COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-YVES CHARBONNEL

Sur les orbites de la représentation coadjointe

Compositio Mathematica, tome 46, nº 3 (1982), p. 273-305

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1982__46_3_273_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 46, Fasc. 3, 1982, pag. 273–305

SUR LES ORBITES DE LA REPRESENTATION COADJOINTE

Jean-Yves Charbonnel

Introduction

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k, Γ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{a}$, qui opère dans le dual $\mathfrak{a}^*$ par la représentation coadjointe. On s'intéresse à la propriété suivante:

(P) *Il existe une partie Γ-stable U de $\mathfrak{a}^*$, ouverte et dense dans $\mathfrak{a}^*$ pour la topologie de Zariski, telle que toute Γ-orbite contenue dans U soit fermée dans $\mathfrak{a}^*$.*

La propriété (P) n'est pas toujours vraie. Dans (6) on l'a établie lorsque le radical de $\mathfrak{a}$ est nilpotent et la conjecture a été émise que (P) est vraie lorsque $\mathfrak{a}$ est unimodulaire. On a établi dans (4) la propriété (P) lorsque $\mathfrak{a}$ est résoluble et vérifie la propriété:

(P′) *Il existe dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{a})$ un élément semi-invariant, non nul, de poids $x \to -\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} x$ pour l'action adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $S(\mathfrak{a})$.*

La propriété (P′) est moins stricte que l'unimodularité. On démontre ici que l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ vérifie la propriété (P) si elle vérifie la propriété (P′). D'après le lemme 1.2 de (4), il suffit de démontrer que lorsque $\mathfrak{a}$ vérifie la propriété (P′), alors $\mathfrak{a}^*$ contient une partie Γ-stable U de $\mathfrak{a}^*$, dense dans $\mathfrak{a}^*$ pour la topologie de Zariski, telle que toute Γ-orbite contenue dans U soit fermée dans $\mathfrak{a}^*$. D'autre part, la démonstration de (4, théorème 3.2) prouve que l'on peut se ramener au cas $k = \mathbb{C}$.

0010–437X/82060273–33$00.20/0

On suppose dans ce qui suit $k = \mathbb{C}$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à $\mathfrak{a}$ et G le groupe de Lie connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le groupe G opère dans $\mathfrak{a}^*$ via la représentation coadjointe. On peut supposer que pour presque tout f dans $\mathfrak{a}^*$, $G.\ f = \Gamma.\ f$. D'après (15, théorème 2.2) et (6, théorème 2.2), il existe un élément homogène, non nul, q de $S(\mathfrak{a})$, semi-invariant pour l'action de $\mathfrak{a}$ dans $S(\mathfrak{a})$ et tel que le complémentaire U de l'ensemble des zéros de q dans $\mathfrak{a}^*$ vérifie les conditions suivantes:

(1) pour tout f dans $U, G.\ f = \Gamma.\ f$ et l'orbite $\Gamma.\ f$ est de dimension maximale.

(2) pour tout f dans U, $\mathfrak{a}$ contient une polarisation résoluble en f, satisfaisant la condition de Pukansky.

Si μ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}^*$ alors il résulte de la propriété (P′) que $\mathfrak{a}^*$ contient une partie V, Γ-stable, de complémentaire μ-négligeable telle que toute Γ-orbite contenue dans V porte une mesure positive Γ-invariante qui définit une distribution tempérée sur $\mathfrak{a}^*$. Après avoir défini l'admissibilité (cf. 1.19) pour une forme linéaire f sur $\mathfrak{a}$, on démontre que l'ensemble des formes linéaires admissibles dont l'orbite sous Γ est tempérée (cf. 2.3) est Zariski dense dans $\mathfrak{a}^*$. Soit f une forme linéaire admissible sur $\mathfrak{a}$, appartenant à l'ouvert U ci-dessus. A toute polarisation résoluble $\mathfrak{b}$ en f, satisfaisant la condition de Pukanszky, on sait associer une représentation unitaire qui est somme finie de représentations unitaires irréductibles. En outre, si l'orbite $\Gamma.\ f$ est tempérée, ces représentations sont complètement continues. Utilisant un théorème de J.M.G. Fell sur la continuité de l'induction, on démontre alors que l'orbite $\Gamma.\ f$ est fermée dans $\mathfrak{a}^*$.

Ce travail comprend trois parties. Dans le première, on définit les formes linéaires admissibles fortement régulières sur $\mathfrak{a}$. Dans la deuxième, après avoir défini les orbites tempérées, on montre que la réunion des orbites tempérées admissibles est Zariski dense dans le dual de $\mathfrak{a}$, lorsque $\mathfrak{a}$ vérifie la propriété (P′). Enfin, dans la troisième partie, on démontre l'implication (P′) $\Rightarrow$ (P).

§0. Notations et resultats preliminaires

0.1. Si V est un espace vectoriel, on note V^* son dual et $S(V)$ son algèbre symétrique. Si V est réel ou complexe de dimension finie, et si μ est une mesure positive sur une partie borélienne de V, on dit que μ est tempérée s'il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $\int (1 + \|x\|^2)\, d\mu(x) < +\infty$ (où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur V); en particulier, μ peut être alors considérée comme une mesure de Radon sur V.

0.2. Si G est un groupe de Lie réel, on note $\mathscr{D}(G)$ l'ensemble des fonctions complexes indéfiniment différentiables à support compact sur G, $\mathscr{K}(G)$ l'ensemble des fonctions complexes continues à support compact sur G, $C^*(G)$ la C^*-algèbre de G, Prim $C^*(G)$ l'espace des idéaux primitifs de $C^*(G)$, G_0 la composante neutre de G. Si $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G et si f est une forme linéaire sur un idéal de $\mathfrak{g}$, on note $G(f)$ et $\mathfrak{g}(f)$ les stabilisateurs de f dans G et dans $\mathfrak{g}$.

0.3. Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie, on note $U(\mathfrak{a})$ son algèbre enveloppante.

0.4. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle, on note $\mathfrak{g}_{\mathrm{C}}$ sa complexifiée. On appelle involution canonique de $U(\mathfrak{g}_{\mathrm{C}})$ l'unique antiautomorphisme antilinéaire de $U(\mathfrak{g}_{\mathrm{C}})$ qui transforme x en $-x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

0.5. Dans tout l'article, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

0.6. Soient $\mathfrak{a}'$ une algèbre de Lie algébrique sur le corps k, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{a}'$ dont l'enveloppe algébrique est égale à $\mathfrak{a}'$ (d'où $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}']$). On dit que le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) s'il existe un ouvert de Zariski, non vide, U de $\mathfrak{a}^*$ tel que pour tout f dans U et pour tout f' dans $\mathfrak{a}'^*$, prolongeant f, on ait $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$.

0.7. Lemme: *Soient* $\mathfrak{a}'$ *et a comme en* 0.6. *Notons* Γ *le groupe adjoint de* $\mathfrak{a}'$. *Il existe un idéal* $\mathfrak{a}''$ *de* $\mathfrak{a}'$, *contenant* $\mathfrak{a}$, *qui vérifie les conditions suivantes*:

(1) *le couple* $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')$ *vérifie l'hypothèse* (*).

(2) *Notons* π *l'application canonique de* $(\mathfrak{a}'')^*$ *sur* $\mathfrak{a}^*$. *Il existe un ouvert de Zariski de* $\mathfrak{a}^*$ *non vide* U, Γ-*invariant, tel que pour tout* f'' *dans* $\pi^{-1}(U)$ *on ait*: $\pi^{-1}(\Gamma.\pi(f'')) = \Gamma \cdot f''$.

On peut trouver un ouvert de Zariski, non vide, U' de $(\mathfrak{a}')^*$ et un sous-espace vectoriel V de $\mathfrak{a}'$ tel que, pour tout f' dans U', V soit un supplémentaire de $\mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}'$. Notons $\mathfrak{a}''$ l'idéal $V + \mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}'$ et π l'application canonique de $(\mathfrak{a}')^*$ sur $\mathfrak{a}^*$. Soit U l'image de $\Gamma \cdot U$ par l'application canonique de $(\mathfrak{a}')^*$ sur $\mathfrak{a}^*$. La partie U de $\mathfrak{a}^*$ est un ouvert de Zariski, non vide, Γ-invariant de $\mathfrak{a}^*$. Si f'' est dans $\pi^{-1}(U)$ et si f' est un élément de $(\mathfrak{a}')^*$ qui prolonge f'', alors il existe γ dans Γ tel que

$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}'(\gamma \cdot f')$. Comme $\mathfrak{a}''$ est invariant par Γ, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}'(f')$. Le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')$ vérifie donc l'hypothèse (*). De l'égalité $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' + \mathfrak{a}'(f')$, on tire l'inclusion $\mathfrak{a}''(f'') \subset \mathfrak{a}'(f')$. Par ailleurs, $\mathfrak{a}''(f'') \subset V + \mathfrak{a}$. Comme la somme de V et de $\mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$ est directe, on voit que $\mathfrak{a}''(f'')$ est contenu dans $\mathfrak{a}$; d'où $\dim \mathfrak{a}(\pi(f'')) - \dim \mathfrak{a}''(f'') = \dim \mathfrak{a}'' - \dim \mathfrak{a}$ (5,1. 12.2). Par suite, $\pi^{-1}(\Gamma \cdot \pi(f'')) = \Gamma \cdot f''$.

0.8. Considérons un couple $(\mathfrak{a}', a)$ comme en 0.6 et $\mathfrak{a}''$ comme en 0.7. La condition (2) de 0.7 prouve que $\mathfrak{a}$ vérifie la propriété (P) si $\mathfrak{a}''$ vérifie la propriété (P). D'autre part, si $\mathfrak{a}$ vérifie la propriété (P') alors $\mathfrak{a}''$ vérifie la propriété (P'). On peut donc se ramener au cas où le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) pour prouver (P') $\Rightarrow$ (P).

1. Formes Lineaires fortement regulieres et formes lineaires admissibles

1.1. On fixe une algébre de Lie complexe $\mathfrak{a}$. Si f est dans $\mathfrak{a}^*$, on désigne par $\mathfrak{s}(f)$ l'ensemble des X de $\mathfrak{a}(f)$ pour lesquels $\operatorname{ad} X$ est semi-simple. Lorsque f est régulière, d'après (2, 1.7 p. 17) l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(f)$ est commutative; $\mathfrak{s}(f)$ est donc une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{a}$.

1.2. Definition: *On dit que la forme linéaire régulière f sur $\mathfrak{a}$ est fortement régulière si l'algébre de Lie $\mathfrak{s}(f)$ est de dimension maximale.*

Cette définition est due (dans le cas algébrique) à M. Duflo [11]. Les résultats de ce chapitre sont énoncés sans démonstration dans [11] et prouvés ici pour la commodité du lecteur.

1.3. On note $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{a})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{a}$ engendré par les $\exp(\operatorname{ad} X)$, où $X \in \mathfrak{a}$ et où $\operatorname{ad} X$ est nilpotent. Le groupe $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{a})$ opère dans $\mathfrak{a}^*$ via la représentation coadjointe.

1.4. Proposition: (*Les notations sont celles de* 1.1 *et* 1.3). *L'ensemble des formes linéaires fortement régulières sur $\mathfrak{a}$ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{a}^*$. Si f et f' sont deux formes linéaires fortement régulières, alors il existe α dans* $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{a})$ *tel que l'on ait*: $\mathfrak{s}(f') = \alpha(\mathfrak{s}(f))$.

La proposition résultera du lemme 1.7.

1.5. Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Lie commutative de $\mathfrak{a}$ telle que pour au moins une forme linéaire régulière f sur $\mathfrak{a}$, on ait $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}(f)$. En particulier, pour tout X dans $\mathfrak{s}$, $\operatorname{ad} X$ est semi-simple. Désignons par $\mathfrak{a}_0$ le centralisateur de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{a}$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines non nulles de $\mathfrak{a}$ relativement à $\mathfrak{s}$, deux à deux distinctes. Désignons par $\mathfrak{a}^{\lambda_i}$ $(i=1,\dots,n)$ l'espace des vecteurs de poids λ_i. On $a: \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}^{\lambda_n}$ et $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}^{\lambda_n}$. On regarde $\mathfrak{a}_0^*$ comme l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{a}$, nulles sur $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$. Si f est dans $\mathfrak{a}_0^*$, on note $\omega(f)$ la forme bilinéaire sur $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}] \times [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]: (X, Y) \mapsto \omega(f)(X, Y) = \langle f, [X, Y] \rangle$ et si b est une base de $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$, $D_b(f)$ désigne le pfaffien de $\omega(f)$, calculé dans le base b.

1.6. LEMME: (*Les notations sont celles de* 1.1 *et* 1.5). *Soient b une base de* $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ *et f dans a_0^*.*

(i) *Le stabilisateur de f dans $\mathfrak{a}_0$ coïncide avec le stabilisateur dans $\mathfrak{a}_0$ de la restriction de f à $\mathfrak{a}_0$.*

(ii) *La fonction D_b est non nulle en f si et seulement si $\mathfrak{a}_0(f) = \mathfrak{a}(f)$.*

(iii) *La forme linéaire f est régulière dans $\mathfrak{a}^*$ si et seulement si elle est régulière dans $\mathfrak{a}_0^*$ et $D_b(f)$ est non nul.*

L'assertion (i) résulte de l'inclusion $[\mathfrak{a}_0, [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]] \subset [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$. Il résulte aussi de cette inclusion que le noyau de $\omega(f)$ est contenu dans $\mathfrak{a}(f)$. Comme $\mathfrak{s}$ est contenu dans $\mathfrak{a}(f)$, on a la décomposition: $\mathfrak{a}(f) = \mathfrak{a}_0(f) \oplus \mathfrak{a}(f) \cap [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$, d'où (ii).

(iii) Notons S l'indice de $\mathfrak{a}$ et S_0 celui de $\mathfrak{a}_0$. D'après la définition de $\mathfrak{s}$, il existe une forme linéaire régulière f' sur $\mathfrak{a}$ qui appartient à $\mathfrak{a}_0^*$. D'après (2, 1.7 p. 17) $\mathfrak{a}(f')$ est contenu dans $\mathfrak{a}_0$. Il résulte alors de (i) que S_0 est inférieur ou égal à S et de (ii), que $D_b(f')$ est non nul. L'ensemble des formes linéaires régulières de $\mathfrak{a}_0^*$ qui n'annulent pas D_b est donc un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{a}_0^*$. D'après (ii), pour tout ℓ dans cet ouvert, $\mathfrak{a}_0(\ell) = \mathfrak{a}(\ell)$ et $\dim \mathfrak{a}_0(\ell) \geq S$; donc $S = S_0$. Si f est régulière dans $\mathfrak{a}_0$ et si $D_b(f)$ est non nul, d'après (ii), $\mathfrak{a}_0(f) = \mathfrak{a}(f)$ et d'après ce qui précède, f est régulière dans $\mathfrak{a}^*$. Réciproquement, si f est régulière dans $\mathfrak{a}^*$, $\dim \mathfrak{a}_0(f) \leq S$ car $\mathfrak{a}_0(f)$ est contenu dans $\mathfrak{a}(f)$. D'après ce qui précède, $\dim \mathfrak{a}_0(f) = S_0$; donc f est régulière dans $\mathfrak{a}_0^*$, $\mathfrak{a}_0(f) = \mathfrak{a}(f)$ et $D_b(f)$ est non nul, d'après (ii).

