  
 $DR(\mathfrak{M}^\infty)$  : complexe de De Rham de  $\mathfrak{M}^\infty$  qui est égal par définition à  $\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathcal{O}^\infty}(\mathcal{O}_X, \mathfrak{M}^\infty)$ .  
 $Y$  : espace analytique fermé de  $X$  défini par un idéal  $\mathcal{I}_Y$ .  
 $\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathfrak{M})$  : cohomologie locale algébrique à valeur dans  $\mathfrak{M}$  qui est égale par définition à  $\mathbf{R} \lim_{\substack{\rightarrow \\ k}} \operatorname{hom}_{\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k}(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_X)$ . C'est un objet de  $D(\mathcal{D})$  [9].  
 $\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathfrak{M}^\infty)$  : cohomologie locale analytique à valeur dans  $\mathfrak{M}^\infty$ . C'est un objet de  $D(\mathcal{D}^\infty)$ .  
 $\mathcal{O}_{X|Y}$  : complété formel de  $\mathcal{O}_X$  le long de  $Y$  égal à  $\lim_{\substack{\leftarrow \\ k}} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k$ . C'est un  $\mathcal{D}_X$ -module à gauche.

Pour les définitions qui peuvent manquer, nous renvoyons le lecteur à [5] par exemple. Pour démontrer le théorème principal, on dévise le complexe  $\mathcal{F}$ . Et on utilise les conditions (a), (b) et (c) ci-dessous introduites dans [9] dans le cas particulier du faisceau caractéristique  $\mathbf{C}_Y$  d'un sous-espace analytique complexe de  $X$ .

## § 2. Régularité et dualité

On rappelle ([10], Chap. III, prop. 3.3) que les conditions (a), (b) et (c) suivantes sont équivalentes:

- (a) L'homomorphisme canonique  $DR(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathfrak{M})) \rightarrow DR(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathfrak{M}))$  est un isomorphisme dans  $D(\mathbf{C}_X)_c$ .  
 (b) On a un isomorphisme canonique dans  $D(\mathbf{C}_X)_c$ :

$$\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathcal{O}}(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathfrak{M}), \mathcal{O}_X) \simeq \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}_Y.$$

- (c) L'homomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\Gamma_Y\left(\mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathfrak{M}\right) \leftarrow \mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathfrak{M})$$

est un isomorphisme dans  $D(\mathfrak{D}^\infty)_h$ .

La condition (a) est *covariante*. Compte tenu de la proposition 6.20 de *P. Deligne* [1], elle est équivalente à la régularité de  $\mathfrak{N}$  le long de  $Y$  pour une *connexion*.

La condition (b) est *contravariante*. Compte tenu du théorème de *B. Malgrange* (théorème 1.4 de [7]) et de l'isomorphisme (cf. [10], Chap. II, prop. 6.1)

$$\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{R}\Gamma_{|Y|}(\mathfrak{N}), \mathfrak{O}_X) \simeq \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{O}_{X|Y}^\wedge),$$

elle est équivalente à la régularité du système  $\mathfrak{N}$  si  $X$  est une surface de *Riemann*.

La condition (c) est un isomorphisme entre *systèmes différentiels* alors que les conditions (a) et (b) sont des isomorphismes entre complexes *constructibles*. Pour le système de De Rham,  $\mathfrak{N} = \mathfrak{O}_X$ , ces conditions sont établies sous cette forme dans [9].

La condition (b) est le théorème 1.1, la condition (c) est le théorème 1.2, et la condition (a) est le théorème 3.1 qui résulte essentiellement du théorème de comparaison de *A. Grothendieck* [2]. L'équivalence, dans le cas général, résulte des théorèmes de *dualité* locale ([10], Chap. III).

### §3. Énoncé des théorèmes

Soit  $\mathfrak{F}$  un complexe de  $D(\mathbf{C}_X)_c$ . La structure de  $\mathfrak{D}^\infty$ -modules à gauche de  $\mathfrak{O}_X$  munit le complexe  $\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X)$  d'une structure de complexe de  $\mathfrak{D}^\infty$ -modules à gauche.

