

COMPOSITIO MATHEMATICA

GEIR ELLINGSRUD

TOR SKJELBRED

Profondeur d'anneaux d'invariants en caractéristique p

Compositio Mathematica, tome 41, n° 2 (1980), p. 233-244

[<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__41_2_233_0>](http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__41_2_233_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROFONDEUR D'ANNEAUX D'INVARIANTS EN CARACTERISTIQUE p

Geir Ellingsrud et Tor Skjelbred

Introduction

Soit $G \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$. G opère en tant que groupe d'automorphismes de la k -variété affine V correspondant à V et on note V/G la variété quotient. Soit $V^G \subset V$ le sous-espace des vecteurs invariants par G . La variété V/G est singulière quand $\dim_k V^G \leq \dim_k V - 2$ et nous montrons qu'elle n'est pas de Cohen–Macaulay lorsque $\dim_k V^G < \dim_k V - 2$. En fait, si $x \in V/G$ est un point fermé provenant d'un élément de V^G , on a la formule

$$\text{prof } \mathcal{O}_{V/G, x} = \min(2 + \dim_k V^G, \dim_k V).$$

Dans certains cas particuliers, on sait déjà que V/G n'est pas de Cohen–Macaulay. Bertin [1] l'a démontré pour $G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ quand V est le kG -module indécomposable de dimension 4 sur k ; Fossum et Griffith, dans [2], le démontrent pour $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $\dim_k V \geq p^{n-1} + 3$, où V est également un kG -module indécomposable.

Soit $V^\vee$ le kG -module $\text{Hom}_k(V, k)$, alors $V/G = \text{Spec}(\text{Sym}_k(V^\vee)^G)$, et la profondeur de l'anneau gradué d'invariants est $\min(2 + \dim_k V^G, \dim_k V)$. On utilise ce résultat pour trouver un anneau gradué factoriel A avec un groupe d'automorphismes $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\text{prof } A^G > \text{prof } A$. En fait on a $\dim A = \dim A^G = 6$ et, pour $p \geq 3$, $\text{prof } A = 4$, $\text{prof } A^G = 6$. (En caractéristique 2 on a $\text{prof } A = 5$ et $\text{prof } A^G = 6$.) On montre également que lorsque $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et V est un kG -module de type fini tel que $\dim_k V^G < \dim_k V - 2$, l'anneau d'invariants

$\text{Sym}_k(V^\vee)^G$ satisfait à la condition S_2 de Serre, mais pas aux conditions S_r , $r > 2$.

D'une façon plus générale, soit G un groupe fini et V un kG -module de type fini. Alors on a

$$\text{prof Sym}_k(V^\vee)^G \geq 2 + \dim_k V^G$$

lorsque $\dim_k V \geq 2 + \dim_k V^G$.

Les démonstrations utilisent les suites spectrales reliant la cohomologie de G à valeurs dans $\text{Sym}_k(V^\vee)$ et la cohomologie locale à support dans l'idéal d'augmentation $\mathfrak{n}$ de $\text{Sym}_k(V^\vee)^G$. Le point essentiel est d'estimer la profondeur des modules de cohomologie de G à valeur dans $\text{Sym}_k(V^\vee)$ en degré positif. On utilise pour cela l'action par translation du groupe additif Γ de V^G sur V . Cette action munit les modules $H^i(G, \text{Sym}_k(V^\vee))$ d'une structure de $\mathcal{O}_{V/G} - \Gamma$ -modules cohérents, lorsque $i \geq 0$. Comme toutes les orbites de Γ dans V/G sont de dimension égale à $\dim_k V^G$ on montre pour tout point fermé $x \in V/G$ que $\text{prof } H^i(G, \text{Sym}_k(V^\vee))_x \geq \dim_k V^G$. En caractéristique p , si $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $i > 0$, le support du module $H^i(G, \text{Sym}_k(V^\vee))$ est une seule orbite de Γ ; c'est donc un module de Cohen-Macaulay.

