COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN COUGNARD

Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré pq des rationnels

Compositio Mathematica, tome 40, nº 3 (1980), p. 407-415

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__40_3_407_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 40, Fasc. 3, 1980, pag. 407–415

UNE PROPRIÉTÉ DE L'ANNEAU DES ENTIERS DES EXTENSIONS GALOISIENNES NON ABÉLIENNES DE DEGRÉ pq DES RATIONNELS

Jean Cougnard

Introduction

Soient $N/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne de groupe de Galois G, O_N la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans N et $\mathcal{M}$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$. Construisons le $\mathcal{M}$-module $\mathcal{M}O_N$; si $N/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée, A. Fröhlich a démontré que $\mathcal{M}O_N$ est $\mathcal{M}$-stablement libre [6], ce qui revient à dire que sa classe dans le groupe des classes projectives de $\mathcal{M}$ est l'élément neutre. Ce résultat est encore valable, sans hypothèse sur la ramification, si on suppose que G est un p-groupe [3], [7]. Le théorème de Fröhlich ne peut pas se généraliser sous cette forme puisque l'on sait construire des corps N tels que $\mathcal{M}O_N$ ne soit pas $\mathcal{M}$-stablement libre [4].

Dans le cas modéré on remarque que $\mathcal{M}O_N$ est isomorphe à $\mathcal{M}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$; on se propose d'étudier ce $\mathcal{M}$-module pour certaines extensions sauvagement ramifiées. Il n'a plus alors de raison d'être localement libre, il suffit pour s'en convaincre de considérer une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Il convient donc d'étudier l'image de ce produit tensoriel dans le groupe de Grothendieck $G_0(\mathcal{M})$ des $\mathcal{M}$-modules de type fini; c'est ce que nous nous proposons de faire dans le cas des extensions qui ont servi au contre-exemple de [4].

Nous démontrons que $\mathcal{M}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$ est isomorphe à la somme directe $\mathcal{M}O_N \oplus T$ où T est un groupe fini. Dans le cas où G est non abélien d'ordre pq (p et q premiers) on montre que la classe de $\mathcal{M}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$ dans $G_0(\mathcal{M})$ est celle de $\mathcal{M}$. Nous montrons que cette propriété est encore vérifiée lorsque G est un p-groupe. Le résultat

0010–437X/80/0407–08$00.20/0

est encore valable lorsque G est abélien [1] ceci est alors une conséquence des travaux de Leopoldt [8].

Les calculs qui figuraient dans une première version de ce travail [5] sont supprimés dans cette rédaction, par contre on utilise les résultats de [1] et de [11] qui sont postérieurs à [5] mais n'en dépendent pas.

Je tiens à remercier Monsieur S.M.J. Wilson dont les obligeantes remarques ont permis ces simplifications.

1. Produits tensoriels et localisation

Soit G un groupe fini. L'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ est semi-simple; on choisit la famille $\{e_i\}$ des idempotents irréductibles du centre, orthogonaux deux à deux, et $\mathcal{M}$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$, alors $\mathcal{M}_i = e_i\mathcal{M}$ est un ordre maximal de l'algèbre simple $A_i = e_i\mathbb{Q}[G]$. Si $\mathcal{M}$ contient $\mathbb{Z}[G]$, les $\mathcal{M}_i$ ont une structure de $\mathbb{Z}[G]$-modules à droite et la somme directe $\mathcal{M} = \bigoplus_i \mathcal{M}_i$ est une somme directe de $\mathbb{Z}[G]$-modules d'où:

$$\mathcal{M} \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N \simeq \bigoplus_i \mathcal{M}_i \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N.$$

Comme $G_0(\mathcal{M})$ est isomorphe à la somme directe des $G_0(\mathcal{M}_i)$ on est ramené à une étude pour chaque facteur simple.

