

COMPOSITIO MATHEMATICA

AZIZ EL KACIMI-ALAOUI

Sur la cohomologie feuilletée

Compositio Mathematica, tome 49, n° 2 (1983), p. 195-215

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1983__49_2_195_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA COHOMOLOGIE FEUILLETÉE

Aziz El Kacimi-Alaoui

Résumé: On étudie la cohomologie d'une variété feuilletée à valeurs dans le faisceau des germes des fonctions localement constantes sur les feuilles. On montre que cette cohomologie est invariante par homotopie intégrable i.e. une homotopie préservant chaque feuille et que la technique de Mayer–Vietoris s'applique lorsque l'on coupe la variété par une sous-variété de codimension un et transverse au feuilletage. On calcule certains groupes de cohomologie feuilletée pour quelques exemples de feuilletages et on donne une interprétation de cette cohomologie en la reliant à l'holonomie linéaire et à l'existence de mesures transverses invariantes.

Mots clés: Feuilletages, cohomologie, formes basiques.

Classification AMS (1980): 57R30, 57N30.

0. Introduction

Divers travaux ont été entrepris sur des cohomologies associées aux feuilletages parmi lesquelles la cohomologie de type (p, q) qui est tout simplement la cohomologie de la variété feuilletée à valeurs dans le faisceau ϕ^p des germes de p -formes basiques (cf. Vaisman [19]). Cette cohomologie a été étudiée entre autres par Sarkaria [15] qui l'a reliée à la signature de la variété, à l'invariance des fibrés en droites, aux classes de Chern etc...; par Molino [9] qui a montré que l'obstruction à l'existence d'une connexion transverse projetable se trouve dans $H_{\mathcal{F}}^{1,1}(V, L(E_T))$, groupe de cohomologie au sens de la différentielle le long des feuilles des formes de type $(1, 1)$ à valeurs dans le fibré en algèbres de Lie $L(E_T)$ du fibré E_T des repères transverses à $\mathcal{F}$. Cette même cohomologie se trouve dans les travaux de Kodaira [8], Hamilton [6], Duchamp et Kalka [1] dans l'étude des déformations des feuilletages.

(*) ERA au CNRS n° 07 590.

Pour cette cohomologie comme pour la cohomologie feuilletée (i.e. la cohomologie de $(V, \mathcal{F})$ à valeurs dans le faisceau ϕ^0) on ne disposait pratiquement d'aucun calcul explicite à part celui du tore T^2 muni du feuilletage en droites irrationnelles de pente α qui a été fait partiellement par Reinhart [11] et d'une manière complète par Heitsch [7] et Roger [13]:

THÉORÈME 0: *On a:*

- (1) $H^0(T^2, \phi^0) = \mathbb{R}$;
- (2) $H^1(T^2, \phi^0) = \mathbb{R}$ si α est diophantien et $H^1(T^2, \phi^0)$ est un espace vectoriel de dimension infinie si α est un nombre de Liouville.

On voit donc que cette cohomologie peut être de dimension infinie sur une variété compacte. Ceci est dû au fait que le complexe de de Rham associé n'est pas elliptique. Ce qui rend difficile à la fois son calcul et son interprétation.

Notre travail consiste essentiellement à:

- (i) Etablir quelques règles de calculs analogues à celles de la cohomologie réelle. En particulier, nous montrons que la cohomologie feuilletée est invariante par homotopie intégrable, c'est-à-dire une homotopie qui respecte chaque feuille; que la technique de Mayer–Vietoris s'applique à cette cohomologie lorsque l'on coupe la variété par une sous-variété de codimension un transverse au feuilletage.
- (ii) Calculer certains groupes de cohomologie feuilletée de quelques exemples représentatifs de feuilletages de codimension un.
- (iii) Donner une interprétation partielle de cette cohomologie en la reliant à l'existence de mesures transverses invariantes et à l'holonomie linéaire du feuilletage.

Je remercie particulièrement Gilbert Hector pour toute l'attention qu'il a portée à ce travail. Ses remarques et ses conseils m'ont été d'une grande utilité.

Dans toute la suite les structures considérées sont de classe C^∞ .

On désigne par V une variété riemannienne de dimension $(n + m)$ munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension m .

I. Cohomologie de type (p, q)

Soient $T\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}\mathcal{F}$ respectivement le fibré tangent et le fibré normal à $\mathcal{F}$. On a donc une décomposition:

$$TV = T\mathcal{F} \oplus \mathcal{N}\mathcal{F}.$$

On en déduit une décomposition pour les fibrés en algèbres extérieures:

$$A^r T^* V = \bigoplus_{p+q=r} A^q T^* \mathcal{F} \otimes A^p N^* \mathcal{F}.$$

Par définition $A^{p,q}(V) = A^q T^* \mathcal{F} \otimes A^p N^* \mathcal{F}$ est l'espace des formes différentielles de type (p, q) sur la variété feuilletée $(V, \mathcal{F})$.

La différentielle extérieure se décompose en la somme de trois opérateurs d_{01} , d_{10} et $d_{2,-1}$ respectivement de bidegrés $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(2, -1)$. L'opérateur $d_{2,-1}$ est nul si et seulement si le fibré $N\mathcal{F}$ est intégrable.

LEMME I.1: L'opérateur d_{01} vérifie:

- (i) $d_{01}^2 = 0$
- (ii) $d_{01}(\alpha \wedge \beta) = d_{01} \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d_{01} \beta$.

On appellera d_{01} la différentielle extérieure feuilletée et on la notera $d_{\mathcal{F}}$.