1.7. LEMME: (*Les notations sont celles de* 1.1 *et* 1.5). *Soient b une base de* $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ *et $\mathcal{O}_0$ l'ensemble des formes linéaires régulières sur $\mathfrak{a}_0$ qui n'annulent pas D_b.*

(i) *L'ensemble* $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{a})} \alpha \cdot \mathcal{O}_0$ *est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{a}^*$.*

(ii) *Si f est une forme linéaire fortement régulière sur $\mathfrak{a}$, alors il existe α dans* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{a})$ *tel que $\alpha \cdot f$ soit dans $\mathfrak{a}_0^*$.*

Il résulte de la démonstration de l'assertion (iii) de 1.6 que $\mathcal{O}_0$ est un ouvert de Zariski non de vide de $\mathfrak{a}_0^*$. Pour démontrer le lemme, nous utilisons les idées développées par J. Dixmier dans le démonstration de (5, thèorème 1.9.11). Si $X \in \mathfrak{a}^{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} X$ est nilpotent car $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} X)(\mathfrak{a}^{\lambda_j}) \subset \mathfrak{a}^{\lambda_j + \lambda_i}$ $(j = 1, \ldots, n)$; donc $\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} X)$ est un élément bien défini de $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{a})$ (cf. 1.3). Soit τ l'application de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_0^* \times \mathfrak{a}^{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{a}^{\lambda_n}$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{a}^*$ définie par:

$$\tau(f, X_1, \ldots, X_n) = \exp(\mathrm{ad}\, X_1) \ldots \exp(\mathrm{ad}\, X_n) \cdot f.$$

Cette application est polynômiale. Soient f dans $\mathcal{O}_0$ et T l'application linéaire tangente à τ en $(f, 0, \ldots, 0)$. On a:

$$T(f', X_1, \ldots, X_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \cdot f + f'$$

$(f' \in \mathfrak{a}_0^*, X_1 \in \mathfrak{a}^{\lambda_1}, \ldots, X_n \in \mathfrak{a}^{\lambda_n})$. Si $T(f', X_1, \ldots, X_n)$ est nul, f' et $(\Sigma_{j=1}^n X_j) \cdot f$ sont toutes deux nulles. D'après 1.6, (ii), $X_1, \ldots, X_n$ sont nuls; donc T est injective et par suite bijective. Désignons par $\mathcal{O}'$ l'ensemble des points $\mathfrak{a}_0^* \times \mathfrak{a}^{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{a}^{\lambda_n}$ en lesquels l'application linéaire tangente à τ est bijective. Notons $P_1, \ldots, P_m$ des générateurs de l'idéal de définition de $\mathfrak{a}_0^* \backslash \mathcal{O}_0$. Les fonctions $P_1, \ldots, P_m$ se prolongent trivialement en des fonctions polynômiales sur $\mathfrak{a}_0^* \times \mathfrak{a}^{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{a}^{\lambda_n}$. D'après ce qui précède, l'ouvert de Zariski

$$\mathcal{O}'' = \left(\bigcup_{i=1}^{m} \{P_i \neq 0\}\right) \cap \mathcal{O}'$$

rencontre $\mathfrak{a}_0^* \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ suivant $\mathcal{O}_0$. L'image $\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}''$ par τ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{a}_0^*$. L'assertion (i) du lemme résulte alors de l'égalité

$$\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{a})} \alpha \cdot \mathcal{O} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{a})} \alpha \cdot \mathcal{O}_0.$$

(ii) Soit f une forme linéaire fortement régulière sur $\mathfrak{a}$. Considérons le centralisateur $\overline{\mathfrak{a}_0(f)}$ de $\mathfrak{s}(f)$ et $\mathcal{O}_0(f)$ l'ouvert de Zariski de $\overline{\mathfrak{a}_0(f)}^*$ défini comme $\mathcal{O}_0$ (on remarquera à cet effet que, d'après 1.6 (iii), $\mathcal{O}_0$ ne dépend pas de la base b de $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$). Il résulte de (i) que $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{a})} \alpha \cdot \mathcal{O}_0(f)$ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{a}^*$. Deux ouverts de Zariski non vides de $\mathfrak{a}^*$ ayant une intersection non vide, on peut trouver α dans $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{a})$ tel que $\alpha \cdot f$ soit dans $\mathcal{O}_0$.

1.8. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à $\mathfrak{a}$ et G le groupe de Lie réel simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1.9. DEFINITION: (*Les notations sont celles de* 1.1 *et* 1.8).

(i) *La forme linéaire f sur $\mathfrak{g}$ est dite admissible s'il existe un caractère unitaire de $G(f)_0$ de différentielle $i f|\mathfrak{g}(f)$.*

(ii) *La forme linéaire a sur $\mathfrak{a}$ est dite admissible si la forme linéaire* $\mathrm{Re}(a)$ *sur $\mathfrak{g}$ est admissible.*

Cette notion d'admissibilité est équivalente à celle de (11, II.2) car $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie complexe.

1.10. Reprenons les notations de 1.5. D'après 1.7 (ii), il existe une forme linéaire fortement régulière x sur $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{s}(x)$ contienne $\mathfrak{s}$. On suppose que $\mathfrak{s}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}(x)$ dont l'image, par une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$, est semi-simple. Soit S l'adhérence dans G du sous-groupe analytique de G dont l'algèbre de Lie est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à $\mathfrak{s}$. Le groupe S est commutatif et connexe. Soient T le plus grand sous-groupe compact de S, $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie et $(X_1, \dots, X_n)$ une base du réseau des éléments de $\mathfrak{t}$ dont l'image par l'application exponentielle de G est égale à 1.

1.11. LEMME: (*Les notations ont celles de* 1.1, 1.6 *et* 1.10).

(i) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ est contenue dans $\mathfrak{s}$.*

(ii) *La forme régulière f sur $\mathfrak{a}$, nulle sur $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ est admissible si et seulement si* $\mathrm{Re}\langle f, X_1\rangle, \dots, \mathrm{Re}\langle f, X_n\rangle$ *sont des multiples entiers de $2\pi\mathbb{Z}$.*

Soit f une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{a}$, nulle sur $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$. D'après (2, 1.7 p. 17), l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(f)$ est commutative. Soit $\mathfrak{t}'$ l'algèbre de Lie du plus grand sous-groupe compact de $G(f)_0$. Elle contient $\mathfrak{t}$ et elle est contenue dans $\mathfrak{a}(f)$. D'après 1.7 (ii), il existe une forme linéaire fortement régulière y sur $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{s}(y)$ contienne $\mathfrak{s}(f)$ et g dans G tel que $g \cdot \mathfrak{s}(x)$ soit égale à $\mathfrak{s}(y)$. L'algèbre de Lie $g \cdot \mathfrak{s}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}(g \cdot x)$ dont l'image par la représentation de $\mathfrak{g}$, considérée en 1.10, est semi-simple; donc $g \cdot \mathfrak{s} = \mathfrak{s}$ puisque $\mathfrak{s}$ est contenue dans $\mathfrak{g}(g \cdot x)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{t}'$ est contenue dans $\mathfrak{s}$ puisque $\mathfrak{t}'$ est contenue dans $\mathfrak{g}(g \cdot x)$ et tous les éléments de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ (V espace vectoriel réel de dimension finie) sont semi-simples. Par suite, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$ et T est le plus grand sous-groupe compact de $G(f)_0$. La restriction de l'application exponentielle de G à $\mathfrak{g}(f)$ est un homomorphisme du groupe abélien

$\mathfrak{g}(f)$ sur $G(f)_0$ et f est admissible si et seulement si le caractère unitaire $X \to \exp(i\langle \operatorname{Re} f, X\rangle)$ de $\mathfrak{g}(f)$ est trivial sur le noyau de cet homomorphisme, d'où (ii).

II. Orbites temperees

2.1. On fixe une algèbre de Lie complexe algébrique $\mathfrak{a}'$, un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}'$ dont l'enveloppe algèbrique est égale à $\mathfrak{a}'$ (d'où $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$). On note Γ le groupe adjoint de $\mathfrak{a}'$.

2.2. Lemme: (*Les notations sont celles de* 2.1). *Si f est dans $\mathfrak{a}^*$, alors il existe sur Γ. f une mesure positive, Γ-invariante, unique au scalaire multiplicatif près.*

Soit γ dans $\Gamma(f)$. La forme bilinéaire $(X, Y) \to \langle f, [X, Y]\rangle$ sur $\mathfrak{a}$ définit par passage au quotient une forme symplectique sur $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}(f)$, invariante par γ; donc $\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}}\gamma = \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}(f)}\gamma$. Par suite, la restriction à $\Gamma(f)$ de la fonction module de Γ est égale à la fonction module de $\Gamma(f)$; donc il existe sur $\Gamma \cdot f$ une mesure positive, Γ-invariante, unique au scalaire multiplicatif près.

2.3. Definition: *L'orbite $\Gamma \cdot f$ est dite tempérée si toute mesure positive Γ-invariante sur $\Gamma \cdot f$ est tempérée* (*cf.* 0.1).

2.4. Soit f une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{a}$. On suppose que pour tout X dans $\mathfrak{a}(f)$, $\operatorname{tr} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} X$ est nul. D'après (2, 1.7 p. 17), l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(f)$ est commutative; donc il existe un sous-groupe résoluble connexe maximal B de Γ, contenant $\Gamma(f)_0$. Comme $\Gamma(f)_0$ est d'indice fini dans $B(f)$, pour tout b dans $B(f)$, on a $|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b| = 1$; d'où l'existence d'une fonction positive λ sur $B \cdot f$ qui vérifie la condition $\lambda(b \cdot y) = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^{-2}\lambda(y)$, pour tout y dans $B \cdot f$ et pour tout b dans B.

2.5. Lemme: (*Les notations sont celles de* 2.1 *et* 2.4). *Soit $\mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie de B.*

(i) *Il existe une mesure positive, relativement invariante, ν sur $B \cdot f$, de multiplieur $b \to |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^{-2}$.*

(ii) *Il existe un sous-groupe compact maximal K de Γ tel que l'application $(k, b) \to kb$ de $K \times B$ dans Γ soit surjective.*

(iii) *Désignons par* dk *la mesure de Haar de masse totale* 1 *du* *groupe compact K. Alors la mesure, notée μ,*

$$\phi \to \int_K \int_{B \cdot f} \phi(ky)\lambda(y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}k$$

sur $\Gamma \cdot f$ est positive et Γ-invariante.

(iv) *L'orbite $\Gamma \cdot f$ est tempérée si et seulement si la mesure $\lambda \cdot \nu$ est tempérée.*

(v) *L'orbite $\Gamma \cdot f$ est fermée si et seulement si l'orbite $B \cdot f$ est fermée dans $\mathfrak{a}^*$, pour la topologie usuelle.*

(i) Comme $B(f)_0$ est commutatif et d'indice fini dans $B(f)$, $B(f)$ est unimodulaire. L'assertion (i) résulte alors de ce que la fonction module du groupe B est $b \to |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^{-2}$.

(ii) Désignons par R le radical de Γ et par π l'homomorphisme canonique de Γ sur Γ/R. Le groupe $\pi(B)$ est un sous-groupe de Borel du groupe semi-simple Γ/R; donc il existe un sous-groupe compact maximal K' de Γ/R tel que l'application $(k, b) \to kb$ de $K' \times \pi(B)$ dans Γ/R soit surjective. Soient R' le radical de $\pi^{-1}(K')$, T un sous-groupe compact maximal de R' et K un sous-groupe compact maximal de $\pi^{-1}(K')$ contenant T. Comme R'/R est compact, $R' = TR$. Le groupe $\pi^{-1}(K')$ étant à radical cocompact, $\pi^{-1}(K') = KR'$ et $\pi^{-1}(K') = KR$ car K contient T. Le groupe K est un sous-groupe compact maximal de Γ car K' est un sous-groupe compact maximal de Γ/R. Le group B étant résoluble connexe maximal, il contient R; donc l'application $(k, b) \to kb$ de $K \times B$ dans Γ est surjective. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K ($\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$). On montre de façon analogue que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{b}$ (somme d'espaces vectoriels réels).

(iii) Soit db une mesure de Haar à gauche sur B. Prouvons que la mesure

$$\phi \to \int_K \int_B \phi(kb) \frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2}\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}k$$

est une mesure de Haar à gauche sur Γ. D'après (ii), les espaces homogènes $K\backslash\Gamma$ et $K \cap B\backslash B$ sont homéomorphes. Le groupe $K \cap B$ est donc connexe et contenu dans un tore maximal S de B. Soit U le groupe des éléments unipotents de B. Le groupe B est le produit semi-direct de S par U et l'espace topologique $K \cap B\backslash B$ est le produit de $K \cap B\backslash S$ par U. Le groupe $K \cap B$ est un sous-groupe compact maximal de B car $K \cap B\backslash S$ est simplement connexe. Il existe un tore S' connexe simplement connexe tel que l'on ait $S = (K \cap B)S'$ (S' est un groupe réel). Posons $B' = S'U$ et notons $\mathfrak{b}'$ l'algèbre de Lie de B' ($\mathfrak{b}'$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$). Il résulte de (ii) que $\mathfrak{g}$ est la somme directe de $\mathfrak{k}$ et de $\mathfrak{b}'$ et que l'application $(k, b) \to kb$ de $K \times B'$ dans Γ est surjective. Comme $K \cap B' = \{e\}$ et $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}' = \mathfrak{g}$, cette application est un difféomorphisme de $K \times B'$ sur Γ. Notons $\mathrm{d}t$ la mesure de Haar de masse totale 1 sur le groupe compact $K \cap B$ et δb la mesure de Haar à gauche sur B' telle que l'on ait:

$$\int_B \phi(b)\,\mathrm{d}b = \int_{K\cap B}\int_{B'} \phi(tb)\delta b\ \mathrm{d}t,$$

pour toute ϕ dans $L^1(B)$. D'après (14, Lemme 1.10) la mesure

$$\phi \to \int_K \int_{B'} \phi(kb)\frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}'} b|}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2}\,\delta b\ \mathrm{d}k$$

est une mesure de Haar à gauche sur Γ. Soit ϕ une fonction continue à support compact sur Γ. On a:

$$\int_K \int_B \phi(kb)\frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2}\,\mathrm{d}b\ \mathrm{d}k$$
$$= \int_K \int_{K\cap B}\int_{B'} \phi(ktb)\frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2}\,\delta b\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}k.$$

La mesure $\mathrm{d}k$ étant invariante à droite, le membre de droite de l'égalité ci-dessus est égal à

$$\int_K \int_{B'} \phi(kb)\frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2}\,\delta b\ \mathrm{d}k.$$

Comme pour tout b dans B, on A: $|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2 = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}'} b|$, il vient:

$$\int_K \int_B \phi(kb)\frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2}\,\mathrm{d}b\ \mathrm{d}k = \int_K \int_{B'} \phi(kb)\frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}'} b|}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2}\,\delta b\ \mathrm{d}k.$$

La mesure

$$\phi \to \int_K \int_B \phi(kb)\frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2}\,\mathrm{d}b\ \mathrm{d}k$$

est donc une mesure de Haar à gauche sur Γ.