L'ordre $\mathcal{M}_i$ étant maximal, tout $\mathcal{M}_i$-module de type fini, $\mathbb{Z}$-libre est $\mathcal{M}_i$-projectif; on en déduit que les groupes $K_0(\mathcal{M}_i)$ et $G_0^{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_i)$ introduits dans [9] pages 1 et 2 sont les mêmes. Il s'ensuit d'après le théorème I.2 de [9] que l'homomorphisme de Cartan de $K_0(\mathcal{M}_i)$ dans $G_0(\mathcal{M}_i)$ est un isomorphisme. Pour tout ordre maximal $\mathcal{M}$ on note $\mathrm{Cl}(\mathcal{M})$ son groupe des classes projectives et pour tout $\mathcal{M}$-module M, $[M]$ (resp. $\mathrm{cl}(M)$) désigne son image dans $G_0(\mathcal{M})$ (resp. $\mathrm{Cl}(\mathcal{M})$). On sait que $K_0(\mathcal{M}_i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(\mathcal{M}_i)$ [9], [10], on en déduit que

$$G_0(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{Z}^s \oplus \mathrm{Cl}(\mathcal{M})$$

où s désigne le nombre de facteurs simples de $\mathbb{Q}[G]$ et $\mathrm{Cl}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i=1}^s \mathrm{Cl}(\mathcal{M}_i)$. On a alors $[\mathcal{M}] = (1, 1, \ldots, 1, 0)$ et si M est un $\mathcal{M}$-module fini $[M] = (0, \ldots, 0, X)$ avec $X \in \mathrm{Cl}(\mathcal{M})$.

Proposition 1: *Le $\mathcal{M}_i$-module $\mathcal{M}_i \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$ est isomorphe à $\mathcal{M}_i O_N \oplus T_i$ où T_i est fini.*

Démonstration: L'application de $\mathcal{M}_i \times O_N$ dans $\mathcal{M}_i O_N$ définie par la multiplication se factorise par $\mathcal{M}_i \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$ en une application surjective f. Les propriétés des ordres maximaux et la comparaison des rangs des deux $\mathcal{M}_i$-modules donnent le résultat.

Il existe un idéal à gauche I_i de $\mathcal{M}_i$ et un entier n tels que l'on ait une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{M}_i^{n-2} \oplus I_i \to \mathcal{M}_i^n \to \mathcal{M}_i \underset{Z[G]}{\otimes} O_N \to 0.$$

La classe du produit tensoriel dans $G_0(\mathcal{M}_i)$ est $(1, -\mathrm{cl}(I_i))$ or $\mathrm{cl}(I_i)$ est déterminée par la norme réduite de I_i; ceci conduit à localiser et compléter. On voit aisément que l'on a pour tout nombre premier p

$$Z_p \underset{Z}{\otimes} \left(\mathcal{M}_i \underset{Z[G]}{\otimes} O_N\right) \simeq \left(Z_p \underset{Z}{\otimes} \mathcal{M}_i\right) \underset{Z_p[G]}{\otimes} \left(Z_p \underset{Z}{\otimes} O_N\right)$$

où Z_p désigne l'anneau des entiers p-adiques.

PROPOSITION 2: *Les facteurs premiers de l'ordre de T_i sont des places sauvagement ramifiées dans $N/\mathbf{Q}$.*

DÉMONSTRATION: Si p est modérément ramifié dans $N/\mathbf{Q}$, $Z_p \otimes_Z O_N$ est $Z_p[G]$-libre. D'après la remarque précédente on a un isomorphisme:

$$\left(Z_p \underset{Z}{\otimes} \mathcal{M}_i O_N\right) \oplus \left(Z_p \underset{Z}{\otimes} T_i\right) \simeq \left(Z_p \underset{Z}{\otimes} \mathcal{M}_i\right) \underset{Z_p[G]}{\otimes} (Z_p[G])$$

donc p ne divise pas l'ordre de T_i.

