PIERRE H. BÉRARD

Remarques sur la conjecture de Weyl

Compositio Mathematica, tome 48, nº 1 (1983), p. 35-53
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1983__48_1_35_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 48, Fasc. 1, 1983, pag. 35–53

REMARQUES SUR LA CONJECTURE DE WEYL

Pierre H. Bérard*

1. Introduction

Soit M une variété riemannienne compacte connexe de classe C^∞ dont le bord ∂M soit assez régulier. On s'intéresse aux problèmes suivants

$$(D)\begin{cases}\Delta u = \lambda u & \text{dans } M\\ u\upharpoonright\partial M = 0\end{cases} \qquad \text{(Problème de Dirichlet)}$$

$$\tag{1}$$

$$(N)\begin{cases}\Delta u = \lambda u & \text{dans } M\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\upharpoonright\partial M = 0 \ (\nu \text{ normale extérieure})\end{cases} \qquad \text{(Problème de Neumann)}$$

Le laplacien Δ de M admet, quand on se donne l'une des conditions au bord de Dirichlet (ou de Neumann), une unique extension comme opérateur non-borné auto-adjoint de $L^2(M, dx)$ (où dx désigne la mesure riemannienne de M). Cette extension a un spectre discret formé d'une suite de valeurs propres positives de multiplicités finies qui tend vers l'infini. Nous écrirons ce spectre de la manière suivante (en répétant chaque valeur propre un nombre de fois égal à sa multiplicité):

$$\Sigma_D = \{\lambda_1^- < \lambda_2^- \le \lambda_3^- \le \dots \quad +\infty\}$$
$$(\text{resp. } \Sigma_N = \{0 = \lambda_0^+ < \lambda_1^+ \le \lambda_2^+ \le \dots \quad +\infty\}) \tag{2}$$

où D indique le problème de Dirichlet (resp. N celui de Neumann).

On introduit aussi les fonctions de comptage

$$N^\pm(\lambda) = \#\{j : \lambda_j^\pm \le \lambda^2\}. \tag{3}$$

* Ce travail a été réalisé pendant un séjour à l'IMPA (Rio de Janeiro, Brésil).

0010-437X/83/01/0035–19$0.20

On sait, depuis H. Weyl (1920) que l'on a

$$N^{\pm}(\lambda) \sim C_d \operatorname{Vol}(M)\lambda^d \tag{4}$$

où C_d est une constante positive universelle qui dépend seulement de la dimension d de M. Plus récemment (1979) R. Seeley ([SY 1,2]) et Pham The Lai ([PTL]) ont démontré que l'on a

$$N^{\pm}(\lambda) = C_d \operatorname{Vol}(M)\lambda^d + O(\lambda^{d-1}). \tag{5}$$

Des "expériences" sur certains domaines du plan (par exemple un carré) montrent que l'on peut conjecturer pour $N^{\pm}(\lambda)$ le comportement suivant

Conjecture de Weyl:

$$N^{\pm}(\lambda) = C_d \operatorname{Vol}(M)\lambda^d \pm C'_d \operatorname{Vol}(\partial M)\lambda^{d-1} + o(\lambda^{d-1}) \tag{6}$$

où C'_d est une autre constante universelle positive qui dépend seulement de la dimension d.

7. Dans [KV], Kuznecov a démontré que la conjecture de Weyl est vraie pour les domaines du plan pour lesquels on peut séparer les variables (la démonstration consiste à ramener le problème à une estimation du nombre de points d'un réseau dans un domaine qui se dilate, puis à utiliser le théorème de Van der Corput).

Dans [ME], Melrose démontre que la conjecture de Weyl est vraie dès que les conditions suivantes sont réalisées (voir des énoncés précis dans [ME])

(i) le bord ∂M de M est lisse et géodésiquement concave;

(ii) la mesure de l'ensemble $\{x \in U^*M$, le flot géodésique Φ^t de M est tangent à l'ordre infini à l'identité en x pour un certain $t \neq 0\}$ est nulle;

(iii) le flot géodésique Φ^t, $t \neq 0$, ne fixe aucun point de ∂M.

Il est facile de voir, comme l'a remarqué Gromes dans [GS] (voir aussi [B–B]), que la condition (ii) est nécessaire. Nous reviendrons sur cette question au paragraphe III.

La méthode de Melrose, Pham The Lai et Seely utilise la transformation cosinus de la mesure spectrale (cette méthode remonte essentiellement à Hörmander).

Le but de cette note est de donner quelques exemples de variétés à bord pour lesquelles la conjecture de Weyl est vraie. Ces variétés sont des quotients finis de variétés sans bord, dont le flot géodésique n'est pas périodique (on retrouve la condition (ii) de Melrose, énoncée ci-dessus). Dans nos exemples, les conditions (i) on (iii) de Melrose ne sont pas toujours satisfaites. Les résultats sont énoncés et démontrés dans le paragraphe II. Nous utilisons également la méthode de la transformation cosinus de la mesure spectrale. L'existence de symétries pour notre problème rend cette méthode assez simple. (Nous l'avons déjà utilisée dans [BD2] où nous démontrens la conjecture de Weyl pour des alcôves de systèmes de racines dans $\mathbb{R}^d$).

Dans le paragraphe III nous donnons de nouveaux exemples de domaines de S^2 pour lesquels on sait calculer explicitement Σ_D et Σ_N.

Nous montrons que la conjecture de Weyl n'est pas vraie pour ces domaines. Nous faisons ensuite quelques commentaires sur les exemples donnés par Gromes.

2. Conjecture de Weyl

1. Soit $\bar{M}$ une variété riemannienne compacte connexe C^∞ sans bord, de dimension d. Soit f une isométrie de $\bar{M}$. On désigne par $\bar{f}$ l'application induite par f sur le fibré unitaire cotangent $U^*\bar{M}$ de $\bar{M}$. Considérons l'hypothèse (*) pour f

(*) *l'ensemble* $\{x \in U^*\bar{M}\colon \exists t \neq 0,$ *le flot géodésique au temps* t, Φ^t, *est tangent à l'ordre infini à* $\bar{f}$ *en* $x\}$ *est de mesure nulle dans* U^*M.