On rappelle que le groupe $\Gamma(f)_0 = B(f)_0$ est unimodulaire. On note $\mathrm{d}h$ une mesure de Haar sur $B(f)_0$. Désignons par $\mathrm{d}\dot{b}$ la mesure positive, relativement invariante, de multiplieur $b \to |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^{-2}$, sur $B/B(f)_0$ telle que pour toute fonction ϕ continue à support compact sur B, on ait:

$$\int_B \phi(b) |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2 \,\mathrm{d}b = \int_{B/B(f)_0} \left(\int_{B(f)_0} \phi(bh) \,\mathrm{d}h \right) \mathrm{d}\dot{b}.$$

L'espace $B/B(f)_0$ est un revêtement fini de $B \cdot f$ car $B(f)_0$ est d'indice fini dans $B(f)$. Notons ν' la mesure sur $B \cdot f$ relle que pour ϕ continue à support compact sur $B \cdot f$, on ait:

$$\int_{B \cdot f} \phi(y) \,\mathrm{d}\nu'(y) = \int_{B/B(f)_0} \phi(b \cdot f) \,\mathrm{d}\dot{B}.$$

La mesure ν' est positive, relativement invariante, de multiplieur $b \to |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^{-2}$. Elle est donc proportionnelle à ν. Soient $(h_1, \ldots, h_m)$ un système de représentants de $\Gamma(f)/\Gamma(f)_0$ et ϕ une fonction continue à support compact sur Γ. La fonction

$$\gamma \to \sum_{i=1}^{m} \int_{B(f)_0} \phi(\gamma h h_i) \,\mathrm{d}h$$

définit par passage au quotient une fonction continue à support compact ψ sur $\Gamma \cdot f$. On a:

$$\begin{aligned} &\int_K \int_{B \cdot f} \psi(ky) \lambda(y) \,\mathrm{d}\nu'(y) \,\mathrm{d}k \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda(f) \int_K \int_B \phi(kbh_i) \frac{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2}{|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^2} \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}k. \end{aligned}$$

Il résulte alors de ce qui précède que la mesure

$$\phi \to \int_K \int_{B \cdot f} \phi(ky) \lambda(y) \,\mathrm{d}\nu'(y) \,\mathrm{d}k$$

sur $\Gamma \cdot f$ est invariante, d'où (iii).

(iv) Le groupe K étant compact, il existe une norme sur $\mathfrak{a}^*$, invariante par K; donc (iii)$\Rightarrow$(iv).

(v) Il est clair que si $B \cdot f$ est fermé, $\Gamma \cdot f$ est fermé dans $\mathfrak{a}^*$ pour la topologie usuelle de $\mathfrak{a}^*$; donc $\Gamma \cdot f$ est fermé dans $\mathfrak{a}^*$ pour la topologie de Zariski car il est localement fermé pour cette topologie. Réciproquement, si $\Gamma \cdot f$ est fermé dans $\mathfrak{a}^*$, $\Gamma \cdot f$ contient l'adhérence de $B \cdot f$ et pour tout x dans $\Gamma \cdot f$, $\dim B(x) \leq \dim B(f)$ car $B(x)$ est contenu dans $\Gamma(x)$ et $\dim B(f) = \dim \Gamma(f)$; donc $B \cdot f$ est fermé.

2.6. LEMME: (*Les notations sont celles de* 2.1). *On suppose que le couple* $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ *vérifie l'hypothèse* (*) *de* 0.6. *Il existe un ouvert de Zariski* $\mathcal{O}$ *de* $\mathfrak{a}^*$ *non vide, invariant par* Γ, *contenu dans l'ensemble des formes linéaires fortement régulières de* $\mathfrak{a}^*$ *et tel que pour tout* f *dans* $\mathcal{O}$ *et pour tout* f' *dans* $\mathfrak{a}'^*$ *prolongeant* f, *les conditions suivantes soient satisfaites*:

(1) f' *est régulière et* $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$.

(2) *pour tout* X *dans* $\mathfrak{a}'(f)$, $\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} X$ *est nul.*

(3) *il existe une polarisation résoluble* $\mathfrak{b}'$ *en* f' *qui vérifie la condition de Pukanszky.*

Dans ces conditions, l'algèbre de Lie $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{a}$ *est une polarisation résoluble en* f *satisfaisant la condition de Pukanszky.*

D'après (15, théorème 2.2), il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{O}''$ de $\mathfrak{a}'^*$ non vide, Γ-invariant, contenu dans l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{a}'^*$ et tel qu'en tout point de $\mathcal{O}''$, il existe une polarisation résoluble, contenue dans $\mathfrak{a}'$, vérifiant la condition de Pukanszky. D'après (6, théorème 4.6), il existe un ouvert de Zariski V de $\mathfrak{a}^*$, non vide, Γ-invariant, contenu dans l'ensemble des formes linéaires fortement régulières de $\mathfrak{a}^*$ et tel que pour tout f dans V et pour tout X dans $\mathfrak{a}'(f)$, $\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} X$ soit nul. Comme le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) de 0.6, il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{O}'$ de $\mathfrak{a}'^*$, non vide, Γ-invariant, tel que pour tout f' dans $\mathcal{O}'$, on ait: $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$. Désignons par $\mathcal{O}$ l'intersection de V et de l'image de $\mathcal{O}' \cap \mathcal{O}''$ par l'application canonique de $\mathfrak{a}'^*$ sur $\mathfrak{a}^*$. Il est clair que $\mathcal{O}$ est un ouvert de Zariski, Γ-invariant de $\mathfrak{a}^*$. Soient f dans $\mathcal{O}$ et f' une forme linéaire sur $\mathfrak{a}'$ qui prolonge f. Comme f' est dans $\mathcal{O}' + \mathfrak{a}^{\perp}$ ($\mathfrak{a}^{\perp}$ est l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{a}'$, nulles sur $\mathfrak{a}$), $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$ et il existe en f' une polarisation résoluble $\mathfrak{b}'$, contenue dans $\mathfrak{a}'$, qui satisfait la condition de Pukanszky. L'algèbre de Lie $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \cap \mathfrak{a}$ est résoluble, subordonnée à f et $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{b}$ car $\mathfrak{b}'$ contient $\mathfrak{a}'(f')$ et $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(f') + \mathfrak{a}$; donc $\mathfrak{b}$ est une polarisation en f. Si v est une forme linéaire sur $\mathfrak{a}$, nulle sur $\mathfrak{b}$, elle se prolonge en une forme linéaire w sur $\mathfrak{a}'$, nulle sur $\mathfrak{b}'$ et il existe γ dans Γ tel que $\gamma \cdot f' = f' + w$ car $\mathfrak{b}'$ vérifie la condition de Pukanszky; donc $\gamma \cdot f = f + v$ et $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de Pukanszky.

2.7. Fixons f dans l'ouvert $\mathcal{O}$ de 2.6, f' un prolongement de f à $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$

une polarisation résoluble en f' satisfaisant la condition de Pukanszky et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Lie résoluble maximale de $\mathfrak{a}'$, contenant $\mathfrak{h}'$. Notons B et H' les sous-groupes analytiques de Γ d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{h}'$. Ces sous-groupes sont fermés dans Γ car les algèbres de Lie $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{h}'$ sont algébriques. Choisissons des mesures de Haar à gauche $\mathrm{d}b$ sur B et $\mathrm{d}h$ sur H'. Sur l'espace des fonctions ϕ sur B vérifiant $\phi(bh) = \phi(b)\chi(h)$ $b \in B$, $h \in H$, où $\chi(h) = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}'} h|^2$, il y *a* une "mesure" B-invariante

$$\phi \to \int_{B/H'} \phi(b)\delta b$$

telle que l'on ait:

$$\int_B \alpha(b)\,\mathrm{d}b = \int_{B/H'} \int_{H'} \alpha(bh)\chi(h)^{-1}\,\mathrm{d}h\,\delta b,$$

pour toute fonction intégrable α sur B. Choisissons une mesure ν sur $B \cdot f$ positive, relativement invariante, de multiplieur $b \to |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2$. Notons $\mathfrak{s}$ l'ensemble des éléments semi-simples de $\mathfrak{a}(f)$. Comme f est régulière, $\mathfrak{a}(f)$ est commutative et $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{a}$. Soient $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}_0'$ les centralisateurs de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$.

2.8. Lemme: (*Les hypothèses et notations sont celles de* 2.1, 2.6 *et* 2.7).

(i) *Pour toute mesure de Lebesgue* $\mathrm{d}\ell$ *sur* $\mathfrak{h}^{\perp}$ *et pour toute fonction borélienne positive* ϕ *sur* $B \cdot f$, *on a*:

$$\int_{\mathfrak{h}^{\perp}} |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} bh|^2 \phi(bh \cdot (f + \ell))\,\mathrm{d}\ell$$
$$= \chi(h) \int_{\mathfrak{h}^{\perp}} |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} \mathfrak{b}|^2 \phi(b \cdot (f + \ell))\,\mathrm{d}\ell,$$

pour b *dans* B *et* h *dans* H'. *Il existe une mesure de Lebesgue et une seule* $\mathrm{d}\ell$ *sur* $\mathfrak{h}^{\perp}$ *telle que l'on ait*:

$$\int_{B \cdot f} \phi(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_{B/H'} \delta b \int_{\mathfrak{h}^{\perp}} \phi(b \cdot (f + \ell)) |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2\,\mathrm{d}\ell$$

pour toute fonction ν*-intégrable* ϕ *sur* $B \cdot f$.

(ii) *L'intersection* $\mathfrak{s} \cap ([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}_0', \mathfrak{a}_0'] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}])$ *est nulle.*

(iii) *Si* v *est une forme linéaire sur* $\mathfrak{a}$, *nulle sur* $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}_0', \mathfrak{a}_0'] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]$ *alors* $B \cdot (f + v)$ *est contenu dans* $B \cdot f + v$.

(iv) *Il existe une forme linéaire v sur $\mathfrak{a}$, nulle sur* $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]+[\mathfrak{a}_0',\mathfrak{a}_0']+[\mathfrak{s},\mathfrak{a}]$ *pour laquelle $f+v$ est admissible* (1.9) *et régulière* (1.2). *Dans ces conditions, l'orbite $B\cdot(f+v)$ est ouverte dans $B\cdot f+v$.*

(v) *Soit v comme en* (iv). *Si l'orbite $\Gamma\cdot f$ est tempérée, alors l'orbite $\Gamma\cdot(f+v)$ est tempérée.*

(i) Si $\mathfrak{t}$ est un tore maximal de $\mathfrak{h}'$, il laisse invariant l'espace affine $f+\mathfrak{h}^{\perp}$; donc $\mathfrak{t}$ a un point fixe dans $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ et $\mathfrak{t}$ est conjugué à un tore maximal de $\mathfrak{a}'(f)$ car $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky. Comme $\mathfrak{h}'$ est résoluble algébrique, elle est le produit semi-direct de $\mathfrak{t}$ par son radical unipotent; donc $\operatorname{Tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}}X=0$, pour tout X dans $\mathfrak{h}'$, puisque f est dans $\mathcal{O}$. L'espace $\mathfrak{h}^{\perp}$ est isomorphe au dual de $\mathfrak{a}/\mathfrak{h}$ et pour tout h dans H' le déterminant de l'automorphisme $\ell\to h\cdot\ell$ de $\mathfrak{h}^{\perp}$ est égal à $|\det\operatorname{Ad}_{\mathfrak{h}'}h|^{-2}$ puisque $|\det\operatorname{Ad}_{\mathfrak{a}}h|=1$ et $[\mathfrak{h}',\mathfrak{h}']$ est contenu dans $\mathfrak{h}$, d'où la première partie de l'assertion. Si $\mathrm{d}\ell$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^{\perp}$, la mesure

$$\phi\to\int_{B/H'}\delta b\int_{\mathfrak{h}^{\perp}}|\det\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}}b|^{-2}\phi(b\cdot(f+\ell))\,\mathrm{d}\ell$$

sur $B\cdot f$ est alors une mesure positive, relativement invariante de multiplieur $b\to|\det\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}}b|^{-2}$, d'où (i).

(ii) Soit X dans $\mathfrak{s}\cap([\mathfrak{b},\mathfrak{b}]+[\mathfrak{a}_0',\mathfrak{a}_0']+[\mathfrak{s},\mathfrak{a}])$. Comme $[\mathfrak{s},\mathfrak{a}]$ et $\mathfrak{a}_0'$ sont invariants par $\mathfrak{s}$ et que $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}_0'\oplus[\mathfrak{s},\mathfrak{a}]$, on a $X=X_1+X_2$ avec X_1 dans $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]\cap\mathfrak{a}_0'$ et X_2 dans $[\mathfrak{a}_0',\mathfrak{a}_0']$. Désignons par $\mathfrak{r}_u$ le radical unipotent de $\mathfrak{a}_0'$ et ω l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{a}_0'$ sur $\mathfrak{a}_0'/\mathfrak{r}_u$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_0'/\mathfrak{r}_u$ est réductive, $\omega(X)$ est dans le centre de $\mathfrak{a}_0'/\mathfrak{r}_u$, $\omega(X_1)$ est nilpotent et $\omega(X_2)$ est dans la partie semi-simple de $\mathfrak{a}_0'/\mathfrak{r}_u$; donc $\omega(X)=0$ et X est nul puisqu'il est semi-simple.