COROLLAIRE 1: *Si G est un p-groupe on a $[\mathcal{M} \otimes_{Z[G]} O_N] = [\mathcal{M}]$ dans $G_0(\mathcal{M})$.*

DÉMONSTRATION: On a $[\mathcal{M}_i \otimes_{Z[G]} O_N] = [\mathcal{M}_i O_N] + [T_i]$ or d'après [3] on sait que $[\mathcal{M}_i O_N]$ est $\mathcal{M}_i$-stablement libre. Comme T_i est un p-groupe, il existe des idéaux à gauches I_{i_j} de $\mathcal{M}_i$ tels que l'on ait un isomorphisme

$$T_i \simeq \frac{\mathcal{M}_i^u}{\bigoplus_{j=1}^{u} I_{i_j}}.$$

La norme réduite de I_{i_j} ne fait apparaître que l'idéal premier au-dessus de p dans le centre de $\mathcal{M}_i$; cet idéal étant principal (engendrable par un élément totalement positif le cas échéant) on a $\mathrm{cl}(I_{i_j}) = 0$ dans $\mathrm{Cl}(\mathcal{M}_i)$ ce qui démontre le résultat.

Considérons maintenant les groupes G non-abéliens d'ordre pq (p et q premiers). L'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ comporte trois facteurs simples [4] et on doit étudier $[\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$, $[\mathcal{M}_2 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$, $[\mathcal{M}_3 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$ avec $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_2 \simeq \mathbb{Z}[\omega]$ (ω une racine primitive q-ième de l'unité) et $\mathcal{M}_3$ un ordre maximal de $M_q(K)$ où K est le sous-corps du p-ième corps cyclotomique tel que $[K:\mathbb{Q}] = (p-1)/q$. Il est clair que $[\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N] = [\mathcal{M}_1]$. Pour $[\mathcal{M}_3 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$ on démontre:

COROLLAIRE 2: *Si $\mathcal{M}_3$ est un ordre maximal de $M_q(K)$ contenant $e_3\mathbb{Z}[G]$ on a $[\mathcal{M}_3 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N] = [\mathcal{M}_3]$ dans $G_0(\mathcal{M}_3)$.*

DÉMONSTRATION: Remarquons (cf [2], p. 20–22) que si ℓ est premier différent de p, e_3 appartient à $\mathbb{Z}_l[G]$ et que le conducteur de $\mathcal{M}_3$ dans $\Lambda = e_3\mathbb{Z}[G]$ est une puissance de l'idéal premier principal de K au-dessus de p, on a alors $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}_3 = \Lambda_\ell$ (c'est-à-dire $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$) d'où:

$$\mathbb{Z}_\ell \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \left(\mathcal{M}_3 \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N\right) \simeq e_3\mathbb{Z}_\ell[G] \underset{\mathbb{Z}_\ell[G]}{\otimes} \left(\mathbb{Z}_\ell \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} O_N\right) \simeq \mathbb{Z}_\ell \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathcal{M}_3 O_N.$$

Ceci montre que T_3 est un p-groupe auquel on peut appliquer le raisonnement du corollaire 1; comme on peut déduire des calculs de [2] (ch VIII et IX) que $\mathcal{M}_3 O_N$ est $\mathcal{M}_3$-stablement libre, le corollaire est démontré.

Enonçons le résultat principal:

THÉOREME 1: *Soit $N/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne de groupe de Galois G, non abélien d'ordre pq, O_N la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans N et $\mathcal{M}$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$ alors on a l'égalité $[\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N] = [\mathcal{M}]$ dans $G_0(\mathcal{M})$.*

D'après le corollaire 2 et la remarque qui le précède, il ne reste à étudier que $[\mathcal{M}_2 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$ dans $G_0(\mathcal{M}_2)$.

2. Calcul de $[\mathcal{M}_2 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N]$

Précisons les notations, utilisées. Le groupe G est engendré par deux éléments σ et τ vérifiant les relations $\sigma^p = \tau^q = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^r$, $r^q \equiv 1(p)$ et $r \not\equiv 1(p)$ ce qui impose $p \equiv 1(q)$. On note H le sous-groupe de G engendré par σ. Si N est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ avec groupe de Galois G, on note k le sous-corps de N formé des éléments invariants par H. Soit T le sous-groupe de G engendré par τ, la restriction de l'action de τ à k définit un isomorphisme de T avec $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$. On désigne par O_k la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans k et par O_{N_p} (resp. O_{k_p}) le produit tensoriel $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} O_N$ (resp. $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} O_k$).