Cette hypothèse est essentiellement l'hypothèse faite par Melrose dans [ME] (voir aussi [D–G] Theorem 3.5 p. 58).

2. THÉORÈME: *Soit* $\bar{M}$ *une variété riemannienne compacte connexe, sans bord de dimension 2 ou 3. Supposons que* $\bar{M}$ *admette une isométrie* s *telle que*

(i) $s^2 = Id$; (ii) $\mathrm{Fix}(s) = \{x \in \bar{M}\colon s(x) = x\}$ *est une sous-variété de codimension 1 de* $\bar{M}$. *Désignons par* M *la variété à bord* $\bar{M}/\{Id, s\}$ *de bord* $\partial M = \mathrm{Fix}(s)$. *Alors la conjecture de Weyl est vraie pour* M *dès que* Id *et* s *vérifient l'hypothèse* (*).

On peut généraliser le Théorème 2 de la manière suivante

3. THÉORÈME: *Soit* $\bar{M}$ *une variété riemannienne compacte, connexe sans bord de dimension 2 ou 3. Soit* Γ *un groupe fini d'isométries de* $\bar{M}$ *engendré par des réflexions par rapport à des sous-variétés de codimension 1. Désignons par* $M = \bar{M}/\Gamma$ *la variété à bord (dont le bord* ∂M *consiste en les ensembles* $\mathrm{Fix}(\gamma)$ *pour* $\gamma \in \Gamma$*) obtenue en faisant le quotient de* $\bar{M}$ *par* Γ. *Alors, si tout élément* γ *de* Γ *vérifie l'hypothèse* (*), *la conjecture de Weyl est vraie pour* M.

COROLLAIRE: *La conjecture de Weyl–Polya*

$$\exists \lambda_0, \forall \lambda \geq \lambda_0 \qquad N^-(\lambda) \leq C_d \operatorname{Vol}(M) \lambda^d \leq N^+(\lambda) \tag{**}$$

est satisfaite par les variétés qui vérifient les conditions des Théorèmes 2 *et* 3.

REMARQUES: (i) Comme variétés qui vérifient les conditions du Théorème 2, on peut prendre certaines sous-variétés de R^N admettant un hyperplan de symétrie. On peut aussi prendre certaines variétés hyperboliques à bord, M, la variété $\bar{M}$ étant alors le double de M.

(ii) Le Théorème 3 s'applique en particulier au cas suivant: soit H le demi-plan de Poincaré avec la métrique hyperbolique. Soit $M = T(p, q, r)$ un triangle géodésique de H d'angles $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ avec p, q, r entiers et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. On désigne par $T^*(p, q, r)$ le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés de $T(p, q, r)$ ([MS] chap. II). Alors, la conjecture de Weyl est vraie dans $M = T(p, q, r)$: en effet, on peut obtenir M comme quotient d'une variété $\bar{M}$ par un groupe fini (quotient de $T^*(p, q, r)$ par un sous-groupe normal [BL] p. 112). On peut également considérer des domaines polygonaux de H ou des domaines en dimension ≥ 3.

(iii) Notons que la condition (*) assure que la condition (ii) de Melrose citée au n° I.7 est satisfaite pour les variétés que nous considérons.

(iv) La restriction que nous faisons sur la dimension de M ($d = 2$ ou 3) est seulement destinée à simplifier les démonstrations (voir Lemme 18). Les Théorèmes 2 et 3 s'étendent au cas de la dimension quelconque, avec des groupes engendrés par des réflexions par rapport à des sous-variétés de codimension 1.

(v) Rappelons que la difficulté de (6) consiste à montrer l'existence d'un développement asymptotique pour $N^{\pm}(\lambda)$, et non pas à calculer explicitement les constantes. Une fois l'existence du développement garantie, on peut calculer les constantes au moyen du développement de l'équation de la chaleur (voir [ME] p. 273).

(vi) Comme cas particulier du Théorème 3, on retrouve le Théorème E-5 page 187 de [BD2].

PREUVE DU THÉORÈME 2: Désignons par $E(t, x, y)$ la solution fondamentale du problème de Cauchy dans $\bar{M}$ i.e.

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial 2}{\partial t^2}+\Delta_x\right)E(t,x,y)=0;\\&E(0,x,y)=\delta_x(y);\\&\frac{\partial E}{\partial t}(0,x,y)=0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

D'après [D–G] Theorem 1.1 p. 43, on a

$$WF(E)\subset\{(t,\tau;x,\xi;y,-\eta)\in\dot{T}^*\mathbb{R}\times\dot{T}^*\bar{M}\times\dot{T}^*\bar{M}:\\ (x,\xi)=\Phi^t(y,\eta)\text{ et }\tau+|\xi|=0\}$$

où $\dot{T}^*X=T^*X\setminus\{0\}$ pour une variété X; où Φ^t est le flot géodésique de $\bar{M}$ et $|\xi|$ la norme de ξ dans $T^*_x\bar{M}$.

Dans les lemmes qui suivent, nous faisons un usage systématique des propositions 1.3.3 p. 29 et 1.3.4 p. 31 de [DT], concernant le calcul des "wave front sets".

5. Lemme: *Soit $f:\bar{M}\to\bar{M}$ une isométrie de $\bar{M}$. Soit F_f l'application $F_f:\mathbb{R}\times\bar{M}\times\bar{M}\to\mathbb{R}\times\bar{M}\times\bar{M}$, $(t,x,y)\overset{F_f}{\mapsto}(t,x,f(y))$. Alors la distribution F_f^*E est bien défine et on a*

$$WF(F_f^*E)\subset\{(t,x;x,\xi;y,-\eta)\in\dot{T}^*\mathbb{R}\times\dot{T}^*\bar{M}\times\dot{T}^*\bar{M}:\\ \tau+|\xi|=0\text{ et }\Phi^t(f(y),{}^*f\eta)=(x,\xi)\}$$

(où ${}^*f$ est la transposée de l'application tangente à f).