(iii) Soit b dans B. Pour tout X dans $\mathfrak{h}$, $X-b\cdot X$ est dans $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]$; donc la forme linéaire $v-b^{-1}\cdot v$ est nulle sur $\mathfrak{h}$. La polarisation $\mathfrak{h}$ en f vérifiant la condition de Pukanszky, $f+v-b^{-1}\cdot v$ est dans $B\cdot f$ et $b\cdot(f+v)=b\cdot(f+v-b^{-1}\cdot v)+v$ est dans $B\cdot f+v$.

(iv) Fixons une base b de $[\mathfrak{s},\mathfrak{a}]$ et considérons la fonction polynômiale D_b sur $\mathfrak{a}_0^*$ définie en 1.5. D'après (ii), il existe un supplémentaire V de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{a}$ contenant $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]$, $[\mathfrak{s},\mathfrak{a}]$ et $[\mathfrak{a}_0',\mathfrak{a}_0']$. Notons $V^{\perp}$ l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{a}$, nulles sur V. Reprenons les notations de 1.10. D'après 1.6 (ii), $D_b(f)$ est non nul; donc d'après 1.11 (ii), il existe v dans $V^{\perp}$ tel que $D_b(f+v)$ soit non nul et tel que $f+v$ soit admissible puisque l'ensemble des formes linéaires v de $V^{\perp}$ telles que $\operatorname{Re}\langle f+v,X_1\rangle,\ldots,\operatorname{Re}\langle f+v,X_n\rangle$ soient dans $2\pi\mathbb{Z}$, est Zariski dense dans $V^{\perp}$. Comme v est nulle sur $[\mathfrak{a}_0',\mathfrak{a}_0']$, $\mathfrak{a}_0(f)=\mathfrak{a}_0(f+v)$; donc, d'après

1.6 (iii), $f+v$ est régulière dans $\mathfrak{a}^*$ et $\mathfrak{a}(f+v)=\mathfrak{a}(f)=\mathfrak{a}_0(f)$. D'après (iii), $B\cdot(f+v)$ est ouvert dans $B\cdot f+v$ car les orbites $B\cdot f$ et $B\cdot(f+v)$ ont même dimension.

(v) Soit λ une fonction positive sur $B\cdot f$ qui vérifie la condition $\lambda(by)=|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^{-2}\lambda(y)$ pour y dans $B\cdot f$ et b dans B. Notons ν' la mesure sur $B\cdot(f+v)$ qui est la restriction à $B\cdot(f+v)$ de l'image de la mesure ν par l'application $y\to y+v$ de $B\cdot f$ dans $B\cdot f+v$. Si ϕ est une fonction continue à support compact sur $B\cdot(f+v)$ et si b_0 est dans B, alors, d'après (i) on a:

$$\int_{B\cdot(f+v)}\phi(b_0\cdot y)\,\mathrm{d}\nu'(y)=\int_{B/H'}\delta b\int_{\mathfrak{b}^\perp}|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^2 \times\phi(b_0\cdot(b\cdot(f+\ell)+v))\,\mathrm{d}\ell.$$

Pour tout b dans B, la forme linéaire $\ell(b)=b^{-1}\cdot(v-b_0^{-1}\cdot v)$ est nulle sur $\mathfrak{b}$ et on a:

$$\int_{\mathfrak{b}^\perp}\phi[b_0\cdot(b\cdot(f+\ell)+v)]\,\mathrm{d}\ell=\int_{\mathfrak{b}^\perp}\phi(b_0b\cdot(f+\ell(b)+\ell)+v)\,\mathrm{d}\ell;$$

d'où

$$\int_{B\cdot(f+v)}\phi(b_0\cdot y)\,\mathrm{d}\nu'(y)=|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b_0|^{-2}\int_{B\cdot(f+v)}\phi(y)\,\mathrm{d}\nu'(y).$$

La mesure ν' sur $B\cdot(f+v)$ est donc relativement invariante de multiplieur $b\to|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}} b|^{-2}$. Notons λ_v la fonction $y\to\lambda(y-v)$ sur $B\cdot(f+v)$. La mesure $\lambda_v\cdot\nu'$ sur $B\cdot(f+v)$ est la restriction à $B\cdot(f+v)$ de l'image de la mesure $\lambda\cdot\nu$ par l'application $y\to y+v$ de $B\cdot f$ dans $B\cdot f+v$. Soit b dans B. La forme linéaire $v-b^{-1}\cdot v$ est nulle sur $\mathfrak{b}$. Il existe un élément unipotent n de H' tel que $n\cdot f=v-b^{-1}\cdot v+f$ car $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de Pukanszky et $\mathfrak{a}'(f)$ contient un tore maximal de $\mathfrak{b}'$; donc $\lambda_v(b\cdot(f+v))=\lambda(bnf)=|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{a}} b|^{-2}\lambda_v(f+v)$.

Supposons l'orbite $\Gamma\cdot f$ tempérée. D'après 2.5 (iv), la mesure $\lambda\cdot\nu$ est tempérée; donc la mesure $\lambda_v\cdot\nu'$ est tempérée. Alors d'après ce qui précède et d'après 2.5 (iv), l'orbite $\Gamma\cdot(f+v)$ est tempérée.

2.9. Lemme: (*Les notations sont celles de* 2.1). *On suppose que le couple* $(\mathfrak{a}',\mathfrak{a})$ *vérifie l'hypothèse* (*) *de* 0.6 *et que l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *vérifie la propriété* (P'). *Alors l'ensemble des formes linéaires admissibles dont l'orbite sous* Γ *est tempérée, est Zariski dense dans* $\mathfrak{a}^*$.

Supposons l'assertion fausse. D'après (6, théorème 2.2), il existe un semi-invariant non nul p dans l'idéal de définition de l'adhérence des formes linéaires admissibles dont l'orbite sous Γ est tempérée. La démonstration de (4, lemme 3.1) prouve que l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{a}$ dont l'orbite sous Γ est tempérée, est Zariski dense dans $\mathfrak{a}^*$. Soit f dans $\mathcal{O}$ telle que $\Gamma \cdot f$ soit tempérée. Reprenons les notations de 2.7 et de la démonstration de 2.8 (iv). D'après 2.7 (v), si v est dans $V^\perp$ et si $f+v$ est régulière et admissible, alors $p(f+v)=0$. Comme l'ensemble des v de $V^\perp$ pour lesquels $f+v$ est régulière et admissible est Zariski dense dans $V^\perp$, $p(f)$ est nul; donc p est nul sur l'orbite $\Gamma \cdot f$ puisque p est semi-invariant. Le polynôme p s'annule donc sur la réunion des orbites tempérées contenues dans $\mathcal{O}$. Cette réunion étant Zariski dense dans $\mathfrak{a}^*$, $p=0$, ce qui est absurde.

III. La demonstration du theoreme principal

3.1. On fixe une algèbre de Lie complexe algébrique $\mathfrak{a}'$ et un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}'$ comme en 2.1. On suppose que le couple $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ vérifie l'hypothèse (*) et que l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ vérifie la propriété (P'). On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algébres de Lie réelles sous-jacentes à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$, G' le groupe de Lie réel simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ et G le sous-groupe connexe de G' d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}$ l'idéal $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] + \mathfrak{n}$ et L le sous-groupe connexe de G' d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$. On note Z le centre de G'.

3.2. Lemme: (*Les notations sont celles de* 3.1).

(i) *Le centre de L est une extension finie de sa composante neutre. Soit f dans* $\mathfrak{g}^*$.

(ii) *Le sous-groupe* $ZG'(f)_0$ *de* G' *est un sous-groupe d'indice fini de* $G'(f)$.

(iii) *Le groupe* $ZG'(f)_0 \cap L$ *est une extension finie de* $L(f)_0$.

(i) Soient $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{l}$, S le sous-groupe analytique de L d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ et N le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. Le groupe N est fermé dans G. Le groupe L étant simplement connexe, S est fermé dans L et L est le produit semi-direct de S par N. Notons $Z(L)_0$ la composante neutre du centre de L et $Z(S)$ le centre de S. Il est clair que $Z(L)_0$ est contenu dans N. L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie semi-simple complexe car $\mathfrak{l}$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie complexe; donc le centre de S est fini. Si $g = sn$ ($s \in S$ et $n \in N$) est dans le centre de L, s est dans $Z(S)$. Si p est l'ordre de s, $g^p = n^p$; donc n est dans $Z(L)_0$ puisque l'application exponentielle de N est bijective. Le centre de L est donc contenu dans $Z(S)Z(L)_0$, d'où (i).

(ii) résulte de ce que l'algébre de Lie $\mathfrak{g}'$ est algébrique.

(iii) résulte de (i) et de ce que l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ est algébrique.

3.3. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Zariski de $\mathfrak{a}^*$, non vide, invariant par le groupe adjoint de $\mathfrak{a}'$ et qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) de 2.6. L'ouvert $\bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}^*} \lambda\mathcal{O}$ satisfait les mêmes conditions. D'après (6, théorème 2.2), l'idéal de définition du complémentaire dans $\mathfrak{a}^*$ de cet ouvert contient des semi-invariants non nuls; donc il contient des semi-invariants homogènes et non nuls car il est homogène. Soit p un tel semi-invariant. Notons U le complémentaire des zéros de p. L'ensemble U est un ouvert de Zariski, non vide, invariant par le groupe adjoint de $\mathfrak{a}'$ et contenu dans $\bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}^*} \lambda\mathcal{O}$.

Soient a dans U, a' une forme linéaire sur $\mathfrak{a}'$ qui prolonge a, $f = \mathrm{Re}(a)$, $f' = \mathrm{Re}(a')$, $\mathfrak{h}'$ une polarisation résoluble réelle en f' qui satisfait la condition de Pukanszky et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}$. On suppose f admissible (1.9).

3.4. LEMME: (*Les notations et hypothèses sont celles de* 3.1 *et* 3.3).

(i) *Il existe sur* $ZG'(f)_0 \cap G$ *un caractère unitaire dont la différentielle est* $if|\mathfrak{g}(f)$. *On notera* X *l'ensemble des caractères unitaires de* $ZG'(f)_0 \cap G$ *vérifiant cette dernière condition.*

(ii) *Notons* H *et* H' *les sous-groupes analytiques de* G' *d'algèbres de Lie* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{h}'$. *Les groupes* H *et* $\bar{H} = ZH' \cap G$ *sont fermés dans* G.

(iii) *Si* χ *est dans* X, *il existe un unique caractère unitaire de* $\bar{H}$, *prolongeant* χ *et dont la différentielle est* $if \mid \mathfrak{h}$. *Notons le* $\bar{\chi}$.

(i) D'après (2, 1.7 p. 17) et d'après la condition 1 de 2.6., $G'(f')_0$ est commutatif et on a: $G'(f')_0 = G'(f)_0$. Le groupe $G'(f')_0$ est alors le produit direct d'un tore compact par un groupe vectoriel. Le tore compact est contenu dans $G(f)_0$ car G'/G est un groupe vectoriel; donc il existe un caractère unitaire de $G'(f')_0$ dont la différentielle est $if' \mid \mathfrak{g}'(f')$ puisque f est admissible. Ce caractère s'étend à $ZG'(f)_0$, d'où (i).

(ii) Comme G'/G est un groupe vectoriel, $H = H' \cap G$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$ est algèbrique; donc le sous-groupe analytique de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}')$ d'algèbre de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}')$ est fermé dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}')$. Par suite, les groupes H' et ZH' sont fermés dans G', d'où (ii).

(iii) Soit T un sous-groupe compact maximal du groupe résoluble H. Le tore T laisse invariant $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ et a donc un point fixe dans cet espace affine. Il est donc conjugué sous H à un sous-groupe de $G(f)_0$ puisque $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky d'après 2.6. On peut supposer que T est contenu dans $G(f)_0$. La forme linéaire f étant nulle sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, il existe un caractère unitaire du revêtement universel de H dont la différentielle est $if \mid \mathfrak{h}$. Comme f est admissible, il existe un caractère unitaire de T dont la différentielle est la restriction de if à l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T; donc il existe un caractère unitaire de H de différentielle $if \mid \mathfrak{h}$ puisque dans le revêtement universel de H le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ contient le noyau de l'homomorphisme canonique du revêtement universel de H dans H. L'algèbre de lie $\mathfrak{h}$ vérifiant la condition de Pukanszky, l'application $g \to g \cdot f$ de H dans $f+\mathfrak{h}^{\perp}$ définit par passage au quotient un homéomorphisme de $H/G(f)\cap H$ sur $f+\mathfrak{h}^{\perp}$; donc $G(f)\cap H$ est connexe et $ZG'(f)_0\cap H$ est contenu dans H. Le groupe $\bar{H}$ est égal à $(ZG'(f)_0\cap G)H$ et le sous-groupe $(ZG'(f)_0\cap G)$ de $\bar{H}$ laisse invariant H et le caractère unitaire de H de différentielle $if \mid \mathfrak{h}$; donc il existe un caractère unitaire de $\bar{H}$ prolongeant χ et de différentielle $if \mid \mathfrak{h}$. L'unicité d'un tel caractère est claire.

3.5. On note $T(\chi;\mathfrak{h}')$ la représentation $\operatorname{ind}(\bar{\chi};\bar{H}\uparrow G)$ et $J(\chi;\mathfrak{h}')$ le noyau de $T(\chi;\mathfrak{h}')$ dans $C^*(G)$. Soit Γ le groupe des caractères unitaires de G triviaux sur $G(f)_0L$. Si $\eta\in\Gamma$, l'application $\phi\to\eta\phi$ de $\mathcal{K}(G)$ dans lui-même se prolonge en un automorphisme de $C^*(G)$, noté encore $\phi\to\eta\phi$. De cette façon, Γ opère continûment dans l'espace des idéaux bilatères fermés des $C^*(G)$ (11, théorème 2); on note $(\eta, J)\mapsto\eta\cdot J$ cette opération. Si τ est une représentation unitaire de G de noyau J, $\eta\cdot J$ est le noyau de $\tau\otimes\eta$.

3.6. Lemme: (*Les notations sont celles de* 3.1, 3.3, 3.4 *et* 3.5).

(i) *Le groupe* $(ZG'(f)_0\cap G)H'$ *est fermé dans* G'.

(ii) *Soit* χ *dans* X. *Il existe un caractère unitaire et un seul de* $(ZG'(f)_0\cap G)H'$ *qui prolonge* $\bar{\chi}$ *et dont la différentielle est* $if' \mid \mathfrak{h}'$. *On le notera* χ'.