**THÉORÈME 3.1:** *Le complexe  $\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X)$  appartient à  $D(\mathfrak{D}^\infty)_h$ .*

Par le théorème de *M. Kashiwara* [4] et le théorème 3.1, on dispose alors de deux foncteurs:

$$\mathbf{F}: D(\mathfrak{D}^\infty)_h \rightarrow D(\mathbf{C}_X)_c$$

$$\mathbf{F}(\mathfrak{N}^\infty) = \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathfrak{D}^\infty}(\mathfrak{N}^\infty, \mathfrak{O}_X)$$

$$\mathbf{G}: D(\mathbf{C}_X)_c \rightarrow D(\mathfrak{D}^\infty)_h$$

$$\mathbf{G}(\mathfrak{F}) = \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X).$$

**PROPOSITION 3.2:** *Les foncteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont inverses l'un de l'autre et établissent une équivalence de catégorie entre  $D(\mathfrak{D}^\infty)_h$  et  $D(\mathbf{C}_X)_c$ .*

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2:** Il nous faut montrer que le foncteur composé  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$  est isomorphe au foncteur identique de  $D(\mathfrak{D}^\infty)_h$ ,

ou que le morphisme canonique

$$\mathfrak{N}^\infty \rightarrow \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathfrak{O}^\infty}(\mathfrak{N}^\infty, \mathfrak{O}_X), \mathfrak{O}_X)$$

est un isomorphisme dans  $D(\mathfrak{O}^\infty)_h$ . Mais c'est le théorème de *bidualité* locale:  $\mathfrak{O}_X$  est "dualisant" dans  $D(\mathfrak{O}^\infty)_h$ , ([10], Chap. III, théorème 2.1).

Montrons que le foncteur  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  est isomorphe au foncteur identique de  $D(\mathbf{C}_X)_c$ : on a l'isomorphisme suivant ([10], Chap. I):

$$\begin{aligned} DR(\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X)) &= \Omega \overset{L}{\otimes}_{\mathfrak{O}^\infty} \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X)[-n] \\ &\simeq \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X} \left( \mathfrak{F}, \Omega \overset{L}{\otimes}_{\mathfrak{O}^\infty} \mathfrak{O}_X \right)[-n] \\ &\simeq \mathbf{R} \operatorname{hom}(\mathfrak{F}, \mathbf{C}_X). \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme résulte du lemme de *Poincaré*. Mais  $\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X)$  appartient à  $D(\mathfrak{O}^\infty)_h$  en vertu du théorème 3.1. Par le théorème de *dualité* locale ([10], Chap. III, théorème 1.1):

$$\begin{aligned} &\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathfrak{O}^\infty}(\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X), \mathfrak{O}_X) \\ &\simeq \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(DR(\mathbf{R} \operatorname{hom}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X)), \mathbf{C}_X) \\ &\simeq \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathbf{C}_X), \mathbf{C}_X) \\ &\simeq \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme résulte du fait que le faisceau constant  $\mathbf{C}_X$  est "dualisant" dans  $D(\mathbf{C}_X)_c$  [11]. Donc le foncteur  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  est isomorphe au foncteur identique de  $D(\mathbf{C}_X)_c$ . D'où la proposition 3.2.

On déduit par exemple, de la proposition 3.2 la proposition suivante:

**PROPOSITION 3.3:** *La fibre du faisceau  $\operatorname{hom}_{\mathfrak{O}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$  en tout point de  $X$  est un espace vectoriel complexe de dimension finie si  $\mathfrak{N}$  et  $\mathfrak{N}$  sont des  $\mathfrak{D}$ -modules holonomes.*