■ F_f étant une submersion, F_f^*E existe. L'autre assertion résulte de [DT] *loc. cit.* ■

Le Lemme 5 implique que la distribution

$$e^{\pm}(t,x,y)=E(t,x,y)\pm F_s^*E(t,x,y)=:E(t,x,y)\pm E(t,x,s(y))\tag{6}$$

est bien définie sur $\bar{M}$. Elle vérifie (4) sur $\bar{M}$ quand on restreint le laplacien à l'espace des fonctions invariantes (+) ou anti-invariantes (−) par s: $e^{\pm}$ est donc la solution fondamentale du problème de Cauchy pour l'équation des ondes (4) dans M avec condition au bord de Neumann (+) ou de Dirichlet (−).

7. Lemme: *Soit $f:\bar{M}\to\bar{M}$ une isométrie. Alors, si Δ_f est l'application*

$$\Delta_f:\mathbb{R}\times\bar{M}\to\mathbb{R}\times\bar{M}\times\bar{M},\qquad \Delta_f(t,x)=(t,x,f(x)),$$

la distribution Δ_f^*E existe et vérifie

$$WF(\Delta_f^*E)\subset\{(t,\tau;x,\xi-{}^*f\eta)\in\dot{T}^*\mathbb{R}\times\dot{T}^*\bar{M}:\\ \tau+|\xi|=0 \text{ et } (x,\xi)=\Phi^t(f(x),\eta)\}.$$

■ Au calcule ([DT] *loc. cit.*)

$$\mathrm{N}_{\Delta_f}=\{(t,0;x,\xi;f(x),-{}^*f^{-1}\xi)\} \text{ d'où } N_{\Delta_f}\cap WF(E)=\varnothing$$

donc Δ_f^*E existe. L'assertion concernant les WF résulte de [DT] *loc. cit.* ■

8. Proposition: *Soit $\Delta:\mathbb{R}\times\bar{M}\to\mathbb{R}\times\bar{M}\times\bar{M}$, $\Delta(t,x)=(t,x,x)$ et soit $\pi:\mathbb{R}\times\bar{M}\to\mathbb{R}$, $\pi(t,x)=t$. Alors la distribution $\pi_*\Delta^*e^\pm$ existe et est tempérée. De plus*

$$WF(\pi_*\Delta^*e^\pm)\subset\{(t,\tau)\in\dot{T}^*\mathbb{R},\ \tau<0 \text{ et } \exists(x,\xi)\in\dot{T}^*\bar{M} \text{ tel que}\\ (x,\xi)=\Phi^t(f(x),{}^*f^{-1}(\xi)) \text{ avec } f=s \text{ ou } f=id\}.$$

■ L'application x étant propre, π_* s'étend aux distributions et donc, d'après le Lemme 7 $\pi_*\Delta^*e^\pm$ existe. L'assertion concernant les WF résulte de [DT] *loc. cit.* Pour démontrer que $x_*\Delta^*e^\pm$ est tempérée, on opère comme dans [D–G] p. 42. On considère l'opérateur, $U(t)=\exp(-it\sqrt{\Delta})$ sur $\bar{M}$. On considère, pour $\rho\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, l'opérateur $\int_{-\infty}^{\infty}U(t)\rho(t)dt$ qui est régularisant (on le montre en intégrant par parties et en utilisant le lemme de Sobolev) donc a un noyau C^∞, $K_\rho(x,y)$. On considère alors l'application

$$\mathscr{S}(R)\quad \rho\mapsto\int_{\bar{M}}K_\rho(x,x)dx\pm\int_{\bar{M}}K_\rho(x,s(x))dx$$

qui est un forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, donc un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, que l'on identifie facilement à $\pi_*\Delta^*e^\pm$. ■

Soit $\rho\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ une fonction positive et paire sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier $\hat{\rho}\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, soit paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\operatorname{supp}\hat{\rho}\subset[-1,1]$ et $\hat{\rho}(0)=1$ (cf. [BD2] Lemme 8 p. 194). On pose, pour $0<\delta\leq 1$, $\rho_\delta(\mu)=\dfrac{1}{\delta}\rho(\mu/\delta)$.

D'après la Proposition 8, on peut calculer

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\pi_*\Delta^* e^{\pm}(t)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt.$$

Posant $\hat{\sigma}^{\pm}(t) = \pi_*\Delta^* e^{\pm}(t)$, on peut écrire

$$\sigma^{\pm} * \rho_\delta(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}^{\pm}(t)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt.$$

Si nous designons par $\mu_j^{\pm} =: \sqrt{\lambda_j^{\pm}}$ les racines carrées des valeurs propres de Δ pour le problème de Neumann $(+)$ ou de Dirichlet $(-)$ dans M, nous avons

$$\tfrac{1}{2}\sum_j \{\rho_\delta(\mu - \mu_j^{\pm}) + \rho_\delta(\mu + \mu_j^{\pm})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\hat{\sigma}^{\pm}(t)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt. \tag{9}$$

En fait, il est facile de voir, par un argument analogue à celui de la Proposition 8 que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} &\hat{\sigma}^{\pm}(t,x) = \Delta^* e^{\pm}(t,x) \ \text{ et} \\ &\sigma^{\pm}(\cdot,x) * \rho_\delta(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}^{\pm}(t,x)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt \\ &\tfrac{1}{2}\sum_j \{\rho_\delta(\mu - \mu_j^{\pm}) + \rho_\delta(\mu + \mu_j^{\pm})\}\varphi_j^{\pm}(x)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}^{\pm}(t,x)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt \end{aligned} \tag{10}$$

où on désigne par $\{\varphi_j^{\pm}\}$ un système orthonormal complet de fonctions propres pour le problème de Neumann $(+)$ ou celui de Dirichlet $(-)$ dans M (i.e. de fonctions propres de $\bar{M}$, invariantes $(+)$ ou anti-invariantes $(-)$ par s).

Dans l'argument qui suit, nous traitons seulement le terme $\sum_j \rho_\delta(\mu - - \mu_j^{\pm})$ (qui revient à considérer $\exp(-it\sqrt{\Delta})$ au lieu de $\cos t\sqrt{\Delta}$); l'autre terme, $\sum_j \rho_\delta(\mu + \mu_j^{\pm})$ se traite de manière analogue (voir [BD1] on [BD2] Appendice).