(iii) *Pour tout* χ *dans* X, $T(\chi;\mathfrak{h}')$ *est unitairement équivalente à la restriction à* G *de* $\operatorname{ind}(\chi';(ZG'(f)_0\cap G)H'\uparrow G')$.

(iv) *La classe d'équivalence de* $T(\chi;\mathfrak{h}')$ $(\chi\in X)$ *ne dépend pas du choix de* $\mathfrak{h}'$. *On notera* $J(\chi)$ *au lieu de* $J(\chi;\mathfrak{h}')$.

(v) *Pour tout* η *dans* Γ *et pour tout* χ *dans* X, *on a*: $\eta\cdot J(\chi)= J((\eta \mid ZG'(f)_0\cap G)\chi)$.

(vi) *L'ensemble des* $J(\chi)$ $(\chi\in X)$ *est la réunion d'un nombre fini d'orbites de* Γ.

(i) D'après la démonstration de 3.4 (ii), ZH' est fermé dans G'; donc $(ZG'(f)_0 \cap G)H'$ est fermé dans G' puisqu'il est ouvert dans ZH'.

(ii) Le groupe G' étant simplement connexe, $G'(f')_0 \cap G$ est connexe. D'après la démonstration de 3.4(i), $G'(f')_0 = G'(f)_0$ et il existe un caractère unitaire de $(ZG'(f)_0 \cap G)G'(f)_0$ qui prolonge χ et dont la différentielle est $if' \mid \mathfrak{g}'(f')$. Notons le χ''. Les restrictions de χ'' et de $\bar{\chi}$ à $G(f)_0 = G'(f)_0 \cap \bar{H}$ coïncident et $G'(f)_0$ laisse invariant $\bar{H}$ et $\bar{\chi}$; donc il existe un caractère unitaire de $(ZG'(f)_0 \cap G)H'$ qui prolonge $\bar{\chi}$ et χ''. Sa différentielle est $if' \mid \mathfrak{g}'$. L'unicité d'un tel caractère est claire.

(iii) Pour simplifier les notations, posons $(ZG'(f)_0 \cap G)H' = \bar{H}'$. Remarquons que $\bar{H}' \cap G = \bar{H}$. Sur l'espace des fonctions ϕ sur G' vérifiant les relations (1): $\phi(gh) = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'} h|\phi(g)$ $(g \in G',\ h \in \bar{H}')$, il y a une "mesure" G'-invariante, notée

$$\phi \to \int_{G'/\bar{H}'} \phi(g)\delta g.$$

Comme $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ est contenu dans $\mathfrak{g}$, pour tout h dans $\bar{H}'$, $\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h = \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'} h$. Si ϕ est une fonction sur G vérifiant les relations (2):

$$\phi(gh) = \|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h|\phi(g) \quad (g \in G, h \in \bar{H}),$$

il existe une fonction $\tilde{\phi}$ et une seule sur G' qui prolonge ϕ et qui vérifie les relations (1) car $G' = G'(f)_0 G$ et $\bar{H}' = G'(f)_0 \bar{H}$. La forme linéaire $\phi \to \int_{G'/\bar{H}'} \phi(g)\delta g$ définit une "mesure" G-invariante sur l'espace des fonctions ϕ sur G vérifiant les relations (2). On notera cette mesure $\phi \to \int_{G/\bar{H}} \phi(g)\delta g$.

Soit χ dans X. L'espace de la représentation $T(\chi; \mathfrak{h}')$ est le complété de l'espace des fonctions C^∞ sur G vérifiant les relations:

(a) $\phi(gh) = \bar{\chi}(h)^{-1}|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{1/2}\phi(g)$ pour g dans G et h dans $\bar{H}$.

(b) $\int_{G/\bar{H}} |\phi(g)|^2 \delta g < +\infty$.

L'espace de la représentation $\mathrm{ind}(\chi'; \bar{H}' \uparrow G')$ est le complété de l'espace des fonctions C^∞ sur G' vérifiant les relations:

(a') $\phi(gh) = \bar{\chi}(h)^{-1}|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{1/2}\phi(g)$ pour g dans G et h dans $\bar{H}$.

(b') $\int_{G'/\bar{H}'} |\phi(g)|^2 \delta g < +\infty$.

Si ϕ est une fonction C^∞ sur G vérifiant les relations (a) et (b), il existe une fonction C^∞ sur G', et une seule, prolongeant ϕ et vérifiant les conditions (a') et (b'). Notons la $E(\phi)$. L'opérateur $\phi \to E(\phi)$ se prolonge en un opérateur unitaire de l'espace de $T(\chi; \mathfrak{h}')$ sur l'espace de la représentation $\mathrm{ind}(\chi'; \bar{H}' \uparrow G')$. Cet opérateur entrelace $T(\chi; \mathfrak{h}')$ et la restriction de $\mathrm{ind}(\chi'; \bar{H}'; G')$ à G.

(iv) résulte de (iii) et de (1, théorème A).

(v) Soient χ dans X, η dans Γ et v dans $\mathfrak{g}^*$ tel que $i\,v$ soit la différentielle de η. Reprenons les notations de la démonstration de (iii). L'espace de la représentation $\operatorname{ind}((\eta \mid \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ est le complété de l'espace des fonctions C^∞ sur G qui vérifient les conditions:

(1) $\phi(gh) = \eta(h)^{-1}\bar{\chi}(h)^{-1}|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h|^{1/2}\phi(g)$ pour g dans G et h dans $\bar{H}$.

(2) $\int_{G/\bar{H}} |\phi(g)|^2 \delta g < +\infty$.

On voit alors que l'opérateur unitaire E' de l'espace de $\operatorname{ind}((\eta \mid \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ dans l'espace de $T(\chi; \mathfrak{h}')$, tel que $E'\phi = \eta\phi$ pour toute ϕ dans l'espace de $\operatorname{ind}((\eta \mid \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$, réalise une équivalence entre les représentations $\operatorname{ind}((\eta \mid \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ et $T(\chi; \mathfrak{h}') \otimes \eta$. Notons h la restriction de f à $\mathfrak{l}$. D'après (17, lemme 13), il existe g_v dans $G(h)_0$ tel que $g_v \cdot f = f + v$ puisque v est nul sur $\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}$ contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Comme $G'(f)$ ne dépend que de $f \mid \mathfrak{l}$, le groupe $ZG'(f)_0$ est invariant par les automorphismes intérieurs de G' associés aux éléments de $G(h)_0$. Pour b fixé dans $ZG'(f)_0 \cap G$, la différentielle en g de la fonction $g \to \chi(gbg^{-1})$ sur $G(h)_0$ est la forme linéaire $g \cdot X \mapsto i < g^{-1} \cdot f,\ X - b \cdot X > (X \in \mathfrak{g}(h))$. Cette différentielle est nulle car $G(g^{-1} \cdot f) = G(f)$; donc $\chi(g_v b g_v^{-1}) = \chi(b)$ pour tout b dans $ZG'(f)_0 \cap G$. L'algèbre de Lie $g_v^{-1} \cdot \mathfrak{h}$ est une polarisation en $g_v^{-1} \cdot f = f - v$; donc elle est une polarisation en f car v est nul sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Le caractère unitaire $g_v^{-1} h g_v \to \bar{\chi}(h)\eta(h)$ de $g_v^{-1}\bar{H}g_v$ est l'unique caractère unitaire de $g_v^{-1}\bar{H}g_v$ qui prolonge $(\eta \mid ZG'(f)_0 \cap G)\chi$ et dont la différentielle est $i f \mid g_v^{-1} \cdot \mathfrak{h}$. Il est alors facile de voir que les représentations $\operatorname{ind}((\eta \mid \bar{H})\bar{\chi}; \bar{H} \uparrow G)$ et $T((\eta \mid ZG'(f)_0 \cap G)\chi;\ g_v^{-1} \cdot \mathfrak{h}')$ sont équivalentes. D'après (iv) et d'après ce qui précède, les représentations $T(\chi; \mathfrak{h}') \otimes \eta$ et $T((\eta \mid ZG'(f)_0 \cap G)\chi;\ g_v \cdot \mathfrak{h}')$ sont équivalentes et $\eta \cdot J(\chi) = J((\eta \mid ZG'(f)_0 \cap G)\chi)$.

(vi) Comme $ZG'(f)_0 \cap L$ est une extension finie de $L(f)_0$ (3.2 (iii)), il n'existe qu'un nombre fini de caractères unitaires de $(ZG'(f)_0 \cap L)G(f)_0$ dont la différentielle est $i\ f \mid \mathfrak{g}(f)$. Notons $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ une famille d'extensions à $ZG'(f)_0 \cap G$ de tous ces caractères unitaires de $(ZG'(f)_0 \cap L)G(f)_0$. Soit χ dans X. Il existe un caractère χ_k $(1 \leq k \leq n)$ tel que $\chi\chi_k^{-1}$ soit trivial sur $ZG'(f)_0 \cap L$ et η dans Γ qui prolonge $\chi\chi_k^{-1}$. D'après (v), $J(\chi) = \eta \cdot J(\chi_k)$, d'où (vi).

3.7: L'application $a \to \mathrm{Re}(a)$ de $\mathfrak{a}^*$ dans $\mathfrak{g}^*$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel réel sous-jacent à $\mathfrak{a}'$ sur $\mathfrak{g}^*$ qui commute à l'action de G'; donc, d'après 2.2, pour tout f dans $\mathfrak{g}^*$, il existe une mesure positive G'-invariante sur $G' \cdot f$. Comme en 2.3, on dira que l'orbite

$G' \cdot f$ est tempérée s'il existe sur $G' \cdot f$ une mesure positive, G'-invariante, tempérée.

3.8. LEMME: (*Les notations sont celles de* 3.1, 3.3, 3.4, 3.5 *et* 3.6). *On suppose que l'orbite $G' \cdot f$ est tempérée.*

(i) *Pour tout χ dans X, la représentation $T(\chi;\mathfrak{h}')$ est somme directe orthogonale d'un nombre fini de représentations unitaires irréductibles complèment continues.*

(ii) *Soit P l'intersection de tous les idéaux $J(\chi)$ ($\chi \in X$). Si J est un idéal primitif de $C^*(G)$ contenant P, alors il existe χ dans X tel que J soit le noyau d'une représentation unitaire irréductible de G, contenue dans $T(\chi;\mathfrak{h}')$.*

(i) Notons V' l'ensemble des X de $\mathfrak{g}'$ tels que toutes les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ aient une partie imaginaire pure strictement inférieure à π, en module. La restriction à V' de l'application exponentielle de G' est un difféormorphisme de V' sur un voisinage ouvert W' de e dans G'. Pour X dans $\mathfrak{g}$, posons:

$$j(X) = \left(\det \frac{\operatorname{sh} 1/2 \operatorname{ad} X}{1/2 \operatorname{ad} X}\right)^{1/2}.$$

La restriction de j à $V = V' \cap \mathfrak{g}$ est analytique. Si α est dans $\mathcal{D}(G)$ et si son support est contenu dans $W = W' \cap G$, on note $\tilde{\alpha}$ la fonction C^∞ sur $\mathfrak{g}$, à support compact contenu dans V, telle que: $\tilde{\alpha}(X) = \alpha(\exp X)$. Soient $\mathrm{d}g$ une mesure de Haar à gauche sur G, $\mathrm{d}X$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ telle que

$$\mathrm{d}(\exp X) = \left|\det\left(\frac{1-e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}\right)\right| \mathrm{d}X$$

et $\mathrm{d}h$ une mesure de Haar à gauche sur $\bar{H}$. Sur l'espace des fonctions ϕ sur G' vérifiant la condition $\phi(gh) = |\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'} h|\phi(g)$ pour g dans G' et h dans $\bar{H}'$, il existe une "mesure" G'-invariante, notée $\phi \to \int_{G'/\bar{H}'} \phi(g)\delta g$. On a vu dans la démonstration de 3.6 (iii), que la "mesure" δg définit une "mesure" sur l'espace des fonctions ϕ sur G vérifiant la condition $\phi(gh) = |\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h|\phi(g)$ pour g dans G et h dans $\bar{H}$. On note $\phi \to \int_{G/\bar{H}} \phi(g)\delta g$ cette "mesure" et on suppose qu'elle est normalisée de telle façon que l'on ait:

$$\int_G \psi(g)\,\mathrm{d}g = \int_{G/\bar{H}} \int_{\bar{H}} \psi(gh)|\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h|^{-1}\,\mathrm{d}h\,\delta g,$$

pour tout ψ dans $L^1(G)$.

Soit α dans $\mathscr{D}(G)$ tel que α soit un élément positif de $C^*(G)$ et tel que le support de α soit contenu dans W. D'après (2, chap. V), l'opérateur $T(\chi;\mathfrak{h}')(\alpha)$ est défini par le noyau

$$K_\alpha(g,g') = \int_{\bar{H}} |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} g'| \chi(h)\alpha(ghg'^{-1})| \times |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h|^{-1/2}\, \mathrm{d}h \quad (g \in G, g' \in G)$$

Pour tout g dans G, $K_\alpha(g,g)$ est positif ou nul car l'opérateur $T(\chi;\mathfrak{h}')(\alpha)$ est positif; donc d'après la théorème de Mercer, l'opérateur $T(\chi;\mathfrak{h}')(\alpha)$ est à trace si et seulement si l'intégrale $\int_{G/\bar{H}} K_\alpha(g,g)\delta g$ est finie. Choisissons sur $\mathfrak{h}^\perp$ une mesure de Lebesgue $\mathrm{d}\ell$. D'après 2.8 (i) et 2.5 (iii), la mesure

$$\phi \to \int_{G'/\bar{H}'} \int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(g\cdot(f+\ell))\,\mathrm{d}\ell\,\delta g$$

sur $G'\cdot f$ est positive et G'-invariante. En outre, on a:

$$\int_{G'/\bar{H}'} \int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(g\cdot(f+\ell))\,\mathrm{d}\ell\,\delta g = \int_{G/\bar{H}} \int_{\mathfrak{h}^\perp} \phi(g\cdot(f+\ell))\,\mathrm{d}\ell\,\delta g.$$

Notons $(j\tilde{\alpha})^\wedge$ la transformée de Fourier

$$x \to \int_{\mathfrak{g}} (j\tilde{\alpha})(X)\, e^{i\langle x,X\rangle}\,\mathrm{d}X$$

de la fonction $j\tilde{\alpha}$. Comme l'orbite $G'\cdot f$ est tempérée, l'intégrale

$$\int_{G/\bar{H}} \int_{\mathfrak{h}^\perp} (j\tilde{\alpha})^\wedge(g\cdot(f+\ell))\,\mathrm{d}\ell\,\delta g$$

est finie. Notons $\mathrm{d}H$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}$ telle que

$$\mathrm{d}(\exp H) = \det\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} H}}{\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} H}\right)\mathrm{d}H.$$