Au paragraphe 2 on étudie l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur les anneaux locaux noethériens A de Cohen-Macaulay, de caractéristique $p > 0$. Soit I_F l'idéal engendré par $\{\sigma a - a \mid a \in A, \sigma \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire l'idéal du schéma des points fixes dans $\text{Spec } A$. Pour tout idéal premier associé $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_{A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}} H^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A)$, on a

$$\text{prof } A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \leq \dim(A/\mathfrak{p}A) + 2.$$

Comme $\text{Supp}_{A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}} H^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Supp}_A(A/I_F)$, on a, pour toute composante irréductible F_i de $\text{Spec}(A/I_F)$:

$$\text{prof } A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \leq \dim F_i + 2.$$

§1. Notations. Lemmes techniques

Dans tout ce qui suit, k est un corps de caractéristique $p > 0$.

Soit G un groupe cyclique d'ordre p , et σ un générateur de G . L'algèbre de groupe de G sur k , kG , est isomorphe à $k[\sigma]/(\sigma - 1)^p$. Soient ∂ et Tr les deux éléments de kG définis par $\partial = \sigma - 1$ et $\text{Tr} = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i$. Ils vérifient $\text{Tr} = \partial^{p-1}$.

Soit M un kG -module. Les groupes de cohomologie de G à valeurs dans M , $H^i(G, M)$, $i \geq 0$, peuvent être calculés à partir du complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{\text{Tr}} M \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{\text{Tr}} \cdots.$$

Soit A une k -algèbre. Supposons que G opère sur A en tant que k -algèbre. On appelle AG -module la donnée d'un A -module M et d'une action de G sur M , telle que $g(am) = g(a)g(m)$ pour tout $g \in G$, $a \in A$ et $m \in M$.

Si M est un AG -module, les groupes de cohomologie $H^i(G, M)$ sont des A^G -modules.

L'action de G sur A induit une action de G sur le k -schéma $X = \text{Spec } A$. On a $X/G = \text{Spec } A^G$.

On appellera $\pi: X \rightarrow X/G$ le morphisme canonique.

Soit I_F l'idéal de A engendré par ∂A . On désignera le sous-schéma fermé $V(I_F)$ de $\text{Spec } A$ par $F(G, \text{Spec } A)$, ou par F s'il n'y a pas d'équivoque possible. C'est le plus grand sous-schéma de $\text{Spec } A$ sur lequel G opère trivialement, autrement dit le sous-schéma des points fixes de G .

Le G -homomorphisme $\text{Tr}: A \rightarrow A^G$ est un A^G -homomorphisme, son image est donc un idéal de A^G , noté $I_{F'}$. Le sous-schéma fermé de $\text{Spec } A^G$ qu'il définit sera noté $F'(G, \text{Spec } A)$, ou simplement F' . Comme ensemble, c'est l'image de $F(G, \text{Spec } A)$ par π , d'après 1.3(i).

Nous allons démontrer quelques lemmes techniques.

LEMME 1.1: Soient M un AG -module, $a \in A$, et $m \in M$.

- (i) $\partial(am) = \sigma(a)\partial(m) + \partial(a)m = a\partial(m) + \partial(a)\sigma(m)$.
- (ii) $a \text{Tr}(m) - \text{Tr}(a)m \in \partial M$.
- (iii) Supposons que $\partial a = 0$ et qu'il existe $b \in A$ tel que $\partial b = a$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\partial^i(b^i) = i!a^i$.

DÉMONSTRATION: On vérifie facilement (i). Pour démontrer (ii), on écrit

$$\begin{aligned} a \text{Tr}(m) - \text{Tr}(a)m &= a \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i(m) - \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^{-i}(a)m \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} (\sigma^i - 1)(\sigma^{-i}(a)m) \in \partial M. \end{aligned}$$

On démontre (iii) par récurrence sur i , le cas $i = 1$ étant l'hypothèse de (iii). Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il résulte de (i) l'égalité suivante, $\mu: A \otimes_k A \rightarrow A$ étant le morphisme de multiplication.

$$\mu(\partial \otimes id_A + \sigma \otimes \partial)^i(a \otimes b) = \partial^i(ab).$$