Nous écrivons maintenant (voir [D–G] p. 52) (K étant un nombre positif)

$$\underset{(0)}{\int_{-\infty}^{-v} \sum_{j=1} \rho_\delta(\mu - \mu_j^{\pm})\,d\mu} + \underset{(\mathrm{I})}{\int_{-v}^{v} \sum_j \rho_\delta(\mu - \mu_j^{\pm})\,d\mu}$$

$$= \underset{(\mathrm{II})}{\sum_{\mu_j^\pm > v+k} \int_{-\infty}^{v} \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu} + \underset{(\mathrm{III})}{\sum_{|v-\mu_j^\pm|\le k} \int_{-\infty}^{v} \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu}$$

$$+ \underset{(\mathrm{IV})}{\sum_{\mu_j^\pm < v-k} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu} - \underset{(\mathrm{V})}{\sum_{\mu_j^\pm < v-k} \int_{v}^{\infty} \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu} \tag{11}$$

12. Lemme: *Sous les hypothèses des Théorèmes 2 et 3 sur $\bar{M}$ on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\mu\to\infty} \#\{j : |\mu - \mu_j^\pm| \le \varepsilon\}/\mu^{d-1} = \varepsilon\, \bar{C}_d \operatorname{Vol}(\bar{M})$$

où $\bar{C}_d$ est une constante universelle positive.

Admettant ce lemme pour l'instant nous pouvons écrire les majorations suivantes (où C désigne une constante positive)

$$(\mathrm{III}) \left| \sum_{|v-\mu_j^\pm|<K} \int_{-\infty}^{v} \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu \right| \le$$

$$\le \#\{j : |\mu_j - v| < K\} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(\mu)d\mu \le KCv^{d-1}$$

$$(\mathrm{IV})\ N^\pm(v) = \sum_{\mu_j^\pm < v-K} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu + \#\{j : v \ge \mu_j^\pm\} - \#\{j : v - K \ge \mu_j^\pm\}$$

i.e.

$$\left| N^\pm(v) - \sum_{\mu_j^\pm < v-K} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu \right| \le KCv^{d-1}$$

$$(0)\quad \int_{-\infty}^{-v} \sum_j \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu = \sum_j \int_{v+\mu_j^\pm}^{\infty} \rho_\delta(\mu)d\mu$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \#\{j : |\mu_j^\pm - k| < 1\} \int_{k+v}^{\infty} \rho_\delta(\mu)d\mu \le \sum_{k=0}^{\infty} k^{d-1}(v+k)^{-N}$$

(pour n'importe quel N assez grand) $\le Cv^{d-2}$.

$$(\mathrm{II})\quad \left| \sum_{\mu_j^\pm > v+K} \int_{-\infty}^{v} \frac{1}{\delta} \rho\left(\frac{\mu - \mu_j^\pm}{\delta}\right) d\mu \right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v+(k+1)K \ge \mu_j^\pm \ge v+kK} \int_{\frac{kK}{\delta}}^{\infty} \rho(\zeta)d\zeta$$

$$\le C \sum_{k=1}^{\infty} K(v+kK)^{d-1} \int_{\frac{kK}{\delta}}^{\infty} \rho(\zeta)d\zeta$$

$$\leq CK \int_0^\infty (v + Kt)^{d-1} \int_{\frac{Kt}{\delta}}^\infty \rho(\zeta)d\zeta\, dt$$

$$\leq C \int_0^\infty [(v + \delta x)^d - (v + K)^d]\rho(x)dx \leq C(\delta + K)v^{d-1}.$$

On peut maintenant prendre K et δ petits.

Le terme (V) se traite comme le terme (II). Il en résulte le

13. Lemme: *On a*

$$N^\pm(v) = \int_{-v}^{v} \sum_{j=1}^{\infty} \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)d\mu + o(\delta)v^{d-1}.$$

Pour démonstrer le Lemma 12 et terminer la preuve du Théorème 2, nous allons étudier le comportement de
$\sum_{j=1}^\infty \rho_\delta(\mu - \mu_j^\pm)$ et $\sum_{j=1}^\infty \rho_\delta(\mu + \mu_j^\pm)$.

Avec les notations (10), on peut écrire (on tient compte de ce que $M \cup s(M) \cup \partial M = \bar{M}$)

$$2\sigma_\delta^\pm(\mu) =: \int_{\bar{M}} \sigma_\delta(\mu, x)dx \pm \int_{\bar{M}} \sigma_\delta^\cdot(\mu, x)dx$$

où on a posé

$$\sigma_\delta(\mu, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{it\mu}\, \hat{\sigma}(t, x)\hat{\rho}_\delta(t)dt$$

$$\sigma_\delta^\cdot(\mu, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{it\mu}\, \hat{\sigma}^\cdot(t, x)\hat{\rho}_\delta(t)dt$$

et $\hat{\sigma}(t, x) = E(t, x, x)$ et $\hat{\sigma}^\cdot(t, x) = E(t, x, s(x))$ (on applique le Lemme 7 avec $f = id$ et $f = s$). Le Théorème 3.5 p. 58 de [D–G] (voir sa démonstration) dit que

$$\int_{\bar{M}} \sigma_\delta(\mu, x)dx = C\,\mathrm{Vol}(\bar{M})\mu^{d-1} + o_\delta(\mu^{d-1}), \tag{14}$$

le $o_\delta(\mu^{d-1})$ vient de l'hypothèse (*) faite sur $\bar{M}$. On a aussi

$$\int_{-v}^{v} \left(\int_{\bar{M}} \sigma_\delta(\mu, x)dx \right) d\mu = c_d\,\mathrm{Vol}(\bar{M})v^d + o_\delta(v^{d-1}). \tag{15}$$

En effet, soit $\alpha \in C_0^\infty(R)$ a support petit près de 0. On peut alors écrire

$$\int_{\bar{M}} \sigma_\delta(\mu, x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{M}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}(t,x)\hat{\rho}_\delta(t)[\alpha(t) + (1-\alpha(t))]\,dt$$