Aux mesures $\mathrm{d}X$ et $\mathrm{d}H$ correspond une mesure sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et supposons que $\mathrm{d}\ell$ est la mesure duale de cette mesure. D'après la formule d'inversion de Fourier, on a:

$$\int_{\mathfrak{h}^\perp} (j\tilde{\alpha})^\wedge(g\cdot(f+\ell))\,\mathrm{d}\ell = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} g| \int_{\mathfrak{h}} j(H)\tilde{\alpha}(\mathrm{Ad}\, g\cdot H)e^{i\langle f,H\rangle}\,\mathrm{d}\ell.$$

La démonstration de (10, lemme 1) prouve que

$$j(H) = \det\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} H\right)\right)\det\left(\frac{1-e^{-\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} H}}{\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} H}\right).$$

D'après (15, lemme 4.9), $W' \cap \bar{H}' = W' \cap H'$; donc $W \cap \bar{H} = W \cap H$ et

$$\int_{\mathfrak{h}^\perp} (j\tilde{\alpha})^\wedge(g \cdot (f + \ell))\, \mathrm{d}\ell = K_\alpha(g, g).$$

Par suite, l'opérateur $T(\chi; \mathfrak{h}')(\alpha)$ est à trace. D'après (7, théorème 3.1), tout élément ϕ de $\mathscr{D}(G)$ est combinaison linéaire finie de produits de convolution $\alpha * \beta$ où α et β sont dans $\mathscr{D}(G)$ et où le support de α est contenu dans W. Si le support de ϕ est contenu dans W, ϕ est combinaison linéaire finie de produits de convolution $\alpha * \alpha^*$ où α est dans $\mathscr{D}(G)$ et où le support de α est contenu dans W; donc $T(\chi; \mathfrak{h}')(\phi)$ est un opérateur à trace, pour tout ϕ dans $\mathscr{D}(G)$. Par suite, d'après (16, §1), la représentation $T(\chi; \mathfrak{h}')$ est somme directe orthogonale d'une famille, au plus dénombrable, de représentations unitaires irréductibles complètement continues, celles-ci ayant une multiplicité finie. Si $\mathscr{H}$ est l'espace de $T(\chi; \mathfrak{h}')$, il existe une famille $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_n, \ldots$, au plus dénombrable, de sous-espaces invariants, deux à deux orthogonaux, telle que la restriction de $T(\chi; \mathfrak{h}')$ à chaque $\mathscr{H}_n$ soit multiple d'une représentation unitaire irréductible complèment continue et telle que les restrictions de $T(\chi; \mathfrak{h}')$ à deux $\mathscr{H}_n$ distincts soient disjointes. Pour chaque n, notons π_n la classe des représentations unitaires irréductibles contenues dans la restriction de $T(\chi; \mathfrak{h}')$ à $\mathscr{H}_n$. Le groupe G' opère naturellement dans le dual unitaire $\hat{G}$ de G. D'après 3.6 (iii), il existe une représentation unitaire T' de G' dans $\mathscr{H}$ qui prolonge $T(\chi; \mathfrak{h}')$ et qui est équivalente à $\operatorname{ind}(\chi'; \bar{H}' \uparrow G')$; donc G' permute les π_n. Chaque π_n étant complètement continu, le stabilisateur G'_n de π_n dans G'est fermé dans G' et le quotient G'/G'_n est dénombrable; donc $G' = G'_n$ pour tout n. Par suite, chaque espace $\mathscr{H}_n$ est invariant par T'. Notons P_n le projecteur orthogonal de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}_n$. D'après ce qui précède, P_n commute à T'. D'après (1, théorème C), le commutant de $\operatorname{ind}(\chi'; \bar{H}' \uparrow G')$ est isomorphe à celui de $\operatorname{ind}(\chi' \mid (ZG'(f)_0 \cap G)G'(f)_0;\ (ZG'(f)_0 \cap G)G'(f)_0 \uparrow G'(f))$. De l'égalité $G' = G'(f)_0 G$, on tire $G'(f) = G'(f)_0 G(f)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ étant algébrique, le groupe $ZG'(f)_0$ est d'indice fini dans $G'(f)$; donc le groupe $ZG'(f)_0 \cap G$ est d'indice fini dans $G(f)$ et le groupe $(ZG'(f)_0 \cap G)G'(f)_0$ est d'indice fini dans $G'(f)$. Par suite, le commutant de T' est de dimension finie; donc la famille $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_n, \ldots$, est finie.

(ii) Considérons une famille $\chi_1, \ldots, \chi_n$ d'éléments de X, comme dans la démonstration de 3.6 (vi). Désignons par $J_{1,k}, \ldots, J_{m_k,k}$ ($k = 1, \ldots, n$), les noyaux des représentations unitaires irréductibles contenues dans $T(\chi_k; \mathfrak{h}')$. Notons Γ' le sous-groupe des éléments de Γ triviaux sur $(ZG'(f)_0 \cap G)L$. D'après 3.6 (v), si η est dans Γ', alors $\eta \cdot J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k$, $1 \leq k \leq n$) est l'un des idéaux $J_{1,k}, \ldots, J_{m_k,k}$; donc le stabilisateur de $J_{i,k}$ dans Γ' est un sous-groupe d'indice fini de Γ'. D'après (i), $J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k$, $1 \leq k \leq n$) est un idéal maximal; donc le stabilisateur de $J_{i,k}$ est fermé dans Γ. Puisque Γ' est un sous-groupe cocompact de Γ, le stabilisateur de $J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k$, $1 \leq k \leq n$) dans Γ est un sous-groupe cocompact de Γ. D'aprés (i) et (4, 2.6), l'orbite $\Gamma \cdot J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq n$) est fermée dans $\operatorname{Prim} C^*(G)$. La réunion des orbites $\Gamma \cdot J_{i,k}$ ($1 \leq i \leq m_k, 1 \leq k \leq n$) est alors fermée dans $\operatorname{Prim} G^*(G)$, d'où (ii) puisque P est l'intersection des éléments de cette réunion.

3.9. Lemme: *Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Lie résoluble algébrique de $\mathfrak{gl}(V)$ et B le sous-groupe analytique de* $\mathrm{GL}(V)$, *d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$.*

(i) *Soient (g_m) une suite dans* $\mathrm{GL}(V)$ *et (X_m) une suite dans $\mathfrak{gl}(V)$ telles que la suite $(g_m X_m g_m^{-1})$ converge vers X. Pour chaque m, on note $X_{m,s} + X_{m,n}$ la décomposition de Jordan de X_m ($X_{m,s}$ est la partie semi-simple et $X_{m,n}$ est la partie nilpotente). On suppose que les $X_{m,s}$ commutent deux à deux. Alors la suite $(X_{m,s})$ possède une sous-suite convergente. Notons X' la limite de cette sous-suite et (g'_m) la sous-suite des (g_m) indexée par les entiers de la sous-suite ci-dessus. Alors la suite $(g'_m X' g'^{-1}_m)$ converge vers la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de X.*

(ii) *Soit H un sous-groupe algébrique connexe de B. Il existe un voisinage ouvert ω de 0 dans $\mathfrak{b}$, invariant par le groupe adjoint de $\mathfrak{b}$ et par les translations du radical unipotent de $\mathfrak{b}$, qui vérifie la condition suivante: si X est dans ω et si* $\exp X$ *est dans H, alors X est dans l'algèbre de Lie de H.*

(iii) *Soient B' un revêtement de B et π l'homomorphisme de revêtement. Soient (g_m) une suite dans B' et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie algèbrique de $\mathfrak{b}$ telles que la suite $(g_m \mathfrak{h} g_m^{-1})$ converge vers $\mathfrak{h}'$ dans la grassmannienne* $\mathrm{Gr}(\mathfrak{b}, \dim \mathfrak{h})$. *On note H le sous-groupe analytique de B' d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et H' le groupe des éléments h de B' qui sont limite d'une suite (h_m) où h_m est dans $g_m H g_m^{-1}$, pour tout m. Alors $\mathfrak{h}'$ est l'algèbre de Lie de H',* $\operatorname{Ker} \pi \cap H = \operatorname{Ker} \pi \cap H'$ *et H' est une extension finie de* $(\operatorname{Ker} \pi \cap H)H'_0$.

(i) Notons $V_{\mathbb{C}}$ le complexifié de V, I l'opérateur identité de $V_{\mathbb{C}}$ et X_s la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de X. Pour tout λ complexe, $\det(X_m - \lambda I)$ converge vers $\det(X - \lambda I)$; donc les valeurs propres de X_m convergent vers celles de X. Comme les $X_{m,s}$ commutent deux à deux, ils se diagonalisent dans une même base de $V_{\mathbb{C}}$; donc la suite $(X_{m,s})$ est bornée dans $\mathfrak{gl}(V)$. Supposons que les X_m ont r valeurs propres distinctes et que la suite $(X_{m,s})$ est convergente. Notons X' sa limite, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de X et $(\lambda(1, m), \ldots, \lambda(r, m))$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de X_m. On ordonne la famille $\lambda(1, m), \ldots, \lambda(r, m))$ de façon que pour une suite d'entiers $0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_p = r$, les suites $(\lambda(k, m))$ $(q_{i-1} < k \leq q,\ 1 \leq i \leq p)$ convergent vers λ_i. Pour chaque m, notons $V(\lambda(1, m)), \ldots, V(\lambda(r, m))$ les espaces propres de $X_{m,s}$ pour les valeurs propres $\lambda(1, m), \ldots, \lambda(r, m)$ et $n(1, m), \ldots, n(r, m)$ leurs dimensions respectives. Les valeurs propres de X' sont celles de X avec les mêmes multiplicités. Notons $V'(i)$ et $V(i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ les espaces propres de X' et X_s pour la valeur propre λ_i. Pour m assez grand, $V'(i) = V(\lambda(q_{i-1} + 1, m)) \oplus \cdots \oplus V(\lambda(q_i, m))$ $(i = 1, \ldots, p)$ puisque X' commute aux $X_{m,s}$. Si V_i' $(i = 1, \ldots, p)$ est un point d'accumulation de la suite $(g_m \cdot V'(i))$ dans la grassmanienne $\mathrm{Gr}(V_{\mathbb{C}}, \dim V(i))$, alors $(X - \lambda_i I)^{\dim V(i)}$ est nul sur V_i' puisque $(X_m - \lambda(q_{i-1} + 1, m)I)^{n(q_{i-1}+1, m)} \ldots (X_m - \lambda(q_i, m)I)^{n(q_i, m)}$ est nul sur $V'(i)$; donc $V_i' = V(i)$. Il résulte de ceci que la suite $(g_m X' g_m^{-1})$ converge vers X_s.

(ii) Regardons H et B comme les composantes neutres (pour la topologie usuelle) des groupes des points réels $H(\mathbb{R})$ et $B(\mathbb{R})$ des groupes algébriques H et B, définis sur $\mathbb{R}$. On notera ici, $H(\mathbb{R})_0$ et $B(\mathbb{R})_0$ les sous-groupes H et B de $\mathrm{GL}(V)$. Soient T un tore maximal de H, défini sur $\mathbb{R}$, et T' un tore maximal de B, défini sur $\mathbb{R}$, contenant T. Notons B_u le groupe des éléments unipotents de $B(\mathbb{R})_0$, $T(\mathbb{R})$ et $T'(\mathbb{R})$ les groupes des points réels de T et T'. On a: $B(\mathbb{R})_0 = T'(\mathbb{R})_0 B_u$ et $H(\mathbb{R})_0 = T(\mathbb{R})_0 B_u$. Il existe une base $(\chi_1, \ldots, \chi_p)$ du groupe des caractères rationnels de T' telle que $(\chi_1, \ldots, \chi_q)$ $(1 \leq q \leq p)$ soit une base du groupe des caractères rationnels de T', triviaux sur T. Les caractères $\chi_1, \ldots, \chi_p$ définissent, de manière unique, des homomorphismes de $B(\mathbb{R})_0$ dans $\mathbb{C}^*$ qui sont triviaux sur B_u et qui prolongent les homomorphismes de $T'(\mathbb{R})_0$ dans $\mathbb{C}^*$ qu'ils définissent. Notons $\chi_1, \ldots, \chi_p$ ces homomorphismes. Il est clair que $H(\mathbb{R})_0 B_u$ est l'intersection des noyaux des homomorphismes $\chi_1, \ldots, \chi_q$. Notons $\mu_1, \ldots, \mu_q$ les différentielles de $\chi_1, \ldots, \chi_q$, en l'élément neutre. Soit ω l'ensemble des X de $\mathfrak{b}$ dont les valeurs propres ont une partie imaginaire strictement inférieure à $\pi/2$, en module, et tels que

$|\mathrm{Im}\langle\mu_1, X\rangle| < \pi, \ldots, |\mathrm{Im}\langle\mu_q, X\rangle| < \pi$. L'ouvert ω est invariant par le groupe adjoint et par les translations de l'algèbre de Lie de B_u. Soit X dans ω tel que $\exp(X)$ soit dans $H(\mathbb{R})_0$. Les nombres $\langle\mu_1, X\rangle, \ldots, \langle\mu_q, X\rangle$ sont nuls puisque $\exp(X)$ est dans $H(\mathbb{R})_0 B_u$; donc X est dans l'algèbre de Lie de $H(\mathbb{R})_0 B_u$. Dans le revêtement universel de $H(\mathbb{R})_0 B_u$, l'image réciproque de $H(\mathbb{R})_0$, par l'homomorphisme de revêtement, est connexe car $H(\mathbb{R})_0$ contient un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})_0 B_u$. Les parties imaginaires des valeurs propres de ad X sont strictement inférieures à π, en module; donc d'après (4, 2.8, b), X est dans l'algèbre de Lie de $H(\mathbb{R})_0$.