Supposons que l'on a $\partial^i(b^i) = i!a^i$. Il vient:

$$\begin{aligned}\partial^{i+1}(b^{i+1}) &= \mu(\partial \otimes id + \sigma \otimes \partial)\partial^{i+1}(b \otimes b^i) \\ &= (i+1)a\partial^i(b^i) + \sigma^{i+1}(b)\partial^{i+1}(b^i) = (i+1)!a^{i+1}.\end{aligned}$$

REMARQUE: Pour $i > 0$, les A^G -modules $H^i(G, A)$ sont des A^G/I_F -modules. Pour i impair c'est une conséquence de (ii). Pour i pair, on a même $H^i(G, A) = A^G/\text{Im Tr} = A^G/I_F$.

LEMME 1.2: *Supposons que A soit réduit et que l'application $\text{Tr}: A \rightarrow A$ soit nulle. Alors l'opération de G sur A est triviale.*

DÉMONSTRATION: Si l'opération n'était pas triviale, il existerait un élément non nul $a \in A^G \cap \partial A$. Choisissons $b \in A$ tel que $\partial b = a$. D'après le lemme 1.1 on a

$$0 = \text{Tr } b^{p-1} = \partial^{p-1}(b^{p-1}) = (p-1)!a^{p-1} = -a^{p-1}.$$

Comme A est réduit on en déduit $a = 0$.

LEMME 1.3: *Si $\pi: \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A^G$ désigne le morphisme canonique, on a:*

- (i) $\pi^{-1}(F') = F$
 - (ii) $\text{Supp } H^1(G, A) = \text{Supp } H^2(G, A) = F'$
- où $F = F(G, \text{Spec } A)$ et $F' = F'(G, \text{Spec } A)$.

DÉMONSTRATION: On a évidemment $I_F A \subset I_F$. Il suffit donc de montrer que $\pi^{-1}(F') \subseteq F$. Soit $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}(F')$ et supposons que $\mathfrak{p}$ ne soit pas invariant par G . Les idéaux $\mathfrak{p}_i = \sigma^i \mathfrak{p}$, $i = 0, \dots, p-1$ sont alors tous distincts. Soit $\mathfrak{q} = A^G \cap \mathfrak{p}$. L'anneau $A_{\mathfrak{q}}$ est un anneau semi-local d'idéaux maximaux $\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{q}}$, $i = 0, \dots, p-1$. On a donc un G -isomorphisme $A_{\mathfrak{q}}/\cap \mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{q}} \cong \prod_{i=0}^{p-1} A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{q}}$, G opérant sur le produit en permutant les facteurs. L'élément $(1, 0, \dots, 0)$ est alors de trace non nulle, ce qui contredit l'hypothèse $\text{Tr } A \subset \mathfrak{q} \subset \cap_{i=0}^{p-1} \mathfrak{p}_i$. On en conclut que $\mathfrak{p}$ est invariant. Comme $I_F = \text{Tr } A \subset \mathfrak{p}$, l'application Tr sur $A/\mathfrak{p}$ est nulle. D'après le lemme 1.2 l'action de G sur $A/\mathfrak{p}$ est alors triviale, c'est-à-dire $I_F \subset \mathfrak{p}$.

Quant à (ii), c'est un cas particulier du lemme suivant:

LEMME 1.4: *Soit M un AG -module de type fini sur A . Supposons que M soit engendré par M^G . Alors*

$$\text{Supp } H^i(G, M) = \text{Supp } M \cap F' \quad \text{pour } i > 0.$$

DEMONSTRATION: D'après le lemme 1.1(ii), on a $\text{Supp } H^i(G, M) \subseteq \text{Supp } M \cap F'$. Soit alors $\mathfrak{p} \in \text{Supp } M \cap F'$. Pour $i \geq 0$, on a une application canonique $M^G \rightarrow H^i(G, M)$ pouvant s'insérer dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} M_{\mathfrak{p}}^G \otimes_k A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\alpha} & M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\beta} & H^i(G, M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}) \\ & \nwarrow & & \uparrow & \\ & & M_{\mathfrak{p}}^G & \longrightarrow & H^i(G, M)_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Comme M^G engendre M , l'application α est surjective. G opérant trivialement sur $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, il opère trivialement sur $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$, d'où l'isomorphisme β . $H^i(G, M)_{\mathfrak{p}} = 0$ entraînerait $M_{\mathfrak{p}}^G \subset \mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$, ce qui est impossible (lemme de Nakayama).