La partie de l'intégrale avec $\alpha(t)$ donne un développement asymptotique en puissances de μ: $c_1\mu^{d-1} + c_3\mu^{d-3} + \ldots$ (cf. [D–G] Proposition 2.1 p. 46) qui s'intègre bien. La partie en $(1-\alpha(t))$ donne une contribution en $o_\delta(\mu^{d-1})$ à cause de l'hypothèse (*) sur le flot géodésique de $\bar{M}$ (on applique un argument de phase stationaire: cf. [D–G] p. 58). Quand on intègre cette deuxième partie de l'intégrale, on trouve

$$\int_{-\nu}^{\nu}\int_{\bar{M}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}(t,x)\hat{\rho}_\delta(t)(1-\alpha(t))\,dt\,dx\,d\mu$$

$$= 2\int_{\bar{M}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t\nu}{t}(1-\alpha(t))\hat{\sigma}(t,x)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt\,dx$$

et comme $0 \notin \operatorname{supp}(1-\alpha)$, on peut encore appliquer l'argument ci-dessus et conclure que l'on a sur $o_\delta(\nu^{d-1})$.

Soit r le rayon d'injectivité de $\bar{M}$ (r > 0 car $\bar{M}$ est compacte). On choisit une fonction C^∞ positive et paire $\theta: \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que $\theta(t) = 1$ si $|t| \le r/8$ et $\theta(t) = 0$ si $|t| \ge r/4$. On pose $\theta = 1 - \psi$. Comme on a $\operatorname{supp}\hat{\sigma}^{\cdot} \subset \{(t,x): \overline{xs(x)} \leqq |t|\}$ (cf. [TR]) on en déduit que $\theta(t)\hat{\sigma}^{\cdot}(t,x) \neq 0$ seulement quand x est dans un petit voisinage du bord $\partial M = \operatorname{Fix}(s)$ de M. On peut écrire

$$\int_{\bar{M}} \sigma_\delta^{\cdot}(\mu, x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{M}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}^{\cdot}(t,x)\theta(t)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{M}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}^{\cdot}(t,x)\psi(t)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt.$$

L'hypothèse (*) sur le flot géodésique implique immédiatement (comme ci-dessus) que l'on a

$$\int_{\bar{M}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}^{\cdot}(t,x)\psi(t)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt\,dx = o_\delta(\mu^{d-1})$$

et

$$\int_{-\nu}^{\nu}\int_{\bar{M}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\,\hat{\sigma}^{\cdot}(t,x)\psi(t)\hat{\rho}_\delta(t)\,dt\,dx\,d\mu = o_\delta(\nu^{d-1}).$$

Il reste à étudier l'intégrale qui fait intervenir θ. Comme on a $\operatorname{supp}\theta \subset [-r/4, r/4]$, on travaille au voisinage de ∂M et on peut utiliser les résultats de [BD1]. Dans ce qui suit, nous poserons $\alpha(t) = \theta(t)\hat{\rho}_\delta(t)$ et comme $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, le paramètre δ n'intervient plus vraiment. Afin de simplifier les calculs, nous supposerons que $d = 2$ ou $d = 3$.

Cas $d = 3$. Pour $x \notin \partial M$, on peut écrire (cf. [BD1])

$$\hat{\sigma}^{\cdot}(t,x) = u_0(x)|t|\delta'(\overline{xs(x)}^2 - t^2) + u_1(x)|t|\delta(\overline{xs(x)}^2 - t^2) + c(t,x)|t|$$

où la fonction c est continue en (t,x). Dans le voisinage tubulaire de ∂M, on prend les coordonnées suivantes: $z = 2\,\overline{xs(x)}$ et $\zeta \in \partial M$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu,x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos t\mu\,\hat{\sigma}^{\cdot}(t,x)\alpha(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}u_0(z,\zeta)\left[\mu\frac{\sin\mu z}{2z}\alpha(z) - \frac{\cos z\mu}{2z}\alpha'(z)\right] + \dots \\
&\quad \dots + \frac{u_1(z,\zeta)}{2\pi}\cos z\mu\,\alpha(z) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos t\mu\,\alpha(t)tc(t,z,\zeta)\,dt.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_M \sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu,x)\,dx &= \int_{\partial M}\int_0^a \sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu,z,\zeta)\,dz\,d\zeta \\
&= \left(\int_{\partial M} u_0(0,\zeta)\,d\zeta\right)\mu\int_0^a \frac{\sin z\mu}{z}\,dz + 0(1)
\end{aligned}$$

(en effet, $\alpha'(0) = 0$ car α est paire en t). En interprétant le premier terme $\int_{\partial M} u_0(0,\zeta)\,d\zeta$ (cf. [BD1]) on trouve

$$\int_M \sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu,x)\,dx = C\,\mathrm{Vol}(\partial M)\mu + o(\mu). \tag{16}$$

On en déduit aussi que

$$\int_{-\nu}^{\nu}\int_M \sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu,x)\,d\mu\,dx = C\,\mathrm{Vol}(\partial M)\nu^2 + o(\nu^2).$$

Cas $d = 2$. On écrit de même

$$\hat{\sigma}^{\cdot}(t,x) = u_0(x)|t|(\overline{xs(x)}^2 - t^2)_-^{-\frac{3}{2}} + u_1(x)|t|(\overline{xs(x)}^2 - t^2)_-^{-\frac{1}{2}} + |t|\,c(t,x),$$