L'ordre maximal $\mathcal{M}_2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[T]/\Sigma_{i=0}^{q-1} \tau^i$ c'est-à-dire $\mathbb{Z}[G]/(1-\sigma, \Sigma_{i=0}^{q-1} \tau^i)$.

On veut démontrer que l'on a:

(1) $$\Big[\mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N\Big] = [\mathcal{M}_2] \text{ dans } G_0(\mathcal{M}_0)$$

or nous avons la suite exact de $\mathbb{Z}[T]$-modules:

(2) $$0 \longrightarrow \hat{H}_0(H, O_N) \longrightarrow H_0(H, O_N) \xrightarrow{T_{N/k}} H^0(H, O_N) \longrightarrow \hat{H}^0(H, O_N) \longrightarrow 0$$

où $T_{N/k}$ désigne la trace dans l'extension N/k et $H_0(H, O_N) = O_N/(1-\sigma)O_N$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[T] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_N$. La structure de T-module est obtenue par le passage au quotient.

Puisque T est d'ordre q, on a

(3) $$\mathbb{Z}_p \underset{\mathbb{Z}}{\bar{\otimes}} (\mathcal{M}_2 \oplus T) \simeq \mathbb{Z}_p[T]$$

comme par ailleurs $\hat{H}_0(H, O_N)$ et $\hat{H}^0(H, O_N)$ sont des p-groupes on obtient la suite exacte de $\mathcal{M}_2$-modules:

(4) $$0 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} \hat{H}_0(H, O_N) \longrightarrow \mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} O_N \longrightarrow \mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} O_k \longrightarrow \mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} \hat{H}^0(H, O_N) \longrightarrow 0$$

mais les résultats du cas abélien [1] montrent que $[\mathcal{M}_2 \otimes_{\mathbb{Z}[T]} O_k] = [\mathcal{M}_2]$. Donc pour avoir l'égalité (1) il faut et il suffit que l'on ait dans $G_0(\mathcal{M}_2)$:

(5) $$\Big[\mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} \hat{H}^0(H, O_N)\Big] = \Big[\mathcal{M}_2 \underset{\mathbb{Z}[T]}{\otimes} \hat{H}_0(H, O_N)\Big].$$

On note $G_0^t(\mathbb{Z}_p[T])$ le groupe de Grothendieck des $\mathbb{Z}_p[T]$-modules finis. La relation (3) et le lemme 1 de [11] montrent que la relation (5) est une conséquence du:

THÉORÈME 2: *Les* $\mathbb{Z}_p[T]$*-modules* $\hat{H}^0(H, O_N)$ *et* $\hat{H}_0(H, O_N)$ *ont même image dans* $G_0^t(\mathbb{Z}_p[T])$.

En fait nous démontrons un résultat plus précis: Le groupe T opère sur k ce qui permet de définir l'algèbre simple $A = k * T$ de centre $\mathbb{Q}$ dont les éléments sont les sommes $\Sigma_{i=0}^{q-1} a_i\tau^i$ $(a_i \in k)$, le produit étant défini par $a_i\tau^i \cdot b_j\tau^j = a_i\tau^i(b_j)\tau^{i+j}$. On considère dans A l'ordre $\Lambda = O_k * T$. Si on complète en p on obtient un $\mathbb{Z}_p$-ordre Λ_p de la $\mathbb{Q}_p$-algèbre centrale simple A_p. Le théorème 40. 13 de [10] montre que Λ_p est un ordre héréditaire. Tout Λ_p-module fini est par restriction un $\mathbb{Z}_p[T]$-module fini, on en déduit un homomorphisme de $G_0^t(\Lambda_p)$ (le groupe de Grothendieck de la catégorie des Λ_p-modules finis) dans $G_0^t(\mathbb{Z}_p[T])$. Le théorème 2 résulte alors du:

THÉORÈME 3: *Les modules* $\hat{H}_0(H, O_N)$ *et* $\hat{H}^0(H, O_N)$ *ont même image dans* $G_0^t(\Lambda_p)$.

Le résultat est trivial si N/k est modérément ramifiée. Nous supposerons donc désormais que p est ramifié dans N/k.