DÉFINITION I.2: Une forme ω de type (p, q) est dite $d_{\mathcal{F}}$ -fermée si $d_{\mathcal{F}}\omega = 0$. Elle est dite $d_{\mathcal{F}}$ -exacte s'il existe une forme α de type $(p, q-1)$ telle que $\omega = d_{\mathcal{F}}\alpha$.

DÉFINITION I.3: Une p -forme ω est dite basique si elle est de type $(p, 0)$ et vérifie $d_{\mathcal{F}}\omega = 0$.

Pour $p = 0$ on a une fonction basique, c'est-à-dire une fonction localement constante sur les feuilles.

LEMME I.4 [19]: Soit ω une forme de type (p, q) avec $q \geq 1$ et telle que $d_{\mathcal{F}}\omega = 0$. Alors pour tout x de V il existe un voisinage U de x et une forme β de type $(p, q-1)$ définie sur U et telle que $\omega = d_{\mathcal{F}}\beta$ sur U .

On note:

ϕ^p le faisceau des germes des p -formes basiques.

$A^{p,q}$ l'espace des formes différentielles de type (p, q) sur V et $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des germes correspondant.

La suite:

$$0 \rightarrow \phi^p \rightarrow \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \mathcal{A}^{p,1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}^{p,m} \rightarrow 0$$

est une résolution fine du faisceau ϕ^p .

THÉORÈME I.5 [18]: On a:

$$H^q(V, \phi^p) = \frac{\ker(A^{p,q} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^{p,q+1})}{\operatorname{Im}(A^{p,q-1} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^{p,q})}.$$

$H^q(V, \phi^p)$ est le groupe de cohomologie de type (p, q) de la variété feuilletée $(V, \mathcal{F})$.

Pour $p = 0$ on notera ϕ^0 par ϕ et on appellera $H^q(V, \phi)$ le $q^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie feuilletée de $(V, \mathcal{F})$.

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à la cohomologie feuilletée de V .

Si f est une application de $(V, \mathcal{F})$ dans $(V', \mathcal{F}')$ préservant les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ alors f induit un homomorphisme en cohomologie feuilletée.

II. Propriétés de la cohomologie feuilletée

(1) Invariance par homotopie intégrable

Soient $V = S^1 \times [0, 1]$ munie du feuilletage $S^1 \times \{t\}$ et $W = S^1$ feuilletée par S^1 .

Il existe une rétraction par déformation de V sur W préservant les feuilletages. D'autre part, il est facile de montrer que:

$$H^1(V, \phi) = \mathcal{C}^\infty([0, 1]) \text{ et } H^1(S^1, \phi) = \mathbb{R}.$$

Ceci montre que la cohomologie feuilletée n'est pas invariante par homotopie même si cette homotopie préserve le feuilletage. Cependant nous allons montrer que c'est un invariant d'un type d'homotopie introduite par Haefliger [4] qu'on appelle homotopie intégrable.

DÉFINITION II.1.a: Soient f et g deux applications de $(V, \mathcal{F})$ dans $(V', \mathcal{F}')$ préservant les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Une homotopie intégrable de f à g est une application H de $V \times \mathbb{R}$ dans V' préservant les feuilletages $p^*(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F}'$ où $p: V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ est la projection sur le premier facteur et telle que:

$$H(x, t) = f(x) \text{ pour } t \leq 0 \text{ et}$$

$$H(x, t) = g(x) \text{ pour } t \geq 1.$$

On munit $V \times \mathbb{R}$ du feuilletage $p^*(\mathcal{F})$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$J_t: V \rightarrow V \times \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow (x, t)$$

est une injection de la variété feuilletée V dans la variété feuilletée $V \times \mathbb{R}$.

On suppose que $(V, \mathcal{F})$ est définie par un atlas $(U_i, h_i)_{i \in I}$ tel que:

- (i) $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement localement fini de V ,
- (ii) h_i est un difféomorphisme de U_i sur $\mathbb{R}^{n+m}$,
- (iii) les changements de cartes sont des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ préservant le feuilletage $\{x\} \times \mathbb{R}^m$.

La famille $(U_i \times \mathbb{R}, k_i)_{i \in I}$ où $k_i(x, t) = (h_i(x), t)$ est un atlas définissant le feuilletage $p^*(\mathcal{F})$ sur $V \times \mathbb{R}$;

Soit $(\psi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. La famille $(\Psi_i)_{i \in I}$, où $\Psi_i(x, t) = \psi_i(x)$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i \times \mathbb{R})_{i \in I}$.

PROPOSITION II.1.b: Soit $A^{0,*} = \sum A^{0,q}$. Il existe une application linéaire:

$$K: A^{0,*}(V \times \mathbb{R}) \rightarrow A^{0,*}(V)$$

vérifiant:

- (i) $K(A^{0,q}(V \times \mathbb{R})) \subset A^{0,q-1}(V)$
- (ii) $d_{\mathcal{F}} \circ K + K \circ d_{\mathcal{F}} = J_1^* - J_0^*$.

DÉMONSTRATION: Nous ferons la démonstration comme dans le cas de la cohomologie réelle [2].