d'où

$$\sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu, z, \zeta) = u_0(z, \zeta)\mu \int_0^{\infty} \sin t\mu\, \alpha(t)(z^2 - t^2)_-^{-\frac{1}{2}}\, dt + 0(1),$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int_M \sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu, z, \zeta)\, d\mu\, dz\, d\zeta \\
&\quad = C\,\mathrm{Vol}(\partial M)\mu \int_0^a \int_0^{\infty} \sin tz\mu\, \beta(z, t)(1 - t^2)_-^{-\frac{1}{2}}\, dt + o(1) \\
&\quad = 0(\mu), \text{ avec } \beta(z, t) = \alpha(zt)u_0(z, \zeta).
\end{aligned} \tag{16'}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
&\int_{-\nu}^{\nu} \int_M \sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu, z, \zeta)\, dz\, d\zeta\, d\mu \\
&\quad = C\,\mathrm{Vol}(\partial M) \int_{-\nu}^{\nu} \mu \int_0^a \int_0^{\infty} \sin tz\mu\, \beta(z, t)(1 - t^2)_-^{-\frac{1}{2}}\, dt + o(\mu).
\end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned}
&\mu \int_0^a \sin tz\mu\, \beta(z, t)\, dz \\
&\quad = \left(\frac{1}{t}\beta(t, 0) - \frac{\cos at\mu}{a}\beta(t, a)\right) + \int_0^a \cos tz\mu\, \beta'(z, t)\, dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\nu}^{\nu} \mu \int_0^a \sin tz\mu\, \alpha(zt)\, dz\, d\mu \\
&\quad = 2\left(\frac{\nu}{t}\beta(t, 0) - \frac{\sin at\nu}{at^2}\beta(t, a)\right) + 2\int_0^a \frac{\sin tz\mu}{tz}\beta'(z, t)\, dz.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\int_{-\nu}^{\nu} \int_M \sigma^{\cdot}_{\alpha}(\mu, z, \zeta)\, dz\, d\zeta\, d\mu = C\,\mathrm{Vol}(\partial M)\nu + o(\nu). \tag{17'}$$

On déduit de (16), (16'), (17) et (17') ainsi que de (15').

18. Lemme:

(i) $\int_M \sigma^{\cdot}(\mu, x)\,dx = o_\delta(\mu^{d-1})$.

(ii) $\int_{-\nu}^{\nu}\int_M \sigma^{\cdot}(\mu, x)\,dx\,d\mu = C\,\mathrm{Vol}(\partial M)\nu^{d-1} + o_\delta(\nu^{d-1})$.

On démontre alors le Lemme 12 comme le Théorème 3.5 p. 58 de [D–G], en utilisant le Lemme 18 et les relations (14) et (15).

On démontre le Théorème 2 en utilisant maintenant le Lemme 18, l'égalité (15) ainsi que le Lemme 13: on a

$$\int_{-\nu}^{\nu}\int_M \sigma_\delta(\mu, x)\,dx\,d\mu \pm \int_{-\nu}^{\nu}\int_M \sigma_\delta^{\cdot}(\mu, x)\,dx\,d\mu$$
$$= C_d\,\mathrm{Vol}(M)\nu^d \pm C_d'\,\mathrm{Vol}(\partial M)\nu^{d-1} + o(\nu^{d-1})$$

d'où le Théorème 2.

Pour démontrer le Théorème 3 on écrit de même

$$e^{\pm}(t, x, y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varepsilon_\pm(\gamma)E(t, x, \gamma(y))$$

où $\varepsilon_\pm(\gamma) = 1$ si on étudie le problème de Neumann et $\varepsilon_-(\gamma) = (-1)^{\mathrm{sign}(\gamma)}$ si on étudie le problème de Dirichlet où $\mathrm{sign}(\gamma) = 0$ si γ preserve l'orientation et 1 sinon.

On applique alors la même méthode que pour le Théorème 2. Au doit maintenant considérer les contributions de $e^{\pm}$ près des ensembles $\mathrm{Fix}(\gamma)$. Dans le cas où $\mathrm{Fix}(\gamma)$ est de dimension $(d-1)$ ou applique le même argument que ci-dessus (Lemme 18). Quand on a codim $\mathrm{Fix}(\gamma) \geq 2$ on applique le lemme suivant

19. Lemme:

$$\int_{-\nu}^{\nu}\int_M \sigma_\delta^\gamma(\mu, x)\,dx\,d\mu = o_\delta(\nu^{d-1}) \;\; et \;\; \int_M \sigma_\delta^\gamma(\mu, x) = o_\delta(\mu^{d-1}).$$

■ Il suffit de regarder ce qui se passe près de $\mathrm{Fix}(\gamma)$. De non-veau on étudie le cas $d = 3$ puis le cas $d = 2$. On prend des coordonnées "polaires" dans le voisinage tubulaire de $\mathrm{Fix}(\gamma)$. On écrit, quand $d = 3$

$$\int_{\mathrm{Tub}(\mathrm{Fix}(\gamma))} \sigma^\gamma(\mu, x)\,dx = \mu\int_0^a z^{\beta-1}\sin z\mu\, u_0(z, \theta; \zeta)\alpha(z)\,dz\,d\theta\,d\zeta + \dots$$

avec $\beta = 3$ ou 2. On obtient donc un terme de la forme $0(\mu)$.

D'où on déduit

$$\begin{aligned}
&\int_{-v}^{v}\int_{\mathrm{Tub}(\mathrm{Fix}(\gamma))} \sigma^{\gamma}(\mu,x)\,dx\,d\mu \\
&\quad = v\int_0^a z^{\beta-2}\cos zv\, u_0(z,\theta,\zeta)\alpha(z)\,dz\,d\theta\,d\zeta + \dots \\
&\quad \dots + \int_0^a z^{\beta-2}\frac{\sin zv}{z}u_0(z,\theta,\zeta)\alpha(z)\,dz\,d\theta\,d\zeta \dots \\
&\quad = o(v^2)
\end{aligned}$$

(les ... sont des termes d'ordre inférieur en v).

Quand $d = 2$, on a (les ... sont des termes d'ordre inférieur en v)

$$\begin{aligned}
&\int_{-v}^{v}\int_{\mathrm{Tub}(\mathrm{Fix}(\gamma))} \sigma^{\gamma}(t,x)\,dx\,d\mu \\
&\quad = v\int_0^{\infty}\int_0^a \frac{z^2\cos vzt}{zt}\alpha(zt)(1-t^2)_-^{-\frac{1}{2}}\,dt\,dz + \dots = o(v)
\end{aligned}$$

(en effet, quand $|vz| \leq 1$ c'est clair à cause du terme en z et quand $|vz| \geq 1$, on peut appliquer le fait que

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos vzt}{t}\alpha(zt)(1-t^2)_-^{-\frac{1}{2}}\,dt = 0(vz)^{-\frac{1}{2}}) \quad \blacksquare$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.