Le théorème 3 est la conséquence de plusieurs lemmes dont la démonstration nécessite le rappel de quelques définitions. Le groupe de Whitehead de A_p est noté $K_1(A_p)$ et $K_1(A_p)_{\mathbb{Z}_p}$ désigne le sous-groupe des éléments de $K_1(A_p)$ dont la norme réduite est dans $\mathbb{Z}_p$ ([11] lemme 3). Pour tout anneau S on note S^* le groupe multiplicatif des éléments inversibles de S. L'application qui à tout Λ_p-module fini associe son ordre définit une application de $G_0^t(\Lambda_p)$ dans $\mathbb{Q}^*$ notée ord.

LEMME 1: *L'application* $G_0^t(\Lambda_p)$ *dans* $G_0(\Lambda) \oplus \mathbb{Q}^*$ *qui à* $[M]$ *associe* $([M], ord\ (M))$ *est injective.*

DÉMONSTRATION: D'après [11], théorème 2, puisque l'ordre Λ_p est héréditaire on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow K_1(A)_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow K_1(A) \xrightarrow{\delta} G_0^t(\Lambda_p) \xrightarrow{i} G_0(\Lambda)$$

qui devient ici:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p^* \longrightarrow \mathbb{Q}_p^* \xrightarrow{\delta} G_0^t(\Lambda_p) \xrightarrow{i} G_0(\Lambda_p)$$

où i est l'application naturelle de $G_0^t(\Lambda_p)$ dans $G_0(\Lambda_p)$ et δ est l'homomorphisme de groupe tel que si $\lambda \in \mathbb{Q}_p^*$ est norme réduite d'un élément ν et si $r \in \mathbb{Z}_p$ vérifie $r\nu \in \Lambda_p$ alors $\delta(\lambda) = [\Lambda_p/r\Lambda_p] - [\Lambda_p/r\nu\Lambda_p]$.

Il est évident que le noyau de $\mathrm{ord} \circ \delta$ est $\mathbb{Z}_p^*$, *donc que* $\ker i \cap \ker \mathrm{ord} = \mathrm{im}\, \delta \cap \ker \mathrm{ord} = \delta(\ker(\mathrm{ord} \circ \delta)) = \{0\}$.

On peut choisir un élément Π de O_{N_p} de la façon suivante:

$$O_{N_p} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} O_{k_p} \Pi^i$$

chacun des facteurs $O_{k_p}\Pi^i$ étant stable par l'action du groupe T. Lorsque p n'est pas décomposé dans $k/\mathbb{Q}$ on peut prendre pour Π une uniformisante à laquelle on impose la condition $\tau(\Pi) = \alpha\Pi$ où α est une racine q-ième de l'unité (primitive si p est ramifié dans $k/\mathbb{Q}$, égale à 1 si p est inerte). Une tel choix étant possible car $N/\mathbb{Q}$ est une extension décomposée et $p \equiv 1(q)$.

Lorsque p est décomposé dans $k/\mathbb{Q}$, le groupe T permute les complétés de O_N pour les métriques prolongeant la métrique p-adique de $\mathbb{Z}_p$, il suffit alors de prendre pour Π la somme d'une unformisante et de ses conjugués (pour les idéaux au-dessus de p).

Finalement, dans chacun des cas, on note t le saut de ramification des idéaux premiers au-dessus de p dans l'extension N/k.

On peut énoncer:

LEMME 2: *Avec les notations précédentes on a la décomposition*:

$$\Pi^t O_{k_p} + (1-\sigma) O_{N_p} = \Pi^t O_{N_p}.$$

DÉMONSTRATION: On a la congruence $\sigma(\Pi) \equiv \Pi(\Pi^{t+1})$ d'où l'on déduit que pour $1 \leq u \leq p-1$ $\sigma(\Pi^u) \equiv \Pi^u(\Pi^{t+u})$. Donc pour un élement x quelconque de $\Pi^t O_{N_p}$ on peut trouver un élément y de O_{k_p} et un élément z de O_{N_p} tels que:

$$x - \Pi^t y - (1-\sigma) z \in \Pi^p \Pi^t O_{N_p}$$

comme l'indice de ramification de p dans N/k est p, on est en mesure d'appliquer le lemme de Nakayama pour les O_{k_p}-modules.