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.3:** Pour tout point  $x$  de  $X$  l'homomorphisme

$$\operatorname{hom}_{\mathfrak{O}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})_x \rightarrow \operatorname{hom}_{\mathfrak{O}^\infty} \left( \mathfrak{O}^\infty \overset{\otimes}{\underset{\mathfrak{O}}{\mathfrak{N}}}, \mathfrak{O}^\infty \overset{\otimes}{\underset{\mathfrak{O}}{\mathfrak{N}}} \right)_x$$

est injective parce que  $\mathfrak{O}^\infty$  est fidèlement plat sur  $\mathfrak{O}$ . En vertu de la

ou que le morphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathfrak{O}^\infty} \left( \mathfrak{D}^\infty \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{M}, \mathfrak{D}^\infty \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{N} \right) &= \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathfrak{O}^\infty} (\mathfrak{M}^\infty, \mathfrak{N}^\infty) \\ &\simeq \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X} (\mathbf{F}(\mathfrak{N}^\infty), \mathbf{F}(\mathfrak{M}^\infty)). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\operatorname{Ext}'_{\mathfrak{O}^\infty}(\mathfrak{M}^\infty, \mathfrak{N}^\infty)$  est un faisceau constructible en vertu de [11] (les  $\operatorname{Ext}'_{\mathbf{C}_X}$  de faisceaux constructibles sont constructibles) et sa fibre en tout point de  $X$  est un espace vectoriel complexe de dimension fini. D'où la proposition 3.3. On trouve en particulier que si  $x$  est un point de  $X$  les endomorphismes  $\mathfrak{D}_x$  linéaires de  $\mathfrak{N}_x$  est un espace vectoriel complexe de dimension fini si  $\mathfrak{N}$  est un système holonome. Ce résultat a été utilisé dans [5].

Il nous reste à établir le théorème 3.1. La démonstration de ce théorème se fait en trois étapes.

#### § 4. Démonstration du théorème 3.1

##### 4.1. 1ère étape – Réduction de $D(\mathfrak{D}^\infty)_h$ à $D(\mathfrak{D})_h$

Il nous faut montrer que le complexe  $\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_X)$  appartient à  $D(\mathfrak{D}^\infty)_h$ . Les catégories  $D(\mathfrak{D}^\infty)_h^{(1)}$  et  $D(\mathbf{C}_X)_c$  sont triangulées. On peut supposer que  $\mathfrak{F}$  est un faisceau constructible. Le problème est local sur  $X$ . On peut supposer que  $\mathfrak{F}$  est localement constant constructible sur un ouvert lisse connexe  $W$  d'un fermé analytique  $Y$  de  $X$  tel que le complémentaire  $Z = Y \setminus W$  est un fermé analytique de  $Y$  et nul en dehors de  $W$ . Notons  $j: W \rightarrow Y$ ,  $\alpha: Y \rightarrow X$ ,  $\beta = \alpha \circ j: W \rightarrow X$ , et  $\gamma: V \rightarrow X$  les inclusions canoniques si  $V$  est le complémentaire de  $Z$  dans  $X$ .

On a alors

$$\mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_X) = \alpha_* \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_Y}(\alpha^{-1}\mathfrak{F}, \alpha^{-1}\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)).$$

Mais  $\alpha^{-1}\mathfrak{F}$  est égal à  $\mathbf{R}j_*j^{-1}\alpha^{-1}\mathfrak{F}$ . On a par dualité:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_X) &= \alpha_* \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_Y}(\mathbf{R}j_*j^{-1}\alpha^{-1}\mathfrak{F}, \alpha^{-1}\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)) \\ &\simeq \alpha_* \mathbf{R}j_* \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbf{C}_W}(j^{-1}\alpha^{-1}\mathfrak{F}, j^{-1}\alpha^{-1}\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)) \\ &\simeq \alpha_* \mathbf{R}j_* \left( j^{-1}\alpha^{-1}\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{L} \right) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}$  est égal au faisceau localement constant constructible sur  $W$ ,  $\mathbf{R}$

(1) Voir la remarque 1.5.1 de l'article qui suit.