3. Sur certains domaines de S^2

Dans [B–B], on donnait une étude du spectre de certains domaines de la sphère S^n. En particulier, pour S^2, on trouvait les spectres des pavés fondamentaux de certains pavages de S^2. Nous nous proposons ici de déterminer les spectres des triangles géodésiques de la sphère S^2 dont les angles sont de la forme $\left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\right)$ où $p,q,r \in \mathbb{N}$, $p,q,r \geq 2$. Comme le triangle est sphérique, on doit avoir $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1$. Les seules possibilités sont alors les triplets suivants ([MS] p. 71 ff)

$(2,3,3) \leftrightarrow$ groupe tétraédral $\leftrightarrow$ système de racines A_3 ou D_3;

$(2,3,4) \leftrightarrow$ groupe octaédral $\leftrightarrow$ système de racines B_3 ou C_3;

$(2,3,5) \leftrightarrow$ groupe icosaédral;
$(2,2,r) \leftrightarrow$ groupe diédral d'ordre $2r \geq 4$.

Désignons par $\Omega =: \Omega(p,q,r)$ un triangle sphérique d'angles $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ où (p,q,r) est l'un des triplets ci-dessus. On se propose de déterminer les spectres de ce triangle pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann pour le laplacien sur S^2. On désigne par $T(p,q,r)$ le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés de $\Omega(p,q,r)$.

1. Lemme: *Les fonctions propres du problème de Dirichlet (resp. de Neumann) pour le laplacien dans $\Omega(p,q,r)$ sont exactement les fonctions propres du laplacien sur S^2 qui vérifient la condition*

$$\forall\, x \in S^2 \quad \forall\, g \in T(p,q,r) \qquad f(g(x)) = \varepsilon(g) f(x) \tag{2}$$

où $\varepsilon(g) = \operatorname{Det}(g)$ (*resp.* $\varepsilon(g) = 1$).
■ [B–B] n° 5 à 9 ■

En particulier, les valeurs propres sont de la forme $k(k+1)$ pour certains nombres $k \in \mathbb{N}$. Posons

$m_k^{\cdot}$ = multiplicité de $k(k+1)$ comme valeur propre du problème de Dirichlet, $\cdot = D$ (resp. du problème de Neumann, $\cdot = N$).

(Nous posons $m_k^{\cdot} = 0$ si $k(k+1)$ n'est pas valeur propre.)

Comme on a toujours $0 \leq m_k \leq 2k+1$, les fonctions

$$F^{\cdot}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k^{\cdot} z^k, \qquad \cdot = D \text{ ou } \cdot = N \tag{3}$$

sont bien définies dans un voisinage de 0. Désignons par P_k l'ensemble des polynômes homogènes de degré k trois variables et par $P_k^{\cdot}$ le sous-ensemble de ceux qui vérifient (2) (avec $\varepsilon(g) = 1$ si $N = \cdot$ et $\varepsilon(g) = \operatorname{Det}(g)$ si $D = \cdot$). Posons $p_k^{\cdot} = \dim P_k^{\cdot}$. Alors on démontre, comme dans [B–B] que

$$F^{\cdot}(z) = (1-z^2) S^{\cdot}(z) :=: (1-z^2) \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{\cdot} z^k. \tag{4}$$

La série $S^N(z)$ n'est autre de la série de Poincaré du groupe $T(p,q,r)$ ([BI] p. 102). Enfin, on a

$$S^D(z) = z^d S^N(z) \text{ où } d = \#\,\text{réflexions dans le groupe } T(p,q,r). \tag{5}$$

Il est clair que les séries $F^{\cdot}(z)$ déterminent les valeurs propres pour le domaine $\Omega(p,q,r)$. On a alors avec les notations évidentes

6. THÉORÈME:

(i) $F^N_{(2,2,r)}(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)(1-z^r)}$, $\quad d = r+1$

(ii) $F^N_{(2,3,3)}(z) = \dfrac{1}{(1-z^3)(1-z^4)}$, $\quad d = 6$

(iii) $F^N_{(2,3,4)}(z) = \dfrac{1}{(1-z^4)(1-z^6)}$, $\quad d = 9$

(iv) $F^N_{(2,3,5)}(z) = \dfrac{1}{(1-z^6)(1-z^{10})}$, $\quad d = 15$

■ On désigne par L, M, N les 3 réflexions par rapport aux murs de la chambre $\Omega(p,q,r)$ du groupe $T(p,q,r)$. On introduit la transformation de Coxeter $C = LMN$ et h son ordre. On a alors ([BI] V. 16)

$$\mathrm{Det}(t\, Id - C) = \prod_{j=1}^{3} \left(t - \exp\frac{2i\pi m_j}{h}\right)$$

où $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq h$ (*op. cit.* p. 118). Si $T(p,q,r)$ est irréductible on a ([BI] V. 3.7)

(i) $m_j + m_{4-j} = h \quad 1 \leq j \leq 3$ *op. cit.* p. 118 (2)

(ii) $d = \frac{3}{2}h$ *op. cit.* p. 119 Théorème 1 (ii)

(iii) $(m_1+1)(m_2+1)(m_3+1) = \# T(p,q,r)$ *op. cit.* p. 121 Prop. 3 & V. 3 Thm 3

(iv) $S^N(z) = \prod_{j=1}^{3} (1 - z^{m_j+1})^{-1}$

On en déduit facilement les assertions (ii)–(iv) du théorème. Le groupe $T(2,2,r)$ n'est pas irréductible, on le décompose en $\{\pm 1\} \times T(r)$ où $T(r)$ est engendré par L, M tels que $L^2 = M^2 = 1$ et $(LM)^2 = 1$ ■

On peut aussi considérer le domaine limité par deux demi-grands cercles passant par les pôles et formant un angle $\dfrac{\pi}{r}\, r \in \mathbb{N}$: soit $\Omega(r)$ ce domaine. On a, avec les notations évidentes

7. PROPOSITION: *Pour $\Omega(r)$ on a*

$$F^N_r(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^r)} \quad \textit{et } d = r.$$

8. REMARQUE: Les cas (ii) et (iii) du Théorème 6 et les cas $r = 1$ et $r = 2$ de la Proposition 7 étaient déjà traités dans [B–B].