(*) **Modèle local:** $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ feuilletée par les plans $\{x\} \times \mathbb{R}^m$. On pose:

$Kf = 0$ si f est une fonction.

$$K\alpha = 0 \text{ si } \alpha = a dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q}$$

$$K\beta = \left(\int_0^1 b dt \right) dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_{q-1}} \text{ si}$$

$$\beta = b dt \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_{q-1}}.$$

Il est clair qu'on a $K(A^{0,q}(V \times \mathbb{R})) \subset A^{0,q-1}(V)$. Par ailleurs:

$$- (d_{\mathcal{F}} K + K d_{\mathcal{F}})f = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt = (J_1^* - J_0^*) \cdot f$$

– $d_{\mathcal{F}}K\alpha = 0$ et

$$K d_{\mathcal{F}}\alpha = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_q} = (J_1^* - J_0^*)\alpha.$$

– Finalement, $J_1^*\beta = J_0^*\beta = 0$ et

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}}K\beta &= \sum_{1 \leq j \leq m} \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y_j} dt \right) dy_j \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_{q-1}} \\ K d_{\mathcal{F}}\beta &= - \sum_{1 \leq j \leq m} \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y_j} dt \right) dy_j \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_{q-1}}. \end{aligned}$$

On a donc: $(K d_{\mathcal{F}} + d_{\mathcal{F}}K)\beta = (J_1^* - J_0^*) \cdot \beta$.

(**) Nous allons globaliser le résultat précédent. Si h est un difféomorphisme préservant le feuilletage de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ on a $K(k^*\gamma) = h^*K(\gamma)$ où k est le difféomorphisme de $V \times \mathbb{R}$ défini par $k(x, t) = (h(x), t)$ et qui préserve le feuilletage de $V \times \mathbb{R}$.

On pose:

$$\hat{K}(\alpha) = \sum_{i \in I} h^*K[(k_i^{-1})^*\Psi_i\alpha].$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \hat{K}(A^{0,q}(V \times \mathbb{R})) &\subset A^{0,q-1}(V) \\ \text{(ii)} \quad d_{\mathcal{F}}\hat{K}(\alpha) + \hat{K}d_{\mathcal{F}}(\alpha) &= \sum_{i \in I} d_{\mathcal{F}}\hat{K}(\Psi_i\alpha) + \hat{K}d_{\mathcal{F}}(\Psi_i\alpha) \\ &= \sum_{i \in I} h_i^*d_{\mathcal{F}}K(k_i^{-1})^*(\Psi_i\alpha) + h_i^*Kd_{\mathcal{F}}(k_i^{-1})^*(\Psi_i\alpha) \\ &= \sum_{i \in I} h_i^*(J_1^* - J_0^*)\Psi_i\alpha = (J_1^* - J_0^*)\alpha. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION II.1.c: Soient f et g deux applications de $(V, \mathcal{F})$ dans $(V', \mathcal{F}')$ préservant les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. S'il existe une homotopie intégrable de f à g alors f et g induisent le même homomorphisme en cohomologie feuilletée.

DÉMONSTRATION: Si H est une homotopie intégrable de f à g on a $H \circ J_0 = f$ et $H \circ J_1 = g$.

Si α est une forme de type $(0, q)$ et $d_{\mathcal{F}}$ -fermée sur V' on a:

$$\begin{aligned} g^*\alpha - f^*\alpha &= J_1^*H^*\alpha - J_0^*H^*\alpha \\ &= d_{\mathcal{F}}K(H^*\alpha) + Kd_{\mathcal{F}}(H^*\alpha) \\ &= d_{\mathcal{F}}K(H^*\alpha). \end{aligned}$$

Les formes $g^*\alpha$ et $f^*\alpha$ sont donc $d_{\mathcal{F}}$ -cohomologues.

COROLLAIRE II.1.d: Si $(V, \mathcal{F})$ et $(V', \mathcal{F}')$ ont même type d'homotopie intégrable alors elles ont des groupes de cohomologie feuilletée isomorphes.

DÉFINITION II.1.e: Soit $W \rightarrow V$ une sous-variété de V transverse à $\mathcal{F}$ munie du feuilletage $\mathcal{F}|_W$. On dira qu'une application:

$$r: V \rightarrow W$$

est une rétraction par déformation intégrable si r et $i: W \hookrightarrow V$ sont intégralement homotopes.

COROLLAIRE II.1.f: Si W est un rétracte par déformation intégrable de V alors V et W ont mêmes groupes de cohomologie feuilletée.

(2) Théorème de Mayer-Victoris

Soient $(V, \mathcal{F})$ une variété feuilletée, M et N deux sous-variétés de V de même dimension que V et telles que:

- (i) M et N sont des fermés de V .
- (ii) $V = M \cup N$.
- (iii) $\partial M = \partial N = K$ est transverse à $\mathcal{F}$ et admet un voisinage tubulaire T qui se rétracte par déformation intégrable sur K .

On pose $M_1 = M \cup T$ et $N_1 = N \cup T$ et on munit M_1 , N_1 et T des feuilletages induits par $\mathcal{F}$.

On a un diagramme commutatif de variétés et d'applications feuilletées:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i} & N_1 \\ \downarrow k & & \downarrow j \\ M_1 & \xrightarrow{i} & V \end{array}$$

Soient λ et μ les applications:

$$\begin{aligned}\lambda: A^{0,*}(V) &\rightarrow A^{0,*}(M_1) \oplus A^{0,*}(N_1) \\ \omega &\rightarrow (i^*\omega, -j^*\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu: A^{0,*}(M_1) \oplus A^{0,*}(N_1) &\rightarrow A^{0,*}(T) \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow k^*\alpha + l^*\beta\end{aligned}$$

LEMME II.2.a: *La suite:*

$$0 \rightarrow A^{0,*}(V) \xrightarrow{\lambda} A^{0,*}(M_1) \oplus A^{0,*}(N_1) \xrightarrow{\mu} A^{0,*}(T) \rightarrow 0 \quad (1)$$

est exacte.

La démonstration est analogue à celle du cas usuel.