$\text{hom}_{\mathbf{C}_W}(j^{-1}\alpha^{-1}\mathcal{F}, \mathbf{C}_W)$ . On a

$$\mathbf{R} \text{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{R}\beta_*\beta^{-1}\left(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \beta_!\mathcal{L}\right).$$

Mais  $\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \beta_!\mathcal{L}$  est à support contenu dans  $Y$  et on a

$$\mathbf{R} \text{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\left(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \beta_!\mathcal{L}\right).$$

Faute de disposer de  $\mathcal{D}_Y$ -modules si  $Y$  est singulier, on ne peut pas travailler sur  $Y$  comme dans [11]. On est donc obligé de rester sur  $X$ .

Mais, en vertu du théorème de *comparaison* locale du chapitre II (théorème 1.3), on a

$$\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X).$$

Soit

$$\mathbf{R} \text{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\left(\mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \beta_!\mathcal{L}\right).$$

Pour démontrer le théorème 3.1, il suffit de montrer que le complexe

$$\gamma^{-1}\left(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \beta_!\mathcal{L}\right)$$

de  $\mathcal{D}_Y$ -modules à cohomologie holonome se prolonge en un complexe  $\mathcal{N}$  de  $D(\mathcal{D})_h$  régulier le long de  $Z$ . En effet, la condition (c) du paragraphe 2 nous donne les isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \text{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) &\simeq \mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\left(\mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}} \beta_!\mathcal{L}\right) \\ &\simeq \mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\left(\mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\right) \\ &\simeq \mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} \mathbf{R} \lim_{\substack{\rightarrow \\ k}} \text{hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Z^k, \mathcal{N}) \end{aligned}$$

Mais le complexe  $\mathbf{R} \lim_{\substack{\rightarrow \\ k}} \text{hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Z^k, \mathcal{N})$  appartient à  $D(\mathcal{D})_h$  [9] et  $\mathbf{R} \text{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$  appartient à  $D(\mathcal{D}^\infty)_h$ . D'où le théorème 3.1.

#### 4.2. 2ème étape – Résolution des singularités de $Y$

On peut trouver [3] (le problème est local sur  $Y$ ) un morphisme projectif

$\pi$  de variétés analytiques complexes qui soit un isomorphisme hors de  $Z$ :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \supset \tilde{Y} \supset \tilde{Z} \\ \pi \downarrow & \downarrow \pi_Y \downarrow & \\ X \supset Y \supset Z \end{array}$$

tel que:

$\tilde{Y}$  soit le transformé strict de  $Y$  par  $\pi$ ,

$\tilde{Z} = \pi_Y^{-1}(Z)$  est un diviseur à croisements normaux dans  $\tilde{Y}$ .

C'est de cette façon qu'on résout localement les singularités d'un espace analytique complexe  $Y$ ,  $X$  jouant le rôle d'espace *ambient lisse* [3]. Notons

$$\tilde{j}: \tilde{W} = \pi^{-1}(W) \rightarrow \tilde{Y}, \tilde{\alpha}: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}, \tilde{\beta}: \tilde{Z} \rightarrow \tilde{X} \text{ et } \tilde{\gamma}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{X}$$

les inclusions canoniques.

La restriction  $\tilde{\mathcal{L}}$  de  $\pi^{-1}\beta_!\mathcal{L}$  à  $\tilde{W}$  est un faisceau localement constant constructible. On a donc une variété *lisse*  $\tilde{Y}$  et une connexion  $\mathcal{O}_{\tilde{W}} \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{\mathcal{L}}$  sur  $\tilde{W}$  complémentaire d'un diviseur à croisements normaux. C'est la situation de *P. Deligne* [1]. En vertu du théorème *d'existence* de [1], cette connexion se prolonge en une *connexion* méromorphe régulière le long de  $\tilde{Z}$ . Nous allons rappeler la construction de cette *connexion canonique* pour l'adapter au langage des  $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ -modules et en voir les propriétés. Nous suivons l'exposé de *N. Katz* [6].

Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\tilde{Y}$  où sont définies des coordonnées locales  $y_1, \dots, y_p$ ; ( $p = \text{codim } \tilde{Y}$ ) telles que  $y_j = 0$  ( $j = 1, \dots, r$ ;  $r \leq p$ ) sont les branches du diviseur  $\tilde{Z}$ . La restriction de  $\tilde{\mathcal{L}}$  à  $U \cap \tilde{W}$  est un faisceau localement constant constructible et correspond *donc* à une représentation du groupe fondamental  $\pi_1(U \cap \tilde{W})$  dans la fibre  $E$  en un point de  $U \cap \tilde{W}$ . Mais le groupe  $\pi_1(U \cap \tilde{W})$  est commutatif engendré par  $r$  générateurs  $\gamma_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) correspondant chacun au lacet autour de la branche  $y_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, r$ . La représentation  $\rho$  est donc déterminée par les automorphismes  $\rho(\gamma_j)$ ,  $j = 1, \dots, r$  de  $E$ . On peut d'autre part trouver des endomorphismes  $B_j$  de  $E$  tels que:

- $\exp(2\pi i B_j) = \rho(\gamma_j)$ ,  $j = 1, \dots, r$ ;
- les endomorphismes  $B_j$  commutent mutuellement entre eux;
- $0 \leq \text{Re } \lambda < 1$  si  $\lambda$  une valeur propre de  $B_j$ .

Ces données permettent de construire l'extension canonique en munissant

$$\mathcal{U} = \varinjlim_k \text{hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{Y}}}(\mathcal{G}_{\tilde{Z}}^k, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) \otimes_{\mathbb{C}} E$$



de la structure de  $\mathcal{D}_{\tilde{\gamma}}$ -modules définie de la façon suivante:

$$\xi(f \otimes e) = \xi(f) \otimes e - f \left( \sum_{i=1}^r \frac{\xi(y_i)}{y_i} \otimes B_i e \right)$$

si  $\xi$  est un champ de vecteur sur  $\tilde{Y}$ ,  $f$  une fonction méromorphe ayant des pôles le long de  $\tilde{Z}$  et  $e$  un vecteur de  $E$ . Ces constructions locales se *recollent* [1] pour donner une structure globale de  $\mathcal{D}_{\tilde{\gamma}}$ -module holonome à gauche sur  $\tilde{\mathcal{U}}$ . On peut voir que la variété caractéristique de  $\tilde{\mathcal{U}}$  est définie localement dans  $T^*\tilde{Y}$  par

$$y_1 \eta_1 = \dots = \eta_r y_r = \eta_{r+1} \dots = \eta_p = 0$$

où  $\eta_1, \dots, \eta_p$  sont les coordonnées cotangentes duales de  $y_1, \dots, y_r$ . De plus,  $\tilde{\mathcal{U}}$  est régulier le long de  $\tilde{Z}$  en ce sens que l'on a l'isomorphisme (cf. proposition 6.20 de [1]):

$$DR(\tilde{\mathcal{U}}) \simeq DR(\mathbf{R}\tilde{j}_*^{-1}\tilde{\mathcal{U}})$$

qui correspond à la condition a) du paragraphe 2.

Observons que le  $\mathcal{O}_{\tilde{\gamma}}$ -module  $\tilde{\mathcal{U}}$  admet une *filtration* (bonne) *globale* par des  $\mathcal{O}_{\tilde{\gamma}}$ -modules libres de type fini.