PROPOSITION: *La conjecture de Weyl n'est pas vraie pour les domaines de la forme $\Omega(p,q,r)$ ou $\Omega(r)$.*

■ Supposons que Ω soit un domaine pour lequel la conjecture de Weyl est vraie. Alors on a

$$N^{\pm}(\lambda) = C\,\mathrm{Vol}(\Omega)\lambda^2 \pm C'\,\mathrm{Vol}(\partial M)\lambda + o(\lambda).$$

On an déduit que

$$N^{\pm}(\lambda+\varepsilon) - N^{\pm}(\lambda-\varepsilon) = 4C\,\mathrm{Vol}(\Omega)\varepsilon\lambda \pm 2C'\,\mathrm{Vol}(\partial M)\varepsilon + o(\lambda).$$

Prenons $\varepsilon \leqq \frac{1}{10}$ et λ assez grand. Alors on a $N^{\pm}(\lambda+\varepsilon) - N^{\pm}(\lambda-\varepsilon) > 0$ i.e. $\exists j$ tel que $\sqrt{\lambda_j^{\pm}} \in [\lambda-\varepsilon\ \lambda+\varepsilon]$. Pour les domaines du type ci-dessus, les valeurs propres sont de la forme $\lambda_j^{\pm} = k_j(k_j+1)$, d'où

$$\sqrt{\lambda_j^{\pm}} = k_j + \tfrac{1}{2} + 0(1/k_j)$$

et la propriété d'"équirépartition" ci-dessus n'est certainement pas vérifiée ■

Le fait que la conjecture de Weyl ne soit pas toujours satisfaite pour les domaines de S^2 a déjà été remarqué par Gromes ([GS]).

Il considère des domaines de la forme $\Omega(\alpha)$ qui sont limités par deux demi-grands cercles passant par les pôles et faisant entre eux un angle $\dfrac{\pi}{\alpha}$. On a alors

10. PROPOSITION (Gromes, [GS]): *Les valeurs propres du problème de Dirichlet (resp. de Neumann) pour le laplacien dans $\Omega(\alpha)$ sont les nombres*

$$\lambda_{m,n}^{\alpha} = (m\alpha+n)(m\alpha+n+1) \qquad m \in \mathbb{N}^{\cdot},\ n \in \mathbb{N}$$

(resp. $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$). La multiplicité de la valeur propre λ_{m_0,n_0} est égale au nombre de solutions dans $\mathbb{N}^{\cdot} \times \mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) de l'équation

$$m\alpha + n = m_0\alpha + n_0.$$

De plus, si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ la conjecture de Weyl est vraie, i.e.

$$N_{\alpha}^{\pm}(\lambda) = \frac{\alpha}{2}\lambda^2 \pm \tfrac{1}{2}\lambda + o(\lambda);$$

si $\alpha \in \mathbb{Q}$ *la conjecture de Weyl n'est pas vraie, i.e.* $\left(N_\alpha^{\pm}(\lambda) - \frac{\alpha}{2}\lambda^2\right)\lambda^{-1}$ *n'a pas de limite quand* λ *tend vers* $+\infty$.

11. REMARQUE: Quand $\alpha = r \in \mathbb{N}$ on retrouve le résultat de la Proposition 7.

Quelques remarques sur l'exemple de Gromes:

(i) si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ on voit que les valeurs propres $\lambda_{m,n}^\alpha$ sont toutes simples; quand on passe des valeurs rationnelles de α, les multiplicités ont des sauts importants;

(ii) posons $\mu_{m,n}^\alpha = \sqrt{\lambda_{m,n}^\alpha + 1/4}$. Considérons l'ensemble Σ_α des points d'accumulations des $\mu_{m,n}^\alpha - \mu_{k,l}^\alpha$, $(k,l),(m,n) \in \mathbb{N}^\cdot \times \mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). On a visiblement:

Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $\Sigma_\alpha = \mathbb{R}$ et si $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\Sigma_\alpha \neq \mathbb{R}$.

Cette propriété de l'ensemble Σ_α est à comparer avec l'argument donné dans la preuve de la Proposition 9.

Rappelons (cf. [GN] ou [HN]) que si M est une variété compacte, sans bord, et si on désigne par μ_j les racines carrées des valeurs propres, on peut aussi considérer l'ensemble Σ des points d'accumulation des $\mu_j - \mu_k$. On a alors

(i) si $\Sigma = \mathbb{R}$, $N(\lambda) = \#\{j : \mu_j \leq \lambda\} = C_d \operatorname{Vol}(M)\lambda^d + o(\lambda^{d-1})$

(ii) si $\Sigma \neq \mathbb{R}$, le flot géodésique est périodique.

Il serait intéressant, dans le cas d'une variété à bord, d'avoir un résultat analogue (pour la partie (i) on peut attendre: si $\Sigma = \mathbb{R}$, la conjecture de Weyl est vraie).

Comme nous l'avons vu au paragraphe II (Corollaire du Théorème 3), la conjecture de Weyl–Polya est une forme faible de la conjecture de Weyl. Il n'est pas difficile de vérifier que la conjecture de Weyl–Polya est satisfaite pour les domaines de la sphère étudiés plus haut (il suffit en effet de considérer les fonctions génératrices).

REFERENCES

[B–B] P. BÉRARD and G. BESSON: Spectres et groupes cristallographiques II: Domaines Sphériques. *Ann. Inst. Fourier 30:3* (1980).

[BD1] P. BÉRARD: On the wave equation on a Riemannian manifold without conjugate points. *Math. Z. 155* (1977) 249–276.

[BD2] P. BÉRARD: Spectres et groupes cristallographiques I: Domaines Euclidiens. *Inventiones Math. 58* (1980) 179–199.

[BI] N. BOURBAKI: Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 4 à 6, Act. Scient. et Industrielles 1337. Paris: Hermann 1968.

[BL] A. BOREL: Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces. *Topology 2* (1963) 111–122.