A la suite exacte (1), on associe la suite exacte longue de cohomologie feuilletée:

$$\dots \rightarrow H^q(V, \phi) \rightarrow H^q(M_1, \phi) \oplus H^q(N_1, \phi) \rightarrow H^q(T, \phi) \rightarrow H^{q+1}(V, \phi) \rightarrow \dots$$

Or M_1 , N_1 et T se retractent par déformation intégrable respectivement sur M , N et K . D'où:

THÉORÈME II.2.b: *On a une suite exacte:*

$$\dots \rightarrow H^q(V, \phi) \rightarrow H^q(M, \phi) \oplus H^q(N, \phi) \rightarrow H^q(K, \phi) \rightarrow H^{q+1}(V, \phi) \rightarrow \dots$$

III. Exemples de calculs de cohomologie feuilletée

(1) *Produit de deux variétés*

Soient F et T deux variétés. Posons $V = T \times F$ munie du feuilletage $\{x\} \times F$.

PROPOSITION III.1.a: *On a:*

$$H^q(V, \phi) = H^q(F, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{C}^\infty(T).$$

DÉMONSTRATION: Considérons l'application:

$$\begin{aligned}p: V &\rightarrow F \\ (x, y) &\rightarrow y.\end{aligned}$$

La cohomologie feuilletée étant invariante par rétraction intégrable on a :

$$\lim_{y \in U} H^p(p^{-1}(U), \phi) = H^p(T, \phi)$$

où U est un ouvert de F (qu'on peut supposer contractile) et $p^{-1}(U) = T \times U$.

D'après le théorème de Leray [3], on a une suite spectrale $E_2^{p,q} = H^q(F, H^p(T, \phi))$ qui converge vers la cohomologie de V à valeurs dans le faisceau ϕ .

Le feuilletage induit sur T est un feuilletage par points on a $H^p(T, \phi) = 0$ pour $p \neq 0$ et $H^0(T, \phi) = \mathcal{C}^\infty(T)$. Par conséquent, $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \neq 0$. La suite spectrale est donc dégénérée. Ceci donne:

$$H^q(V, \phi) = H^q(F, \mathcal{C}^\infty(T))$$

L'action de $\pi_1(F)$ sur $H^p(T, \phi)$ étant triviale, on a :

$$H^q(V, \phi) = H^q(F, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{C}^\infty(T).$$

(2) Fibré hyperbolique T_A^3

(a) Construction du feuilletage sur T_A^3

Pour tout $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ on désigne par T_A^3 le fibré en tores obtenu en quotientant $T^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence identifiant (m, t) à $(A(m), t + 1)$. Un tel fibré est dit hyperbolique si la matrice A est hyperbolique, c'est-à-dire si $|\text{Tr } A| > 2$.

L'automorphisme A étant hyperbolique il a deux directions propres réelles de pentes irrationnelles. On note λ une des valeurs propres et α la pente associée. Le feuilletage du plan par droites de pente α passe au quotient en un feuilletage $\mathcal{F}_1$ en droites sur le tore T^2 . Le feuilletage $p^*(\mathcal{F}_1)$ sur $T^2 \times \mathbb{R}$ où $p: T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ est la première projection est invariant par l'application $(m, t) \rightarrow (A(m), t + 1)$ et définit donc un feuilletage $\mathcal{F}$ sur T_A^3 . Les feuilles sont des plans ou des cylindres et sont toutes denses.

(b) Cohomologie feuilletée de T_A^3

On coupe T_A^3 suivant deux fibres. On obtient deux exemplaires de $T^2 \times [0, 1]$ qu'on notera M et N . On pose:

$$K = \partial M = \partial N = T^2 \times \{0\} \cup T^2 \times \{1\}.$$

On applique le théorème II.2.b et on obtient la suite exacte:

$$\begin{array}{c}
 0 \rightarrow H^0(T_A^3, \phi) \rightarrow H^0(M, \phi) \oplus H^0(N, \phi) \rightarrow H^0(K, \phi) \\
 \downarrow \\
 H^1(T_A^3, \phi) \rightarrow H^1(M, \phi) \oplus H^1(N, \phi) \rightarrow H^1(K, \phi) \\
 \downarrow \\
 H^2(T_A^3, \phi) \rightarrow H^2(M, \phi) \oplus H^2(N, \phi) \rightarrow H^2(K, \phi) \rightarrow 0.
 \end{array}$$

D'autre part, $M = N = T^2 \times [0, 1]$ se rétracte par déformation intégrable sur T^2 muni du feuilletage linéaire de pente α lequel admet pour groupes de cohomologie feuilletée:

$H^0(T^2, \phi) = \mathbb{R}$ et $H^1(T^2, \phi) = \mathbb{R}$ car α étant algébrique il est diophantien [14] et $H^2(T^2, \phi) = 0$.

La suite exacte se réduit finalement à:

$$\begin{array}{c}
 0 \rightarrow H^0(T_A^3, \phi) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\
 \downarrow \\
 H^1(T_A^3, \phi) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H^2(T_A^3, \phi) \rightarrow 0 \\
 \\
 (a, b) \rightarrow (a + b, a + A^*b).
 \end{array}$$

Les feuilles de $\mathcal{F}$ dans T_A^3 sont denses, on a $H^0(T_A^3, \phi) = \mathbb{R}$. On obtient finalement:

$$\begin{aligned}
 H^1(T_A^3, \phi) &= \mathbb{R} \\
 H^2(T_A^3, \phi) &= 0.
 \end{aligned}$$

REMARQUES: (1) Dans [18], Vaisman a énoncé le théorème suivant: "Pour toute variété riemannienne V compacte et orientée munie d'un feuilletage de dimension m on a: $H^m(V, \phi) \neq 0$ ". Le calcul que nous venons de faire constitue un contre exemple à ce théorème. Ce résultat reste quand même vrai dans le cas bundle-like [20]. Nous verrons que la non nullité de ce groupe de cohomologie est liée à l'existence de feuilles compactes, de mesures transverses invariantes.