REMARQUE: La décomposition du lemme 2 est en fait une décomposition de $\Pi^t O_{N_p}$ en somme directe de Λ_p-modules.

LEMME 3: *On a un isomorphisme de* Λ_p*-modules entre* O_{N_p}/O_{k_p} *et* $(1-\sigma)O_{N_p}$.

DÉMONSTRATION: Le choix de Π donne une décomposition:

$$O_{N_p} = \bigoplus_{i=0}^{p=1} O_{k_p}\Pi_i$$

de Λ_p-modules d'où l'on déduit

$$\Pi_t O_{N_p} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} O_{k_p}\Pi^{t+i}.$$

On a toujours un isomorphisme de Λ_p-modules entre $O_{k_p}\Pi^i$ et $O_{k_p}\Pi^{i+a}$. On a donc les isomorphismes de Λ_p-modules:

$$O_{N_p/}O_{k_p} \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{q} O_{k_p}\Pi^i\right)^{(p-1)/q} \simeq \frac{\Pi^t O_{n_p}}{\Pi^t O_{k_p}}$$

or d'après le lemme 2 ce dernier module est Λ_p-isomorphe à $(1-\sigma)O_{N_p}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3: Localisons et complétons en p la suite exacte (2). On obtient une suite exacte de Λ_p-modules d'où dans $G_0(\Lambda_p)$:

$$\begin{aligned}[\hat{H}_0(H, O_N)] - [\hat{H}^0(H, O_N)] &= [O_{k_p}] - [O_{N_p}/(1-\sigma)O_{N_p}] \\ &= [(1-\sigma)O_{N_p}] - [O_{N_p}/O_{k_p}]\end{aligned}$$

ce qui d'après le lemme 3 est nul.

Or les groupes $\hat{H}_0(H, O_N)$ et $\hat{H}^0(H, O_N)$ ont même ordre car H est cyclique et O_N est un sous-module d'un $Z[H]$-module libre ayant même rang. Le lemme 1 permet alors de conclure.

REMARQUE: L'hypothèse q premier peut être omise si l'on précise au §2 que l'ordre de r dans $(Z/pZ)^*$ est q.

REFERENCES

[1] D. CHATELAIN: Etude du O-module $O \otimes_{Z[G]} O_N$ pour une extension $N/\mathbf{Q}$ abélienne de groupe G avec O ordre maximal de $\mathbf{Q}[G]$, O_N anneau des entiers de N. *Séminaire de Théorie des Nombres de Besançon* 1976–1977.

[2] J. COUGNARD: Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers. *Thèse* (Bordeaux I - 1975).

[3] J. COUGNARD: Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers des p-extensions. *Compositio Math. 33, 3* (1976) 303–336.

[4] J. COUGNARD: Un contre exemple à une conjecture de J. Martinet. *Algebraic number fields, p.* 539–559, édité par A. Fröhlich (Academic Press).
[5] J. COUGNARD: Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré pq des rationnels. *Séminaire de Theorie des Nombres de Besançon* 1976–1977.
[6] A. FRÖHLICH: Arithmetic and Galois-module structure. *J. für reine angew. Math., 286-287* (1976) 380–440.
[7] A. FRÖHLICH: Some problems of Galois-module structure for wild extensions. *Proc. London Math. Soc.* Vol. XXXVII part 2, Sept. 1978, p. 193–212.
[8] H.W. LEOPOLDT: Über die Haupordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers. *J. für reine angew. Math., 201* (1959) 119–149.
[9] R.G. SWAN and E.G. EVANS: *K-theory of finite groups and orders.* Lecture notes in Mathematics 149. Springer Verlag, 1970.
[10] I. REINER: *Maximal orders.* Academic Press, 1975.
[11] S.M.J. WILSON: Reduced Norms in the K-theory ȯf orders. *J. of Algebra 46* (1977) 1–11.

(Oblatum 3-I-1978 & 22-V-1979)

Faculté des Sciences
Mathématiques
25030 BESANCON CEDEX
E.R.A. C.N.R.S. n° 07 0654