§2. Le foncteur $H_n^*(G, \cdot)$

Soit A un anneau commutatif unitaire où agit un groupe fini G par automorphismes de A . Soit $\mathfrak{m}$ un idéal G -invariant, et soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap A^G$ sa trace dans A^G . Supposons que A^G soit noethérien, et que A soit un A^G -module de type fini. Notre but est de calculer la $\mathfrak{n}$ -profondeur de A^G , c'est-à-dire le plus petit entier i tel que $H_n^i(A^G) \neq 0$. Ces modules apparaissent comme éléments d'une suite spectrale (E_r) dont l'aboutissement est $H_n^*(G, A)$ que nous allons définir ci-dessous. La seconde suite spectrale de $H_n^*(G, A)$ fait intervenir le module $H_n^*(A)$ et donc l'entier $\text{prof}_{\mathfrak{m}} A = \text{prof}_{\mathfrak{n}} A$. Cela nous permet sous certaines hypothèses, d'évaluer $\text{prof}_{\mathfrak{n}} A^G$ quand on connaît $\text{prof}_{\mathfrak{n}} A$. Dans la catégorie des $A^G G$ -modules, soient $H_n^i(G, M)$ les foncteurs dérivés du foncteur $H_n^0(M^G) = (H_n^0(M))^G$. $H_n^*(G, M)$ est alors un module gradué sur l'anneau $H^*(G, A^G)$. De [3, th. 2.4.1] on déduit l'existence de deux suites spectrales d'aboutissement $H_n^*(G, M)$. (E_r) désigne la première suite spectrale, où $E_2^{ij} = H_n^i(H^j(G, M))$, et $(\mathcal{E}_r)$ la seconde suite spectrale où, $\mathcal{E}_2^{ij} = H^i(G, H_n^j(M))$. Pour $r \geq 2$ ces suites spectrales sont des $H^*(G, A^G)$ -modules.

LEMME 2.1: Soient G un groupe fini et M un $A^G G$ -module. Posons $f = \text{prof}_{\mathfrak{n}} H^1(G, M)$ et supposons que $\text{prof}_{\mathfrak{n}} H^{1+i}(G, M) \geq f - i$ pour $i \geq 1$. Si $\text{prof}_{\mathfrak{n}}(M) \geq f + 2$, alors $\text{prof}_{\mathfrak{n}} M^G = f + 2$ et si $\text{prof}_{\mathfrak{n}} M = f + 1$, alors $\text{prof}_{\mathfrak{n}} M^G \geq f + 1$. Si e est un entier tel que $\text{prof}_{\mathfrak{n}} H^{1+i}(G, M) \geq e - i$ pour $i \geq 0$ et $\text{prof}_{\mathfrak{n}} M \geq e + 2$, alors $\text{prof}_{\mathfrak{n}} M^G \geq e + 2$.

DÉMONSTRATION: Comme $E_2^{ij} = H_n^i(H^j(G, M))$ on a $(d_r(E_r))^{ij} = 0$ pour $r \geq 2$ et $i + j \leq f + 1$. À l'aide de la suite spectrale $(\mathcal{E}_r)$ où $\mathcal{E}_2^{ij} = H^i(G, H_n^j(M))$, on montre que $H_n^i(G, M) = 0$ pour $i \leq f + 1$ quand $\text{prof}_n M \geq f + 2$. Cela entraîne que la différentielle de E_2 , $d_2: H_n^f(H^1(G, M)) \rightarrow H_n^{f+2}(M^G)$ est injective et que $H_n^i(M^G) = 0$ pour $i \leq f + 1$, d'où $\text{prof}_n(M^G) = f + 2$. Les autres assertions du lemme se montrent de façon analogue.