(2) On peut considérer la cohomologie $H^*(V, \mathcal{A})$ de $(V, \mathcal{F})$ à valeurs dans le faisceau $\mathcal{A}$ des germes de champs de vecteurs basiques normaux. On sait d'après Kodaira [8] que $H^1(V, \mathcal{A})$ contient les déformations infinitésimales du feuilletage. Cette structure est donc rigide si $H^1(V, \mathcal{A}) = 0$.

On peut montrer par un calcul direct que $H^1(T_A^3, \mathcal{A}) = 0$. Ceci donne un exemple de feuilletage sans feuilles compactes et sans déformation infinitésimale.

(3) *La composante de Reeb transversalement affine*(a) *Construction*

Soit H_+^* le demi-espace $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \geq 0\}$ privé de l'origine. On le rapporte aux coordonnées cylindriques (r, θ, z) et on considère le feuilletage d'équation $dz = 0$.

Soit $a \in]0, 1[$. L'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par l'application

$(r, \theta, z) \rightarrow \left(\frac{r}{2}, \theta, az\right)$ laisse le feuilletage invariant. On a donc un feuilletage $\mathcal{F}$ sur la variété obtenue en quotientant H_+^* par cette action qui n'est rien d'autre que $D^2 \times S^1$ munie du feuilletage de Reeb.

REMARQUE: Ce feuilletage est C^∞ -conjugué au feuilletage obtenu en quotientant H_+^* par l'action engendrée par $(r, \theta, z) \rightarrow \left(\frac{r}{2}, \theta, \psi(z)\right)$ où ψ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés:

- (i) $\psi(0) = 0$
- (ii) $\psi'(0) = a$ avec $0 < a < 1$
- (iii) $\psi(z) < z$ pour $z \neq 0$

et ont même cohomologie feuilletée.

(b) *Calcul du H^0 et du H^1*

Toute fonction différentiable constante sur les feuilles est constante sur les adhérences. Or T^2 est un minimal donc la fonction est constante.

Calculons $H^1(D^2 \times S^1, \phi)$.

(i) Une $(0, 1)$ -forme ω sur $D^2 \times S^1$ est induite par une $(0, 1)$ forme sur H_+^* invariante par l'application $(r, \theta, z) \rightarrow \left(\frac{r}{2}, \theta, az\right)$.

Une telle forme s'écrit:

$$\tilde{\omega} = f(r, \theta, z)dr + g(r, \theta, z)d\theta$$

avec f et g périodiques en θ de période 2π et vérifiant:

$$f\left(\frac{r}{2}, \theta, az\right) = 2f(r, \theta, z)$$

$$g\left(\frac{r}{2}, \theta, az\right) = g(r, \theta, z).$$

(ii) La forme ω est $d_{\mathcal{F}}$ -fermée si

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial r}.$$

(*) Soit ω une $(0, 1)$ -forme sur $D^2 \times S^1$ vérifiant les hypothèses (i) et (ii). Elle est $d_{\mathcal{F}}$ -exacte s'il existe une fonction h sur $D^2 \times S^1$ telle que $d_{\mathcal{F}}h = \omega$. Une telle fonction est induite par une fonction $\tilde{h}$ sur H_+^* périodique de période 2π en θ et vérifiant:

$$\begin{cases} \tilde{h}\left(\frac{r}{2}, \theta, az\right) = \tilde{h}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial r} = f \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} = g \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} = g \quad (2)$$

En intégrant l'équation (2), on obtient:

$$\tilde{h}(r, \theta, z) = \int_{\theta_0}^{\theta} g(r, t, z) dt + K_0(r, z)$$

la fonction $\tilde{h}$ doit vérifier l'équation (1). D'où:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial g}{\partial r}(r, t, z) dt + \frac{\partial K_0}{\partial r}(r, z) = f(r, \theta, z) \text{ or } \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

On obtient donc:

$$\frac{\partial K_0}{\partial r}(r, z) = f(r, \theta_0, z)$$

c'est-à-dire:

$$K_0(r, z) = \int_1^r f(u, \theta_0, z) du + K(z).$$

Finalement:

$$\tilde{h}(r, \theta, z) = \int_1^r f(u, \theta_0, z) du + \int_{\theta_0}^{\theta} g(r, t, z) dt + K(z).$$

(**) La condition de périodicité de $\tilde{h}$ s'exprime par

$$\int_0^{2\pi} g(r, \theta, z) d\theta = 0.$$

D'autre part, $\tilde{h}$ doit vérifier la relation:

$$\tilde{h}\left(\frac{r}{2}, \theta, az\right) = \tilde{h}(r, \theta, z).$$

En utilisant les conditions d'invariance de f et g on montre que ceci est équivalent à:

$$K(z) = K(az) - \int_1^2 f(r, \theta_0, z) dr.$$

Pour $z = 0$, on aura donc:

$$\int_1^2 f(r, \theta_0, 0) dr = 0.$$

LEMME III.3.b.1: Soit $\tilde{\omega} = f(r, \theta, z)dr + g(r, \theta, z)d\theta$ une $(0, 1)$ -forme $d_{\mathcal{F}}$ -fermée sur H_+^* induisant une $(0, 1)$ -forme ω sur $D^2 \times S^1$ $d_{\mathcal{F}}$ -fermée.

Alors les intégrales:

$$\int_1^2 f(r, \theta, 0) dr \text{ et } \int_0^{2\pi} g(r, \theta, z) d\theta$$

sont des constantes.