L'extension *canonique*  $\tilde{\mathcal{U}}$  est un  $\mathcal{D}_{\tilde{\gamma}}$ -module mais nous en cherchons un *prolongement* en tant que  $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -module. Posons

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathbf{R}\tilde{\alpha}_* \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{\gamma}}} \tilde{\mathcal{U}}[-p] = \tilde{\alpha}_* \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{\gamma}}} \tilde{\mathcal{U}}[-p].$$

Pour la définition de  $\mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}}$ , voir ([10], Chap. I) ou [5]. Le  $\mathcal{D}_{\tilde{\gamma}}$ -module  $\mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}}$  est plat parce que  $\tilde{\alpha}: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  soit une immersion. Le  $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -module  $\tilde{\mathcal{U}}$  est holonome. Il faut voir qu'il prolonge à  $\tilde{X}$  le  $\mathcal{D}_{\tilde{\gamma}}$ -module

$$\tilde{\gamma}^{-1} \left( \mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Y}]}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{\beta}_! \tilde{L} \right) = \pi^{-1} \left( \gamma^{-1} \left( \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbb{C}} \beta_! L \right) \right).$$

Ceci résulte du lemme suivant.

**LEMMA 4.2.1:** *On a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -module:*

$$\tilde{\alpha}_* \left( \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{\gamma}}} \mathcal{O}_{\tilde{\gamma}} \right) \simeq \mathbb{B}_{\tilde{Y}|X} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Y}]}(\mathcal{O}_{\tilde{X}})[p].$$

La démonstration de ce lemme se fait par un calcul local direct (tout est lisse) et nous la laissons au lecteur. En tensorisant par  $\tilde{\beta}_! \tilde{L}$  l'isomorphisme du lemme 4.2.1, on voit que  $\tilde{\mathcal{U}}$  prolonge  $\gamma^{-1}(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{\gamma}}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{\beta}_! \tilde{L})$ .

De la même façon, on peut voir que  $\check{\mathfrak{N}}$  est régulier le long de  $\check{Z}$  parce que  $\check{\beta}: \check{Z} \rightarrow \check{Y} \rightarrow \check{X}$  est une immersion. En fait, cela résultera aussi de la conservation de la régularité par morphisme projectif qui sera établi au théorème 4.3.1.

### 4.3. 3ème étape – Images directes de $\check{\mathfrak{N}}$

Posons

$$\mathfrak{N} = \mathbf{R}\pi_* \mathfrak{D}_{X \leftarrow \check{X}} \otimes_{\mathfrak{D}_{\check{X}}}^L \check{\mathfrak{N}} \stackrel{\text{Déf}}{=} \int_{\pi} \check{\mathfrak{N}}.$$

Il est clair que  $\mathfrak{N}$  est un prolongement de  $\gamma^{-1}(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathfrak{O}_X) \otimes_{\mathbb{C}} \beta_! \mathcal{L})$ . Il nous reste à voir qu'il appartient à  $D(\mathfrak{D})_h$  et qu'il est *régulier* le long de  $Z$ .

Mais, pour tout morphisme de variétés analytiques complexes lisses  $f: T_2 \rightarrow T_1$ , on a l'isomorphisme:

$$\mathfrak{D}_{T_1 \leftarrow T_2} \simeq f^{-1} \left( \mathfrak{D}_{T_1} \otimes_{\mathfrak{O}_{T_1}} \check{\Omega}_{T_1} \right) \otimes_{f^{-1} \mathfrak{O}_{T_1}} \Omega_{T_2}.$$

Si  $\check{\Omega}_{T_1}$  est le dual  $\text{hom}_{\mathfrak{O}_{T_1}}(\Omega_{T_1}, \mathfrak{O}_{T_1})$  de  $\Omega_{T_1}$ . La formule de *projection* appliquée à l'immersion  $\check{\alpha}$  donne l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{X \leftarrow \check{X}} \otimes_{\mathfrak{D}_{\check{X}}}^L \check{\alpha}_* \mathfrak{D}_{\check{X} \leftarrow \check{Y}} &= \check{\alpha}^{-1}(\mathfrak{D}_{X \leftarrow \check{X}}) \otimes_{\check{\alpha}^{-1} \mathfrak{D}_{\check{X}}}^L \mathfrak{D}_{\check{X} \leftarrow \check{Y}} \\ &= \mathfrak{D}_{X \leftarrow \check{Y}}. \end{aligned}$$

On a alors  $\mathfrak{N} = \int_{\pi} \check{\mathfrak{N}} = \int_{\pi \circ \check{\alpha}} \check{\mathfrak{N}}[-p]$ .