Dans ce qui suit on suppose que A est un anneau semi-local de radical $\mathfrak{m}$ et contient le corps $\mathbb{F}_p$ d'ordre p , et que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On supposera en outre que l'idéal $I_F = ((1 - \sigma)A)A$ est contenu dans $\mathfrak{m}$ et que l'anneau A^G est noethérien de dimension de Krull finie; A^G est alors un anneau semi-local de radical $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap A^G$.

LEMME 2.2: *Soit M un AG -module de type fini engendré par M^G . Si $M \neq 0$, alors $H^j(G, M) \neq 0$ pour tout $j \geq 0$.*

DÉMONSTRATION: Pour $j > 0$ on sait par (1.4) que $\text{Supp } H^j(G, M) = F' \cap \text{Supp}(M) \supset \text{Supp}(M/\mathfrak{m}M)$. Comme $M/\mathfrak{m}M \neq 0$, on a bien $H^j(G, M) \neq 0$.

COROLLAIRE 2.3: *Soit M un AG -module de type fini engendré par M^G . Si F est isolé et $\text{prof}_n M \geq 2$, alors $\text{prof}_n(M^G) = 2$.*

DÉMONSTRATION: On dit que F est isolé si $\mathfrak{m}$ est le radical de I_F . Il suffit de montrer que les conditions du lemme (2.1) sont remplies avec $f = 0$. D'après (1.4) le support de $H^j(G, M)$ est contenu dans F' pour $j > 0$. Comme $H^j(G, M) \neq 0$ pour $j > 0$, on en déduit $\text{prof}_n H^j(G, M) = 0 = f$.

COROLLAIRE 2.4: *Supposons que A vérifie la condition S_2 de Serre alors*

- (i) A^G vérifie la condition S_2
- (ii) si $\text{codim } F > 2$, A^G ne vérifie pas la condition S_r pour $r > 2$.

DÉMONSTRATION: On vérifie facilement (i) à l'aide des suites spectrales (E_r) et $(\mathcal{E}_r)$. Pour (ii) soit $\mathfrak{q} \in \text{Spec } A^G$ un point générique de F' et soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ tel que $\mathfrak{p} \cap A^G = \mathfrak{q}$. On a bien $(A_{\mathfrak{p}})^G = (A^G)_{\mathfrak{q}}$ et $\dim(A^G)_{\mathfrak{q}} = \dim A_{\mathfrak{p}} \geq 3$, donc $\text{prof } A_{\mathfrak{p}} \geq 2$. Le corollaire (2.3) implique alors que $\text{prof}(A^G)_{\mathfrak{q}} = 2$, et A^G ne vérifie pas S_r pour $r > 2$.

THÉORÈME 2.5: *Soit G un groupe fini, et M un $A^G G$ -module de type*

fini. Si $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_{A^G} H^1(G, M)$ est tel que $\text{prof } M \geq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$, on a

$$\text{prof } M^G \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2.$$

DÉMONSTRATION: Pour tout A^G -module N de type fini et tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A^G$, on a

$$\text{prof } N \leq \text{prof } N_{\mathfrak{p}} + \dim(A^G/\mathfrak{p}).$$

Si $\text{prof } M \geq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$, on a donc $\text{prof } M_{\mathfrak{p}} \geq 2$. Comme $\text{prof } H^1(G, M_{\mathfrak{p}}) = 0$, les conditions de (2.1) sont remplies avec $f = 0$. Il en résulte que $\text{prof } M_{\mathfrak{p}}^G = 2$, et donc que $\text{prof } M^G \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$.

COROLLAIRE 2.6: Soit $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et soit M un AG -module de type fini, engendré par M^G . Si M est de Cohen–Macaulay, on a:

$$\text{prof } M^G \leq \dim(F' \cap \text{Supp } M) + 2.$$

Si $\mathfrak{p} \subset A^G$ est un idéal premier associé de $H^1(G, M)$, on a $\text{prof } M^G \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$.

DÉMONSTRATION: Comme $\text{Supp } H^1(G, M) = F' \cap \text{Supp } M$, on a $\dim(A^G/\mathfrak{p}) \leq \dim(F' \cap \text{Supp } M)$. Si $\text{prof } M \geq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$, ce résultat est une conséquence de (2.5). Si $\text{prof } M \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$, on a également $\text{prof } M^G \leq \dim M^G = \dim M = \text{prof } M \leq \dim(A^G/\mathfrak{p}) + 2$.