DÉMONSTRATION: Soit $L = T^2$ la feuille compacte. On désigne par $\gamma(\theta)$ le générateur de $\pi_1(L)$ pour lequel θ est constant. On a:

$$\int_1^2 f(r, \theta, 0) dr = \int_{\gamma(\theta)} \omega.$$

D'autre part, les lacets $\gamma(\theta)$ sont homotopes dans L et ω est fermée le long des feuilles. Donc:

$$\int_1^2 f(r, \theta, 0) dr \text{ est une constante.}$$

$$\text{On a } \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} g(r, \theta, z) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) d\theta.$$

Ceci est égal à $\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z) d\theta = 0$ car $\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial r}$ et f est périodique de période 2π en θ .

De plus, la fonction $\int_0^{2\pi} g(r, \theta, z) d\theta$ vérifie:

$$\int_0^{2\pi} g\left(\frac{r}{2}, \theta, az\right) d\theta = \int_0^{2\pi} g(r, \theta, z) d\theta.$$

Donc c'est une fonction sur $D^2 \times S^1$ qui ne dépend ni de r ni de θ . Elle est donc constante sur les feuilles donc partout.

Soit A l'application qui à toute $(0, 1)$ -forme ω $d_{\mathcal{F}}$ -fermée sur $D^2 \times S^1$ induite par une $(0, 1)$ -forme $\tilde{\omega} = f(r, \theta, z)dr + g(r, \theta, z)d\theta$ sur H_+^* associe le couple de réels:

$$\left(\int_1^2 f(r, \theta_0, 0) dr, \int_0^{2\pi} g(r, \theta, z) d\theta \right).$$

LEMME III.3.b.2: *L'application A est linéaire, surjective et son noyau est égal à l'espace des $(0, 1)$ -formes $d_{\mathcal{F}}$ -exactes.*

DÉMONSTRATION: Il est clair que A est linéaire et surjective. D'autre part, on a vu que toute $(0, 1)$ -forme $d_{\mathcal{F}}$ -exacte appartient au noyau de A . Pour montrer que toute $(0, 1)$ -forme qui appartient au noyau de A est $d_{\mathcal{F}}$ -exacte il suffit de trouver une fonction K de classe C^∞ en z vérifiant:

$$K(z) = K(az) - \int_1^2 f(r, \theta_0, z) dr.$$

Une telle fonction est nécessairement de la forme:

$$K(z) = K(az) - \int_1^2 f(r, \theta_0, z) dr.$$

Pour $z = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \int_1^2 f(r, \theta_0, 0) dr$ converge car $\int_1^2 f(r, \theta_0, 0) dr = 0$.

D'autre part, considérons la série dérivée:

$$\sum_{n \geq 0} a^n \int_1^2 f'_z(r, \theta, a^n z) dr \text{ avec } 0 < a < 1.$$

La fonction $\int_1^2 f'_z(r, \theta_0, a^n z) dr$ étant bornée sur tout compact $[0, z_0]$ indépendamment de n , la série dérivée converge uniformément sur $[0, z_0]$

et donc $\sum_{n \geq 0} \int_1^2 f(r, \theta_0, a^n z) dr$ est de classe C^1 . De la même façon, on montre que K est de classe C^∞ .

On a finalement:

THÉORÈME III.3.b.3: $H^1(D^2 \times S^1, \phi) = \mathbb{R}^2$.

On obtient les mêmes résultats en faisant des calculs analogues pour le feuilletage de Reeb transversalement affine sur $S^2 \times S^1$.

IV. Relation entre l'holonomie linéaire et la cohomologie feuilletée

(1) Feuilletages transversalement orientables de codimension 1

Soit V une variété riemannienne munie d'un feuilletage de codimension un et transversalement orientable. Un tel feuilletage peut être défini par une équation de Pfaff $\omega = 0$ où ω est une 1-forme complètement intégrable sur V .

On peut trouver une 1-forme α [10] telle que:

- (i) $d\omega = \omega \wedge \alpha$
- (ii) Pour toute feuille L de $\mathcal{F}$ on a: $d(\alpha|_L) = 0$;
- (iii) On a: $\int_\gamma \alpha|_L = \text{Log } dh_\gamma$ pour $\gamma \in \pi_1(L)$ où dh_γ représente l'holonomie linéaire.

PROPOSITION IV.1.a: La composante de type $(0, 1)$ de α définit une classe de cohomologie dans $H^1(V, \phi)$.

DÉMONSTRATION: La forme α s'écrit d'une manière unique: $\alpha = \alpha_{01} + \alpha_{10}$ où α_{01} est de type $(0, 1)$ et α_{10} de type $(1, 0)$.

D'autre part, pour toute feuille L de $\mathcal{F}$ on a: $d(\alpha|_L) = 0$. Ceci implique que α_{01} est $d_{\mathcal{F}}$ -fermée et par suite définit une classe de cohomologie dans $H^1(V, \phi)$.

Nous allons montrer qu'en fait l'holonomie linéaire du feuilletage est représentée par cette classe de cohomologie (qui ne dépend pas de ω).