Mais  $\check{\mathfrak{N}}$  admet *globalement* une bonne filtration sur  $\check{Y}$ , il en résulte, en vertu du théorème [5] d'images directes appliqué au morphisme projectif  $\pi \circ \check{\alpha}$ , que  $\mathfrak{N}$  appartient à  $D(\mathfrak{D})_h$ . Il reste à montrer que  $\mathfrak{N}$  est régulier le long de  $Z$ .

**THÉORÈME 4.3.1:** *L'homomorphisme canonique*

$$DR(\mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathfrak{N})) \rightarrow DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathfrak{N}))$$

*est un isomorphisme dans  $D(\mathbb{C}_X)_c$ .*

Le théorème 4.3.1 achève la construction du “prolongement”  $\mathfrak{N}$  et donc la démonstration du théorème 3.1.

Pour montrer le théorème 4.3.1, on montre la proposition suivante:

**PROPOSITION 4.3.2:** *Pour tout morphisme propre  $f: T_1 \rightarrow T_2$  de variété analytique complexe et tout  $\mathbb{D}_{T_1}$ -module à gauche  $\mathcal{U}$ , on a un isomorphisme canonique:*

$$\mathbf{R}f_* DR(\mathcal{U}) \simeq DR\left(\int_f \mathcal{U}\right)[\dim T_2 - \dim T_1].$$

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.3.2:** On rappelle que l'on a l'isomorphisme suivant (cf. chapitre I):

$$DR\left(\int_f \mathcal{U}\right) = \Omega_{T_2} \otimes_{\mathbb{D}_{T_2}}^L \int_f \mathcal{U}[-\dim T_2].$$

La formule de *projection* appliquée au morphisme propre  $f$  et au  $\mathbb{D}_{T_2}$ -module  $\Omega_{T_2}$  à droite *cohérent* donne l'isomorphisme:

$$DR\left(\int_f \mathcal{U}\right)[\dim T_2] = \mathbf{R}f_* \left( f^{-1}(\Omega_{T_2}) \otimes_{f^{-1}\mathbb{D}_{T_2}}^L \mathbb{D}_{T_2 \leftarrow T_1} \otimes_{\mathbb{D}_{T_1}}^L \mathcal{U} \right).$$

Mais  $f^{-1}(\Omega_{T_2}) \otimes_{f^{-1}\mathbb{D}_{T_2}}^L \mathbb{D}_{T_2 \leftarrow T_1}$  est isomorphe à  $\Omega_{T_1}$ . Finalement, on obtient

$$DR\left(\int_f \mathcal{U}\right)[\dim T_2] \simeq \mathbf{R}f_* \left( \Omega_{T_1} \otimes_{\mathbb{D}_{T_1}}^L \mathcal{U} \right) \simeq DR(\mathcal{U})[\dim T_1].$$

D'où la proposition 4.3.2.

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.3.1:** Nous allons d'abord construire un isomorphisme

$$\mathbf{R}\pi_* DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\tilde{\mathcal{U}})) \simeq DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathcal{U})).$$

On a:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\pi_* DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\tilde{\mathcal{U}})) &\stackrel{\text{Déf}}{=} \mathbf{R}\pi_* \mathbf{R} \operatorname{hom}_{\mathbb{D}_{\tilde{X}}}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}, \mathbf{R}\Gamma_Z(\tilde{\mathcal{U}})) \\ &\simeq \mathbf{R}\pi_* \mathbf{R}\Gamma_Z(DR(\tilde{\mathcal{U}})) \\ &\simeq \mathbf{R}\Gamma_Z(\mathbf{R}\pi_* DR(\tilde{\mathcal{U}})). \end{aligned}$$

Mais, en vertu de la proposition 4.3.1 appliquée au morphisme  $\pi$ , on a:

$$\mathbf{R}\pi_*(DR(\tilde{\mathcal{U}})) \simeq DR\left(\int_{\pi} \tilde{\mathcal{U}}\right) = DR(\mathcal{U}).$$

On obtient finalement:

$$\mathbf{R}\pi_* DR(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}(\mathfrak{N})) \simeq \mathbf{R}\Gamma_Z(DR(\mathfrak{N})) \simeq DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathfrak{N})).$$

D'où l'isomorphisme cherché.