§3. Le cas linéaire

Nous allons ici calculer le profondeur en tout idéal maximal de l'anneau des invariants d'un groupe cyclique d'ordre p^n opérant linéairement sur un anneau de polynômes sur k .

Soit $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Supposons que G opère linéairement sur l'espace vectoriel V de dimension finie sur le corps algébriquement clos k . Alors G opère sur $\text{Sym}_k(V^\vee)$ l'algèbre symétrique de l'espace dual $V^\vee$ de V , et donc sur $\mathbf{V} = \text{Spec}(\text{Sym}_k(V^\vee))$.

Le sous-schéma des points de $\mathbf{V}$ stabilisés par un sous-groupe $p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est noté F_i . C'est un sous-espace linéaire de $\mathbf{V}$. On désigne par F'_i son image ensembliste dans $\mathbf{V}/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

Les F'_i forment une suite croissante de sous-ensembles fermés de $\mathbf{V}/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Nous allons démontrer:

THÉOREME 3.1: Si $x \in F'_i - F'_{i-1}$ est un point fermé, on a

$$\text{prof } \mathcal{O}_{V/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),x} = \min(\dim F_i + 2, \dim V).$$

Soit V_α le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module indécomposable de dimension $\alpha \leq p^n$.

COROLLAIRE 3.2: Supposons que $V = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_\ell}$ en tant que $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module, où $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\ell$. Alors:

$$\text{prof Sym}_k(V)^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = \begin{cases} \ell + \alpha_1 - 1 & \text{lorsque } \alpha_1 \leq 2 \text{ et } \alpha_2 = \cdots = \alpha_\ell = 1 \\ \ell + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la profondeur est calculée en l'idéal engendré par V .

Si V est indécomposable, le corollaire ci-dessous répond à une question posée par Fossum et Griffith dans [2].

COROLLAIRE 3.3: Soit V un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module indécomposable. Supposons que $\dim V \geq 3$. Alors,

$$\text{prof Sym}_k(V)^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = 3$$

où la profondeur est calculée en l'idéal engendré par V .

COROLLAIRE 3.4: $\text{Sym}_k(V)^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ est de Cohen–Macaulay si et seulement si

$$V = \left(\bigoplus_{i=1}^{\lambda} V_2 \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{l-\lambda} V_1 \right) \quad \lambda = 0, 1 \text{ ou } 2.$$

ou

$$V = V_3 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{l-1} V_1 \right) \quad \text{si } p \geq 3.$$

On démontre le théorème 3.1 par récurrence sur n . Considérons plus généralement un schéma affine $X = \text{Spec } A$ de type fini sur k , sur lequel opère $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Nous utilisons le lemme suivant.

LEMME 3.5: Soit Γ un groupe opérant sur X de façon que

- (i) l'action de Γ commute avec celle de G ,
- (ii) Γ opère transitivement sur les points fermés de $F(G, X)$.

Alors les A^G -modules $H^i(G, A)$ sont de Cohen–Macaulay pour $i > 0$.

DÉMONSTRATION DE 3.5: L'action de Γ commutant avec celle de

G , il est clair que Γ opère sur le schéma $F' = F'(G, X) = \text{Spec}(A^G/I_F)$ et que les $H^i(G, A)$ sont des $(A^G/I_F)\Gamma$ -modules pour $i > 0$. Le morphisme $\pi|_F : F \rightarrow F'$ étant une bijection, Γ opère transitivement sur les points fermés de F' .

On achève la démonstration à l'aide du lemme ci-dessous, qui est un corollaire immédiat du lemme (3.10).