LEMME IV.1.b: Soit β une forme différentielle sur V de type $(0, r)$. Si L est une feuille de $\mathcal{F}$ et γ une chaîne de dimension $(r + 1)$ contenue dans L on a:

$$\int_\gamma d_{\mathcal{F}} \beta = \int_{\partial\gamma} \beta.$$

DÉMONSTRATION: On a: $d\beta = d_{\mathcal{F}}\beta + \theta$ où θ est une forme qui n'est pas de type $(0, r+1)$. On a donc $\int_{\gamma} \theta = 0$. Il reste:

$$\int_{\gamma} d\beta = \int_{\gamma} d_{\mathcal{F}}\beta = \int_{\partial\gamma} \beta \text{ d'après le théorème de Stokes usuel.}$$

Pour $\gamma \in \pi_1(L)$, on aura:

$\int_{\gamma} \alpha|_L = \int_{\gamma} \alpha_{01}$ et cette intégrale ne dépend que de la classe de cohomologie de α_{01} dans $H^1(V, \phi)$ en vertu du lemme IV.1.b. On a donc:

THÉORÈME IV.1.c: *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un transversalement orientable sur une variété riemannienne V .*

Si $H^1(V, \phi) = 0$, alors $\mathcal{F}$ est sans holonomie linéaire.

Si $\mathcal{F}$ est transversalement affine l'holonomie linéaire caractérise l'holonomie. Ce qui donne:

COROLLAIRE V.1.d: *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un transversalement affine sur une variété riemannienne V .*

Si $H^1(V, \phi) = 0$, alors $\mathcal{F}$ est sans holonomie.

(2) *Suspensions de difféomorphismes de $[0, 1[$ et de $[0, 1]$*

Dans cette partie, nous montrerons sur des exemples comment intervient l'holonomie dans le calcul de la cohomologie feuilletée.

A. Soit f un difféomorphisme de $[0, 1[$ tel que:

- (i) $f(0) = 0$.
- (ii) $f(t) < t$ pour $t > 0$.
- (iii) $f'(0) = a$ avec $0 < a < 1$.

En suspendant f on obtient un feuilletage $\mathcal{F}$ sur $M = S^1 \times [0, 1[$ en droites spiralant sur la feuille compacte $S^1 \times \{0\}$.

On a:

$$H^0(M, \phi) = \mathbb{R}.$$

D'après [16] f est C^∞ -conjugué à l'homothétie $t \rightarrow at$ et donc le feuilletage $\mathcal{F}$ est C^∞ -conjugué au feuilletage obtenu en suspendant cette homothétie. Nous ferons le calcul de $H^1(M, \phi)$ pour cette suspension.

Une $(0, 1)$ forme ω sur M s'écrit comme $(0, 1)$ forme sur $\mathbb{R} \times [0, 1[$

invariante par l'application:

$$(x, t) \rightarrow (x + 1, at)$$

c'est-à-dire $\omega = \psi(x, t)dx$ avec ψ vérifiant $\psi(x + 1, at) = \psi(x, t)$.

(i) La forme ω est $d_{\mathcal{F}}$ -fermée car elle est de degré maximum sur les feuilles.

(ii) Elle est $d_{\mathcal{F}}$ -exacte s'il existe une fonction h sur $\mathbb{R} \times [0, 1[$ vérifiant:

$$\begin{cases} h(x + 1, at) = h(x, t) \\ \frac{\partial h}{\partial x} = \psi \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \psi \quad (2)$$

En intégrant cette équation, on obtient:

$$h(x, t) = \int_1^x \psi(\tau, t) d\tau + k(t).$$

La condition (1) s'exprime:

$$\int_1^{x+1} \psi(\tau, at) d\tau + k(at) = \int_1^x \psi(\tau, t) d\tau + k(t)$$

qui devient:

$$k(at) = k(t) - \int_0^1 \psi(x, t) dx.$$

LEMME IV.2.A.a: On a: $H^1(M, \phi) \neq 0$.

En effet, la fonction k doit être continue à l'origine. On doit donc avoir:

$$k(0) = k(0) - \int_0^1 \psi(x, 0) dx, \text{ i.e.}$$

$$\int_0^1 \psi(x, 0) dx = 0.$$

Les formes $\omega = \psi(x, t)dx$ où ψ est telle que $\psi(x, 0)$ est une fonction constante non nulle ne sont pas $d_{\mathcal{F}}$ -exactes.

PROPOSITION IV.2.A.b: On a:

$$H^1(M, \phi) = \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION: Soit $\omega = \psi(x, t)dx$ telle que:

$$\int_0^1 \psi(x, 0)dx = 0.$$

On a nécessairement:

$$K(t) = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \psi(x, a^n t)dx.$$

On montre facilement que K est de classe C^∞ en utilisant le fait que $0 < a < 1$.

Nous remarquons que $H^1(M, \phi)$ est de dimension finie. Ceci est dû à la nature de l'holonomie au voisinage de la feuille compacte. L'exemple suivant montrera que cette situation n'est que locale.

B. Soit f un difféomorphisme de $[0, 1]$ tel que:

- (i) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$
- (ii) $f(t) < t$ pour $0 < t < 1$.

En suspendant f on obtient un feuilletage $\mathcal{F}$ sur $V = S^1 \times [0, 1]$ en droites spiralant sur les deux feuilles compactes $S^1 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\}$.

En coupant le long du cercle $K = S^1 \times \{1/2\}$ transverse à $\mathcal{F}$ on obtient deux parties M et N munies des feuilletages induits par $\mathcal{F}$.

D'après le théorème II.2.b. on a une suite exacte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(V, \phi) & \rightarrow & H^0(M, \phi) \oplus H^0(N, \phi) & \rightarrow & H^0(K, \phi) \\ & & \downarrow & & \longleftarrow & & \uparrow \\ & & H^1(V, \phi) & \rightarrow & \dots & & \end{array}$$

Le feuilletage induit sur K est un feuilletage par points. Ce qui donne $H^0(K, \phi) = \mathcal{C}^\infty(S^1)$.