(iii) (a) Supposons $B' = B$. Il est clair que l'algèbre de Lie de H' contient $\mathfrak{h}'$. Considérons l'ouvert ω de (ii). Si X est dans ω et si $\exp(X)$ est dans H', alors, d'après (ii), il existe une suite (X_m) dans ω, indexée par des entiers assez grands, telle que X_m soit dans $g_m \mathfrak{h} g_m^{-1}$ pour chaque m et telle que la suite $(\exp(X_m))$ converge vers $\exp X$. La suite (X_m) converge vers X car la restriction à ω de l'application exponentielle de B est un difféomorphisme de ω sur $\exp(\omega)$; donc X est dans $\mathfrak{h}'$. Par suite, $\mathfrak{h}'$ est l'algèbre de Lie de H' et $H' \cap \exp(\omega)$ est contenu dans H'_0. Soient X dans $\mathfrak{h}'$, X_s et X_n les parties semi-simples et nilpotentes de la décomposition de Jordan de X, T un tore maximal de H et $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. D'après (i), il existe une suite (g'_m) dans B et X' dans $\mathfrak{t}$ tels que la suite $(g'_m X' g'^{-1}_m)$ converge vers X_s et tels que, pour chaque m, il existe un entier n pour lequel g'_m est dans $g_n H$. Notons $V_1, \ldots, V_q$ les espaces propres, deux à deux distincts, de X'. La suite $(g'_m \cdot V_i)$ $(i = 1, \ldots, q)$ est convergente dans $\mathrm{Gr}(V_{\mathbb{C}}, \dim V_i)$ puisque X' et X_s ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Soit V'_i $(i = 1, \ldots, q)$ la limite de cette suite. Notons $T(V_1, \ldots, V_q)$ le sous-groupe des éléments h de T tels que les restrictions de h à $V_1, \ldots, V_q$ soient des homothéties. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$ contient une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{t}(V'_1, \ldots, V'_q)$ conjuguée à l'algèbre de Lie de $T(V_1, \ldots, V_q)$, par un élément de $\mathrm{GL}(V)$, et qui contient X. Par suite, il existe un tore contenu dans H'_0 et qui contient $\exp(X_s)$. Notons $\chi_1, \ldots, \chi_r$ les poids, deux à deux distincts, de B dans $V_{\mathbb{C}}$ et ψ l'homomorphisme $h \to (\chi_1(h)|\chi_1(h)|^{-1}, \ldots, \chi_r(h)|\chi_r(h)|^{-1})$ de B dans $(\mathbb{C}^*)$. Soit K un sous-groupe compact maximal de H'_0. D'après ce qui précède, $\exp(X)$ est dans $K(\mathrm{Ker}\,\psi \cap H'_0)$ puisque $K\,(\mathrm{Ker}\,\psi \cap H'_0)$ est invariant dans H'_0. Par suite, $H'_0 = K(\mathrm{Ker}\,\psi \cap H'_0)$ et $H'_0(\mathrm{Ker}\,\psi) = K(\mathrm{Ker}\,\psi)$ est un sous-groupe fermé de B. D'aprés (4, 2.8, b), $\exp(\omega)$ est invariant par les translations à droite de B_u. Le groupe $\mathrm{Ker}\,\psi$ est un groupe résoluble exponentiel et ω est invariant par les translations de l'algèbre de Lie de $\mathrm{Ker}\,\psi$; donc $\exp(\omega)$ est invariant par les translations à droite de $\mathrm{Ker}\,\psi$. Par suite, $\exp(\omega) \cap H'(\mathrm{Ker}\,\psi)$ est contenu dans $H'_0(\mathrm{Ker}\,\psi)$ puisque $\exp(\omega) \cap H'$ est contenu dans H'_0; donc $H'(\mathrm{Ker}\,\psi)$ est fermé dans B. Comme $B/\mathrm{Ker}\,\psi$ est compact, H' n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

(b) On conserve la notation ω de (a). Notons Ω l'image de ω par l'application exponentielle de B'. La restriction de π à Ω est un homéomorphisme de Ω sur $\pi(\Omega)$ puisque les restrictions des applications exponentielles de B' et B à ω sont des difféomorphismes de ω sur Ω et $\pi(\Omega)$. Le groupe $\pi(H')$ est contenu dans l'ensemble des éléments h de B qui sont limite d'une suite (h_m) où h_m est dans $\pi(g_m H g_m^{-1})$, pour tout m; donc d'après (a), $\mathfrak{h}'$ est l'algèbre de Lie de H' et H' est une extension finie de $(\mathrm{Ker}\,\pi \cap H')H'_0$. Il est clair que $\mathrm{Ker}\,\pi \cap H$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\,\pi \cap H'$. Soient z dans $\mathrm{Ker}\,\pi \cap H'$, B_u le groupe des éléments unipotents de B, T un tore maximal de $\pi(H)$ et B'_u la composante neutre de $\pi^{-1}(B_u)$. La restriction de π à B'_u sur B_u est un isomorphisme puisque B_u est simplement connexe. Il existe une suite (h_m) dans H telle que la suite $(g_m h_m g_m^{-1})$ converge vers z. Pour chaque m, il existe g'_m dans H tel que la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de $\pi(g'^{-1}_m h_m g'_m)$ soit dans T. Pour chaque m, notons h'_m l'élément de $H \cap B'_u$ tel que $\pi(h'_m)$ soit la partie unipotente de la décomposition de Jordan, dans $\mathrm{GL}(V)$, de $\pi(g'^{-1}_m h_m g'_m)$ et posons $t_m = g'^{-1}_m h_m g'_m h'^{-1}_m$. Pour m assez grand, $g_m g'_m t_m h'_m (g_m g'_m)^{-1}$ est dans $z\Omega$ puisque la suite $(g_m g'_m t_m h'_m (g_m g'_m)^{-1})$ converge vers z. D'après (4, 2.8, b), Ω est invariant par les translations à droite de B'_u et par les automorphismes intérieurs de B'; t_m est dans $z\Omega$ pour m assez grand. D'après (i), la suite $(\pi(t_m))$ possède une sous-suite convergeant vers l'opérateur identité de V; donc la suite (t_m) possède une sous-suite convergeant vers z puisque la restriction de π à $z\Omega$ est un homéomorphisme de $z\Omega$ sur $\pi(\Omega)$ et $\mathrm{Ker}\,\pi \cap z\Omega = \{z\}$. Par suite, z est dans H.

3.10. LEMME: (*Les notations sont celles de* 3.1, 3.3 *et* 3.7). *Soit a dans U telle que $f = \mathrm{Re}(a)$ soit admissible et telle que l'orbite $G' \cdot f$ soit tempérée. Alors l'orbite $G' \cdot f$ est fermée dans $\mathfrak{g}^*$, pour la topologie de Zariski.*

(a) Choisissons f' dans $\mathfrak{g}'^*$ qui prolonge f. Comme a est dans U, il existe une polarisation $\mathfrak{h}'_0$ en f', résoluble, satisfaisant la condition de Pukanszky et qui est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{a}'$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}'_0 \cap \mathfrak{g}$ est une polarisation résoluble en f, qui satisfait la condition de Pukanszky puisque $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'(f') + \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Lie résoluble maximale de $\mathfrak{g}'$, contenant $\mathfrak{h}'_0$. Cette algèbre de Lie est algébrique. Notons B le sous-groupe analytique de G' d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. D'après (2.5 (v)), l'orbite $G' \cdot f$ est fermée dans $\mathfrak{g}^*$, pour la topologie de Zariski, si et seulement si l'orbite $B \cdot f$ est fermée pour la topologie usuelle. Dans les parties (b), (c), (d) nous supposerons que *l'orbite* $B \cdot f$ *n'est pas fermée dans* $\mathfrak{g}^*$, *pour la topologie usuelle* et il s'agit d'aboutir à une contradiction.

(b) Il existe une suite $(g_0, g_1, \ldots)$ dans B avec $g_0 = 1$ telle que $x_n = g_n \cdot f$ tende vers un point x de $\mathfrak{g}^* \backslash B \cdot f$. Soient $\mathfrak{h}'_n = g_n \cdot \mathfrak{h}'_0$ et $\mathfrak{h}_n = g_n \cdot \mathfrak{h}_0$. Notons H'_n et H_n les sous-groupes analytiques de G' d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'_n$ et $\mathfrak{h}_n$. Dans (12), on munit l'ensemble des sous-groupes fermés de G' d'une topologie d'espace compact métrisable. On peut supposer que les suites (H_n) et (H'_n) ont une limite dans cet espace, que la suite $(\mathfrak{h}'_n)$ a une limite $\mathfrak{h}'$ dans la grassmannienne $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}', \dim \mathfrak{h}'_0)$ et que la suite $(\mathfrak{h}_n)$ a une limite dans la grassmannienne $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}, \dim \mathfrak{h}_0)$. Notons H' et H les limites respectives des suites (H'_n) et (H_n). Pour éviter toute confusion, on note ici, $(H')_0$ et $(H)_0$ les composantes neutres de H' et H. Dans cette partie, on montre que $\mathfrak{h}$ *est l'algèbre de Lie de H et que* $H/(H)_0$ *est un groupe commutatif de type fini.* Le groupe H (resp. H') est l'ensemble des éléments h de B qui sont limite d'une suite (h_n) où h_n est dans H_n (resp. H'_n), pour tout n. Il est clair que $\mathfrak{h}$ est contenu dans l'algèbre de Lie de H. D'après (3.9 (iii)), $\mathfrak{h}'$ est l'algèbre de Lie de H'. Le groupe G' est le revêtement universel d'un groupe algébrique. Notons π l'homomorphisme de ce revêtement. Soit ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{b}$ qui vérifie les conditions de (3.9 (ii)) relativement à $\pi(H'_0)$. Soit X dans $\mathfrak{h}'$ tel que $\exp X$ soit dans H. Il existe une suite (h_n) dans B qui converge vers $\exp X$ et telle que h_n soit dans H_n, pour tout n. De même, il existe une suite X_n dans $\mathfrak{b}$ qui converge vers X et telle que X_n soit dans $\mathfrak{h}'_n$, pour tout n. Pour n assez grand, il existe Y_n dans ω tel que $h_n = \exp X_n \exp Y_n$ puisque $\exp(\omega)$ est un voisinage de 1 dans B; en outre, la suite (Y_n) converge vers 0. Le groupe G'/G étant vectoriel, pour n assez grand, $X_n + Y_n$ est dans $\mathfrak{g}$ puisque $\exp X_n \exp Y_n$ est dans G. L'ouvert ω de $\mathfrak{b}$ étant invariant par le groupe adjoint de $\mathfrak{b}$, Y_n est dans $\mathfrak{h}'_n$ puisque $\pi(\exp Y_n)$ est dans $\pi(H'_n)$; donc $X_n + Y_n$ est dans $\mathfrak{h}_n$. Par suite, X est dans $\mathfrak{h}$ puisque $X_n + Y_n$ tend vers X. Il résulte de ceci que $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie de H. Soient h_1, h_2 dans H', $(h_1(n))$ et $(h_2(n))$ des suites dans B qui convergent respectivement vers h_1 et h_2 et telles que $h_1(n)$ et $h_2(n)$ soient dans H'_n, pour tout n. Notons $\mathfrak{b}'$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{b}$. Il existe X dans $\mathfrak{b}'$ tel que $\exp X = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ et, pour chaque n, X_n dans $\mathfrak{b}'$ tel que $\exp X_n = h_1(n) h_2(n) h_1^{-1}(n) h_2^{-1}(n)$. Pour chaque n, X_n est dans $\mathfrak{h}'_n$ puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'_n$ est algèbrique. Le groupe G'/G étant vectoriel, X_n est dans $\mathfrak{h}'_n \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_n$ puisque G contient le groupe dérivé de G'. Le groupe B étant le revêtement d'un groupe algébrique, le sous-groupe analytique de B, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}'$ est simplement connexe; donc son application exponentielle est un difféomorphisme. Par suite X_n tend vers X, d'où $X \in \mathfrak{h}$. Il résulte de toute ceci que $H'/(H)_0$ est commutatif. Par suite, si h est dans $(H')_0 \cap H$, alors il existe Y dans $\mathfrak{h}'$ tel que $\exp(-Y)h$ soit dans $(H)_0$; donc, d'après ce qui précède, Y est dans $\mathfrak{h}$ et h est dans $(H)_0$. Le groupe $(H)_0$ est donc égal à $(H')_0 \cap H$ et $H/(H)_0$ est isomorphe à un sous-groupe de $H'/(H')_0$. Posons $\Gamma = \operatorname{Ker} \pi \cap B$ et notons B' le sous-groupe analytique de B d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}'$. Le sous-groupe $\Gamma B'$ de B est l'ensemble des éléments h de B tels que $\pi(h)$ soit unipotent; donc $\Gamma B'$ est fermé dans B. Le groupe $\Gamma \cap B'$ est trivial puisque B' est simplement connexe; donc Γ est isomorphe à $\Gamma B'/B'$. Le groupe Γ est de type fini puisqu'il est isomorphe à un sous-groupe discret du groupe commutatif B/B'. D'après (3.9 (iii)), H' est une extension finie de $(\Gamma \cap H'_0)(H')_0$; donc, d'après ce qui précède, $H'/(H')_0$ est un groupe abélien de type fini. Par suite, $H/(H)_0$ est un groupe abélien de type fini.

(c) On conserve les notations $(H)_0$, π et Γ de (b). Soient K un sous-groupe compact maximal de $(H)_0$, $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K et $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une base du réseau des éléments Y de $\mathfrak{k}$ tels que $\exp Y = 1$. Il existe une suite (X_n) dans $\mathfrak{h}_0$ telle que $g_n \cdot X_n$ tende vers Y_1. D'après (10, p. 270), il existe un tore maximal de $\mathfrak{h}'_0$ contenu dans $\mathfrak{g}'(f')$. Notons-le $\mathfrak{t}$. Pour chaque n, il existe g'_n dans H'_0 tel que la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de $g'^{-1}_n \cdot X_n$ dans $\mathfrak{h}'_0$ soit dans $\mathfrak{t}$. Remarquons que Y_1 est semi-simple puisqu'il est dans $\mathfrak{k}$. D'après (3.9 (i)), il existe Y'_1 dans $\mathfrak{t}$ et une suite (g''_n) dans B tels que $g''_n \cdot Y'_1$ tende vers Y_1 et tels que g''_n soit un élément de la suite $(g_0 g'_0, g_1 g'_1, \ldots)$, pour chaque n. L'image de $g''_n \cdot Y'_1$ par l'application canonique de $\mathfrak{g}'$ sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{g}$ est égale à celle de Y'_1; donc Y'_1 est dans $\mathfrak{g}$ puisque Y_1 y est. Notons π la représentation fidèle de $\mathfrak{g}'$ associée à π. Les éléments $\pi(Y_1)$ et $\pi(Y'_1)$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités; donc $\pi(\exp Y'_1) = \pi(\exp Y_1) = 1$. L'élément $\exp Y'_1$ de B est alors dans Γ; donc $\exp Y'_1 = 1$ puisque $g''_n \cdot Y'_1$ tend vers Y_1. Soit n entier positif. Il existe un entier m tel que $g''_n = g_m g'_m$. On a $\langle g_m \cdot f, g''_n \cdot Y'_1 \rangle = \langle f, g'_m \cdot Y'_1 \rangle$ et la forme linéaire $f - g'^{-1}_m \cdot f$ est nulle sur $\mathfrak{h}_0$ puisque $\mathfrak{h}'_0$ est une polarisation en f' et g'_m est dans H'_0; donc $\langle g_m \cdot f, g''_n \cdot Y'_1 \rangle = \langle f, g'_m \cdot Y'_1 \rangle$. La forme linéaire f étant admissible et $\exp Y'_1$ étant égal à 1, $\langle f, Y'_1 \rangle$ est dans $2\pi\mathbb{Z}$. Quand n tend vers $+\infty$, $g_n \cdot f$ tend vers x; donc $\langle x, Y_1 \rangle$ est dans $2\pi\mathbb{Z}$. On montre de même que $\langle x, Y_2 \rangle, \ldots, \langle x, Y_p \rangle$ sont dans $2\pi\mathbb{Z}$. La forme linéaire x est nulle sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. D'après ce qui précède, le caractère unitaire du revêtement universel de $(H)_0$ de différentielle $i\,x \mid \mathfrak{h}$ est trivial sur le noyau de l'homomorphisme de revêtement; donc il existe un caractère unitaire de $(H)_0$ de différentielle $i\,x \mid \mathfrak{h}$. Notons le ξ'. D'après (3.4 (iii)), il existe un caractère unitaire de H_n de différentielle $i\,x_n \mid \mathfrak{h}_n$. Notons le ξ_n.