De même, en raisonnant algébriquement sur les fibres du morphisme projectif, et en invoquant le théorème de *Grauert-Remmert* comme *Grothendieck* dans [2] (note  $n^07$  page 99), on construit l'isomorphisme *algébrique* analogue à l'isomorphisme analytique précédent:

$$\mathbf{R}\pi_* DR(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}_1}(\mathfrak{N})) \simeq DR(\mathbf{R}\Gamma_{Z_1}(\mathfrak{N})).$$

Le fait que le  $\mathfrak{D}_{\tilde{\gamma}}$ -module  $\mathfrak{N}$  est régulier le long de  $\tilde{Z}$  exprime qu'il est *algébrisable* le long des fibres de  $\pi \circ \tilde{\alpha}$ .

Le complexe  $DR(\mathfrak{N})$  est formé de  $\mathfrak{O}_{\tilde{\gamma}}$ -modules limites inductives, de  $\mathfrak{O}_{\tilde{\gamma}}$ -modules libres de type fini. On est exactement dans la situation de *Grothendieck* [2].

Finalement, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\pi_* DR(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}_1}(\mathfrak{N})) & \rightarrow & \mathbf{R}\pi_* DR(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}(\mathfrak{N})) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ DR(\mathbf{R}\Gamma_{Z_1}(\mathfrak{N})) & \rightarrow & DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathfrak{N})). \end{array}$$

L'isomorphisme de la première ligne dans  $D(\mathbf{C}_{\tilde{X}})_c$  correspondant à la régularité de  $\mathfrak{N}$  le long de  $\tilde{Z}$  nous donne l'isomorphisme dans  $D(\mathbf{C}_X)_c$  de la deuxième ligne. D'où le théorème 4.2.1.

## Bibliographie

- [1] P. DELIGNE: Equations différentielles à points singuliers réguliers. *Lecture Notes in Mathematics. 163*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1970).
- [2] A. GORTHENDIECK: On the De Rham cohomology of algebraic varieties. *Publ. Math. I.H.E.S.* 29 (1966) 95–103.
- [3] H. HIRONAKA: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I-II. *Ann. Math.* 1 et 2 (1964).
- [4] M. KASHIWARA: On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I. *Publ. R.I.M.S. Kyoto University* 10 (1975) 563–579.
- [5] M. KASHIWARA: B-functions and holonomic systems. *Invent. Math.* 38 (1976) 33–53.
- [6] N. KATZ: An overview of Deligne's work in Hilbert's twenty-first problem. *Proceeding of symposia in Pure Mathematics A.M.S., volume 28* (1976) 537–557.
- [7] B. MALGRANGE: Sur les point singuliers des équations différentielles. *Enseignement Math.* 20 (1974) 147–176.
- [8] B. MALGRANGE: Le polynôme de I.N. Bernstein d'une singularité isolée. *Lecture Notes in Mathematics. 459*, pp. 99–119, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1976).
- [9] Z. MEBKHOUT: Local cohomology of analytic spaces. *Publ. R.I.M.S. Kyoto University* 12 (1977) 247–256 (suppl.).

- [10] Z. MEBKHOUT: Cohomologie locale des espaces analytiques complexes. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VII, 126 pages (1979).
- [11] J.L. VERDIER: Classe d'homologie associée à un cycle. Séminaire Douady-Verdier. *Astérisque* 36–37 (1976) 101–151.

(Oblatum 10-VI-1981)

V.E.R. de Mathématiques  
Université de Paris VII  
2 place Jussieu  
75221 Paris  
France