LEMME 3.6: *Soit Y un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos. Supposons qu'un groupe Γ opère sur Y , transitivement sur les points fermés. Alors tout $\mathcal{O}_Y - \Gamma$ -module cohérent est de Cohen–Macaulay.*

Soient, pour une action de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sur X , les deux conditions suivantes:

- I. Pour tout sous-groupe $p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, il existe un groupe Γ_i opérant sur X , tel que l'action de Γ_i commute avec celle de $p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et est transitive sur les points fermés de $F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X)$ pour $i \leq n-1$.
- II. Pour tout point fermé $x \in X$, on a:

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} \geq \dim F(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X) + 2.$$

LEMME 3.7: *Supposons que l'action de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sur X satisfait aux conditions I et II ci-dessus. Alors l'action induite de $\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ sur $X' = X/(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ satisfait également I et II. De plus, on a*

- (i) *Si $x \in F'(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X)$ est un point fermé,*

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X',x} = \dim F(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X) + 2.$$

- (ii) *Si $x \notin F'(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X)$ est un point fermé,*

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X',x} = \text{prof } \mathcal{O}_{X,y}$$

pour toute préimage y de x dans X .

DÉMONSTRATION DE 3.7: Remarquons d'abord que le morphisme canonique $\pi : X \rightarrow X'$ induit une bijection entre $F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X)$ et $F(p^i\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}, X')$ pour $i \leq n-2$. (En effet tout groupe d'isotropie non trivial contient $p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$). Pour $i \leq n-1$ l'action de Γ_i passe au quotient X' et, vu la remarque ci-dessus, elle est transitive sur $F(p^i\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}, X')$ pour $i \leq n-2$. La condition I est donc vérifiée. Soit $x \in X'$ un point fermé et $y \in X$ une préimage de x . Si y n'est pas un point fixe sous l'action de $p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, on sait que

$$\begin{aligned}\text{prof } \mathcal{O}_{X',x} &= \text{prof } \mathcal{O}_{X,y} \geq \dim F(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) + 2 \\ &\geq \dim F(p^{n-2}\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, X') + 2.\end{aligned}$$

Si y est un point fixe, on obtient à l'aide de la condition I pour X et des lemmes (3.5) et (2.1):

$$\begin{aligned}\text{prof } \mathcal{O}_{X',x} &= \dim F(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) + 2 \\ &\geq \dim F(p^{n-2}\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, X') + 2\end{aligned}$$

et la condition II est vérifiée pour X' .

PROPOSITION 3.8: *Supposons que $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ opère sur X de façon que les conditions I et II soient satisfaites. Alors,*

- (i) *Si $x \in F'(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) - F'(p^{i-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X)$ est un point fermé, on a pour $i \leq n-1$,*

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X/(Z/p^nZ),x} = \dim F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) + 2.$$

- (ii) *Si $x \in X/(Z/p^nZ) - F'(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X)$ est un point fermé, on a*

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X/(Z/p^nZ),x} = \text{prof } \mathcal{O}_{X,y}$$

pour toute préimage y de x dans X .

DÉMONSTRATION: On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 1$, la proposition découle du lemme (3.7). Si $n > 1$, les conditions I et II sont, en vertu du lemme (3.7), vérifiées pour $X/(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Comme $X/(Z/p^n\mathbf{Z})$ est le quotient de $X/(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ par $\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}$ et $\dim F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, X) = \dim F(p^i\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z}, X/(p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ pour $i < n-1$, la récurrence est immédiate.

Enfin, démontrons le théorème (3.1). Supposons d'abord que $\text{codim } F_0 \leq 2$. D'après les lemmes (2.1) et (3.5) on sait que $V/(Z/p^n\mathbf{Z})$ est de Cohen–Macaulay. Si $\text{codim } F_0 \geq 3$, soit m le plus petit entier tel que $\text{codim } F_m \leq 2$. Alors $V/(p^m\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ est de Cohen–Macaulay et satisfait à la condition II de (3.7). Vérifions la condition I de (3.7) pour l'action de $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ sur $V/(p^m\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Soit Γ_i le groupe additif $F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, V)$, opérant sur V par translation. On voit aisément que cette action commute avec celle de $p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ et qu'elle est transitive sur $F(p^i\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, V)$. Donc elle induit, pour $i \leq m-1$, une action sur $V/(p^m\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ qui satisfait à la condition I. Le théorème se déduit alors de la proposition (3.8).

D'une façon générale, soit G un groupe fini qui opère linéairement sur V . Soit n l'idéal d'augmentation de $\text{Sym}_k(V^\vee)$.