Soient $(p(n))$ une suite d'entiers, (h_n) et (h'_n) deux suites dans B qui ont la même limite et telles que h_n et h'_n soient dans $H_{p(n)}$, pour tout n. Reprenons la notation ω de (b). Pour n assez grand, il existe X_n dans ω tel que $\exp X_n = h_n^{-1}h'_n$. On peut choisir les X_n de façon que la suite (X_n) converge vers 0. Le groupe G'/G étant vectoriel, X_n est dans $\mathfrak{g}$; donc X_n est dans $\mathfrak{h}_{p(n)}$. Par suite, $\xi_{p(n)}(h_n^{-1}h'_n) = \exp\langle i\,x_{p(n)}, X_n\rangle$; donc $\xi_{p(n)}(h_n^{-1}h'_n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il résulte de ceci que si h est dans $(H)_0$ et si (h_n) est une suite dans B qui converge vers h et telle que h_n soit H_n, pour tout n, alors $\xi_n(h_n)$ tend vers $\xi'(h)$ puisque le groupe $(H)_0$ est engendré par l'image de $\mathfrak{h}$ par l'application exponentielle. Soient $(h_1, \ldots, h_p)$ un système de représentants d'une famille génératrice de $H/(H)_0$ et $(h_1(n)), \ldots, (h_p(n))$ des suites dans B qui convergent respectivement vers $h_1, \ldots, h_p$ et telles que $h_1(n), \ldots, h_p(n)$ soient dans H_n pour tout n. En extrayant au besoin des sous-suites, on peut supposer les suites $(\xi_n(h_1(n))), \ldots, (\xi_n(h_p(n)))$ convergentes. D'après ce qui précède, si $(p(n))$ est une suite d'entiers, si h est dans H et si (h_n) est une suite dans B qui converge vers h et telle que h_n soit dans $H_{p(n)}$, pour tout n, alors la suite $(\xi_{p(n)}(h_n))$ a une limite et cette limite ne dépend que de h. Notons la $\xi(h)$. La fonction $h \to \xi(h)$ est un caractère unitaire de H qui prolonge ξ'. D'après (12, théorème 4.2), la représentation $\operatorname{ind}(\xi; H \uparrow G)$ est faiblement contenue dans la suite des $\operatorname{ind}(\xi_n; H_n \uparrow G)$. Comme les $\operatorname{ind}(\xi_n; H_n \uparrow G)$sont deux à deux équivalentes, $\operatorname{ind}(\xi; H \uparrow G)$ est faiblement contenue dans $\operatorname{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow G)$. D'après (3.4 (ii)), le sous-groupe $\bar{H}_0 = ZH'_0 \cap G$ de G est fermé dans G. On a alors $\operatorname{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow G) = \operatorname{ind}(\operatorname{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow \bar{H}_0); \bar{H}_0 \uparrow G)$. Reprenons la notation X de 3.4. On rappelle que si χ est dans X, $\bar{\chi}$ est le caractère unitaire de $\bar{H}$ qui prolonge χ et ξ_0. Alors

$$\operatorname{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow \bar{H}_0) = \int_X^{\oplus} \bar{\chi}\, \mathrm{d}\chi$$

d'où

$$\operatorname{ind}(\xi_0; H_0 \uparrow G) = \int_X^{\oplus} \operatorname{ind}(\bar{\chi}; \bar{H}_0 \uparrow G)\, \mathrm{d}\chi.$$

D'après 3.6, le noyau de $\operatorname{ind}(\bar{\chi}; \bar{H}_0 \uparrow G)$ dans $C^*(G)$ est $J(\chi)$. Ainsi, le noyau de $\operatorname{ind}(\xi; H \uparrow G)$ dans $C^*(G)$ contient $\bigcap_{\chi \in X} J(\chi)$. Combinant avec 3.8, on voit que tout idéal primitif de $C^*(G)$ contenant le noyau de $\operatorname{ind}(\xi; H \uparrow G)$ est le noyau d'une représentation unitaire irréductible contenue dans $T(\chi; \mathfrak{h}_0')$ pour un $\chi \in X$.

(d) On rappelle que l'ouvert U est le complémentaire de l'ensemble des zéros dans $\mathfrak{a}^*$ d'une fonction polynômiale p homogène et semi-invariante. Notons q la fonction polynômiale sur $\mathfrak{g}^*$ telle que pour tout a dans $\mathfrak{a}^*$ on ait $q(\operatorname{Re} a) = |p(a)|^2$. Elle est homogène et semi-invariante pour l'action de G' dans $\mathfrak{g}^*$. Elle est nulle sur le complémentaire de $G' \cdot f$ dans son adhérence dans $\mathfrak{g}^*$ puisque les orbites de G' dans l'ouvert $\operatorname{Re}(U)$ de $\mathfrak{g}^*$ ont toutes la même dimension. La démonstration de (2.5 (v)) prouve que x n'est pas dans $G' \cdot f$; donc $q(x) = 0$. Soient ν le poids de q dans $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}'' = \operatorname{Ker} \nu \cap \mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'(f')$ est contenue dans $\operatorname{Ker} \nu$ puisque q n'est pas nul en f; donc $\operatorname{Ker} \nu$ contient $\mathfrak{h}_0'$ puisque $\mathfrak{g}'(f')$ contient un tore maximal de $\mathfrak{h}_0'$ (10, p. 270). Par suite, $\mathfrak{g}''$ contient tous les $\mathfrak{h}_n$ et $\mathfrak{h}$. D'après (3, 6.1), q est dans $S(\mathfrak{g}'')$. Si ℓ est une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{g}''_{\mathbf{C}}$ et si $\mathfrak{k}$ est une polarisation résoluble en ℓ, on note $I(\ell)$ le noyau de la représentation $\operatorname{ind}^\sim(\ell \mid \mathfrak{k}; \mathfrak{k} \uparrow \mathfrak{g}''_{\mathbf{C}})$. D'après (9), $I(\ell)$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}''_{\mathbf{C}})$ et il existe u dans le centre de $U(\mathfrak{g}''_{\mathbf{C}})$ tel que pour tout ℓ régulière dans $(\mathfrak{g}''_{\mathbf{C}})^*$, $u - q(\ell)$ soit dans $I(\ell)$. Puisque q est homogène, q n'est pas nul en if, mais il est nul en ix; donc u n'est pas dans $\operatorname{Ker} \operatorname{ind}^\sim(if \mid \mathfrak{h}_0; \mathfrak{h}_0 \mid g'')$ mais, d'après (5, 6.4.1), u est dans $\operatorname{Ker} \operatorname{ind}^\sim(ix \mid \mathfrak{h}; \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g}'')$. D'après (5, 5.1.7) u est dans $\operatorname{Ker} \operatorname{ind}^\sim(ix \mid \mathfrak{h};\ h \uparrow \mathfrak{g})$. La démonstration de l'assertion (i) de (8, lemme 2.1) prouve que le noyau de la représentation infinitésimale associée à la représentation $\operatorname{ind}(\xi; H \uparrow G)$ contient $\operatorname{Ker} \operatorname{ind}^\sim(ix \mid \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g})$. Il résulte alors de (c) qu'il existe χ dans X et une représentation unitaire irréductible T contenue dans $T(\chi; \mathfrak{h}_0')$ pour laquelle le noyau de la représentation infinitésimale associée contient u. Soit G'' le sous-groupe analytique de G' d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}''$. Le groupe G'' est le noyau du poids de u dans G; donc G'' contient $\bar{H}_0 = ZH_0' \cap G$. Alors $T(\chi; \mathfrak{h}_0') = \operatorname{ind}(\operatorname{ind}(\bar{\chi}; \bar{H}_0 \uparrow G''); G'' \uparrow G)$. Notons $\mathcal{H}$ l'espace de la représentation $\pi'' = \operatorname{ind}(\bar{\chi}; \bar{H}_0 \uparrow G'')$. Soit Y dans $\mathfrak{g} \backslash \mathfrak{g}''$ et posons $g(t) = \exp(tY)$ $(t \in \mathbb{R})$. La représentation $T(\chi; \mathfrak{h}_0')$ est équivalente à la représentation π de G dans $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}$ définie par

$$(\pi(g(t)g)\lambda)(s) = \pi''(g(t-s)g \quad g(s-t))\lambda(s-t)$$

pour t dans $\mathbb{R}$, g dans G'' et λ dans $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}$. Notons π_1 une sous-représentation irréductible de π équivalente à T et π_∞ la représentation infinitésimale associée à π. Soient λ non nul dans l'espace de π_1, α dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ϕ dans $\mathcal{D}(G'')$ et ψ la fonction $g(t)g \mapsto \alpha(t)\phi(g)$ $(t \in \mathbb{R},\ g \in G'')$ sur G. On fixe une mesure de Haar à gauche sur G. L'élément $\lambda' = \pi(\psi)\lambda$ de l'espace de π est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ et se trouve dans le domaine de définition de $\pi_\infty(u)$. La démonstration de l'assertion (i) de (8, lemme 2.1) prouve que le noyau de la représentation infinitésimale associée à π'' contient $\operatorname{Ker} \operatorname{ind}^{\sim}(if \mid \mathfrak{h}_0; \mathfrak{h}_0 \uparrow \mathfrak{g}'')$; donc pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a: $(\pi_\infty(u)\lambda')(t) = q(ig(t)\cdot f)\lambda'(t)$. L'image de λ' par l'opérateur $\pi_\infty(u)$ est nulle puisque u est dans le noyau de la représentation infinitésimale associée à π_1; donc λ' est nul puisque q ne s'annule pas sur $G_0 \cdot (if)$. Etant donné l'arbitraire de α et de ϕ, on voit que λ est nul, ce qui est absurde.

3.11. Soit Γ le groupe adjoint de $\mathfrak{a}'$. D'après 3.10, si a est dans U, admissible et si l'orbite $\Gamma \cdot a$ est tempérée alors l'orbite $\Gamma \cdot a$ est fermée dans $\mathfrak{a}^*$ pour la topologie de Zariski. D'après 2.9 et (4, 1.2) il existe une partie Γ-stable U' de $\mathfrak{a}^*$ ouverte et dense dans $\mathfrak{a}^*$, pour la topologie de Zariski, telle que toute Γ-orbite contenue dans U' soit fermée dans $\mathfrak{a}^*$ pour la topologie de Zariski.

3.12. THEOREME: *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur k (resp. $\mathbb{R}$), ψ la forme linéaire $x \mapsto \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ sur $\mathfrak{g}$. On suppose qu'il existe un élément de $S(g) - \{0\}$ qui est semi-invariant de poids $-\psi$ pour l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ (c'est le cas, par exemple, si $\mathfrak{g}$ est unimodulaire). Soit G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$. Il existe une partie G-stable U de $\mathfrak{g}^*$, ouverte et dense dans $\mathfrak{g}^*$ pour la topologie de Zariski, telle que toute G-orbite contenue dans U soit fermée dans $\mathfrak{g}^*$ pour la topologie de Zariski.*

Si $k = \mathbb{C}$, cela résulte de 3.11 et 0.8. Les parties (b) et (c) de la démonstration de (4, 3.2) prouvent alors le théorème dans le cas général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ANDLER: Sur des représentations construites par la méthode des orbites. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 209, 1980.

[2] P. BERNAT et coll.: *Représentations des groupes de Lie résolubles*. Paris, Dunod, 1972.

[3] W. BOHRO, P. GABRIEL und R. RENTSCHLER: Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie algebren. *Lecture Notes in Math. 357*, Springer-Verlag, 1973.

[4] J-Y CHARBONNEL et J. DIXMIER: *Sur les orbites de la représentation coadjointe* (à paraître).

[5] J. DIXMIER: *Algèbres enveloppantes*. Paris, Gauthier-Villars, 1974.

[6] J. DIXMIER, M. DUFLO et M. VERGNE: Sur la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie. *Compositio Math. 29* (1974) 309–323.

[7] J. DIXMIER et P. MALLIAVIN: Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables. *Bull. des Sc. Math., 102* (1978) 305–330.

[8] M. DUFLO: Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents. *Annales Sci. Ec. Normale Sup., 5* (1972) 71–120.

[9] M. DUFLO: *Construction of primitive ideals in an enveloping algebra, in Lie groups and their representations.* London, Adam Hilger Ltd., 1975.

[10] M. DUFLO: Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, *Annales Sci. Ec. Normale. Sup. 10* (1977) 265–288.

[11] M. DUFLO: *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, Cartona, Cours d'été du C.I.M.E., 1980.

[12] J.M.G. FELL: Weak containment and Kronecker product of group representations. *Pacific J. Math. 13* (1963) 503–510.

[13] J.M.G. FELL: Weak containment and induced representations of groups. II. *Trans. Amer. Math. Soc. 110* (1964) 424–447.

[14] S. HELGASON: *Differential geometry and symmetric spaces.* New York, Academic Press, 1962.

[15] V. GINSBURG: *Orbit method for complex Lie groups* (preprint).

[16] R. GODEMENT: La formule des traces de Selberg considérée comme source de problème mathématiques. *Sém. Bourbaki* 244, 1962.

[17] L. PUKANSZKY: Unitary representations of Lie groups with cocompact radical and applications. *Trans. Amer. Math. Soc. 236* (1978) 1–49.

(Oblatum 11-V-1981 & 7-X-1981)

Université Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45–55, 5me étage
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France