D'autre part, $H^0(V, \phi) = H^0(M, \phi) = H^0(N, \phi) = \mathbb{R}$. La suite se réduit donc à:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(S^1) \\ & & \downarrow & & \longleftarrow & & \uparrow \\ & & H^1(M, \phi) & \rightarrow & \dots & & \end{array}$$

On en déduit que $H^1(V, \phi)$ est de dimension infinie.

V. Relation avec les mesures transverses

On suppose que V est compacte sans bord, orientée et que $\mathcal{F}$ est orienté. On montre que l'existence d'une mesure transverse invariante implique que $H^m(V, \phi)$ est non nul.

Je remercie Vlad Sergiescu pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui à ce sujet.

Nous commençons d'abord par rappeler quelques éléments de la théorie des courants de Sullivan [17].

DÉFINITION V.1: Un p -courant de Dirac associé à $\mathcal{F}$ sur V est un courant défini par l'évaluation des p -formes sur un p -vecteur tangent à $\mathcal{F}$ en un point de V .

Un élément qui est dans la fermeture convexe des p -courants de Dirac associés à $\mathcal{F}$ est appelé un p -courant associé à $\mathcal{F}$.

Un cycle de feuilletage est un m -courant associé à $\mathcal{F}$ qui est fermé en tant que courant [12].

THÉORÈME V.2 [17]: *L'existence d'une mesure transverse invariante est équivalente à l'existence d'un cycle de feuilletage non trivial.*

LEMME V.3: *Soit C_μ le cycle de feuilletage associé à une mesure transverse invariante μ . Alors C_μ définit un élément non nul du dual de $H^m(V, \phi)$.*

DÉMONSTRATION: Le cycle de feuilletage C_μ définit une forme linéaire sur $A^{0,m}(V)$ nulle sur les bords. Soit α une forme de type $(0, m)$ sur V telle que $\alpha = d_{\mathcal{F}}\beta$ où β est de type $(0, m-1)$.

Pour des raisons de type, on a $\alpha = d\beta$. D'où:

$$\langle C_\mu, \alpha \rangle = 0.$$

Ceci montre que C_μ induit une forme linéaire non nulle sur $H^m(V, \phi)$. Ce qui donne:

THÉORÈME V.4: *Soit V une variété riemannienne compacte sans bord orientée munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ orienté de dimension m .*

Si $\mathcal{F}$ admet une mesure transverse invariante alors $H^m(V, \phi) \neq 0$.

En particulier si $\mathcal{F}$ admet une feuille compacte alors $H^m(V, \phi) \neq 0$. En effet, une feuille compacte définit une mesure transverse invariante.

Nous avons découvert par la suite que Haefliger a donné un résultat plus complet [5]:

On désigne par H le pseudo-groupe d'holonomie associé à $\mathcal{F}$ et T une transversale complète. On note par $\Omega^k(T)$ l'espace des k -formes sur T et $\Omega^k(\text{tr } \mathcal{F})$ le quotient de $\Omega^k(T)$ par les éléments de la forme $\alpha - h^*\alpha$ où $h \in H$ et α une k -forme sur T .

THÉORÈME V.5: $H^m(V, \phi)$ est canoniquement isomorphe à $\Omega^0(\text{tr } \mathcal{F})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. DUCHAMP et KALKA: Deformation theory of holomorphic foliations. *J. Diff. Geom.* 14 (1979) 317–337.
- [2] C. GODBILLON: Eléments de topologie algébrique. Hermann, Paris (1971).
- [3] R. GODEMENT: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1958).
- [4] A. HAEFLIGER: Homotopy, Integrability. Amsterdam, Springer Lectures Notes, N° 197.
- [5] A. HAEFLIGER: Some remarks on foliations with minimal leaves. *J. Diff. Geom.* 15, n° 2 (1980).
- [6] S.R. HAMILTON: Deformation theory of foliations. Preprint Cornell University.
- [7] J.L. HEITSCH: A cohomology of foliated manifolds. *Comment. Math. Helviti* 50 (1975) 197–218.
- [8] K. KODAIRA and D.C. SPENCER: Multifoliate Structures. *Ann. Math.* 74 (1961) 52–100.
- [9] P. MOLINO: Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projectable. *Topology* 12 (1973).
- [10] G. REEB: Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Act. Sci. et Ind. Hermann*, Paris (1952).
- [11] B.L. REINHART: Harmonic integrals on almost product manifolds. *Trans. A.M.S.* 88 (1958) 243–276.
- [12] G. DE RHAM: Variétés différentiables. *Act. Sci. et Ind. Hermann*, Paris.
- [13] C. ROGER: Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages. Thèse, Orsay (1976).
- [14] K.F. ROTH and DAVENPORT: Rational approximations of algebraic numbers. *Mathematika* 2 (1955) 160–167.
- [15] K.S. SARKARIA: The de Rham cohomology of foliated manifolds, thesis, SUNY, Stony Brook, 1974.
- [16] S. STERNBERG: Local C^n transformations of the real line. *Duke. Math. J.* 24 (1957) 97–102.
- [17] D. SULLIVAN: Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Inventiones Math.* 36 (1978) 225–255.
- [18] I. VAISMAN: Cohomology and differential forms. Dekker (1973).
- [19] I. VAISMAN: Variétés riemanniennes feuilletées. *Czechosl. Math. J.* 21 (1971) 46–75.
- [20] I. VAISMAN: Sur la cohomologie des variétés riemanniennes feuilletées. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, Séries A, p. 720–723.

(Oblatum 15-VII-1981)

Université des Sciences et Techniques de LILLE I
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 – Villeneuve d'ASCQ Cedex
France

ou:

12, Derb DALYA
Azrou
Maroc