THÉORÈME 3.9: *Supposons que $\dim_k V \geq 2 + \dim_k V^G$, alors*

$$\text{prof}_n \text{Sym}_k(V^\vee)^G \geq \dim_k V^G + 2.$$

DÉMONSTRATION: En vertu du lemme (2.1) il suffit de montrer que $\text{prof}_n H^i(G, \text{Sym}_k(V^\vee)) \geq \dim V^G$ pour $i > 0$. Le groupe additif Γ de V^G opère par translation sur $\text{Sym}_k(V^\vee)$. Cette opération est compatible avec celle de G . Pour tout i , $H^i(G, \text{Sym}_k(V^\vee))$ est donc un $(\text{Sym}_k(V^\vee)^G)\Gamma$ -module. On achève la démonstration à l'aide du

LEMME 3.10: *Soit Γ un groupe opérant sur un schéma X , de type fini sur un corps algébriquement clos. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X\Gamma$ -module cohérent. Si $x \in X$ est un point fermé, on a*

$$\text{prof}_x \mathcal{F} \geq \dim \overline{\Gamma(x)}$$

où $\overline{\Gamma(x)}$ désigne l'adhérence de l'orbite de x .

DÉMONSTRATION: Soit pour tout entier $i \geq 0$, $Z'_i = \{y \in X \mid y \text{ fermé, } \text{prof } \mathcal{F}_y \leq i\}$ et soit $Z_i = \overline{Z'_i}$, l'adhérence de Z'_i dans X . Si $x \in Z'_i$ on a bien $\overline{\Gamma(x)} \subseteq Z_i$. Il suffit donc de montrer que $\dim Z_i \leq i$. Pour cela, on peut supposer que X est affine, $X = \text{Spec } A$, et même que A est un anneau régulier. Soit $d = \dim A$, alors

$$Z_i = \bigcup_{j \geq d-i} \text{Supp Ext}_A^j(\mathcal{F}, A).$$

En localisant aux points génériques on voit que $\dim \text{Supp Ext}_A^j(\mathcal{F}, A) \leq d - j \leq i$.

Nous allons maintenant donner un exemple d'un anneau intègre, factoriel A , non de Cohen-Macaulay, avec une opération de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ telle que $A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ soit de Cohen-Macaulay.

Soit $p \geq 3$ et $V = V_3 \oplus V_3$ avec l'action de $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donnée par $(g, h)(v, w) = (gv, hw)$. Soient H le groupe diagonal de G , et $A = \text{Sym}_k(V^\vee)^H$. Par le théorème (3.1) A n'est pas de Cohen-Macaulay. En effet $\text{prof}_n A = 4$, où $n = \mathfrak{m} \cap A$ ($\mathfrak{m}$ l'idéal d'augmentation de $\text{Sym}_k(V^\vee)$), et $\dim A_n = 6$. Le groupe $G/H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ opère de façon

naturelle sur A , et $A^{G/H} = \text{Sym}_k(V^\vee)^G$. En remarquant alors que $\text{Sym}_k(V^\vee)^G = \text{Sym}_k(V_3^\vee)^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \otimes_k \text{Sym}_k(V_3^\vee)^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$, on trouve grâce à (3.1), que $A^{G/H}$ est de Cohen–Macaulay. Pour $p = 2$ on trouve également un exemple en utilisant l'opération de G sur $V = V_2 \oplus V_2 \oplus V_2$ donnée par $(g, h)(u, v, w) = (gu, gv, hw)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.-J. BERTIN: Anneaux d'invariants d'anneaux de polynômes en caractéristique p . *C.R. Acad. Scient. Paris t. 264* (1967) 653–656.
- [2] R. FOSSUM et P.A. GRIFFITH: Complete local factorial rings which are not Cohen–Macaulay in characteristic p . *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., Paris* (4) 8 (1975) 189–200.
- [3] A. GROTHENDIECK: Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. IX* (1957) 119–221.

(Oblatum 20–XII–1978 & 10–I–1980)

Matematisk institutt
Blindern, Oslo 3
Norvège