Composito Mathematica

KLAUS REICHARD

Algebraische Beschreibung der Ableitung bei q-Mal Stetig-Differenzierbaren Funktionen

Compositio Mathematica, tome 38, nº 3 (1979), p. 369-379
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1979__38_3_369_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 38, Fasc. 3, 1979, pag. 369–379

ALGEBRAISCHE BESCHREIBUNG DER ABLEITUNG BEI q-MAL STETIG-DIFFERENZIERBAREN FUNKTIONEN

Klaus Reichard

Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe von M, $x \in M$, $\mathcal{O}_x$ der Halm von $\mathcal{O}$ in x und $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_x$, so ist der Tangentialraum T_xM von M in x der Dualraum von $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ (siehe C. Chevalley [1]), also der Raum der Derivationen von $\mathcal{O}_x$. Dieselbe Definition gilt auch für C^ω-Mannigfaltigkeiten (vgl. H. Flanders [2]).

Ist M dagegen eine C^q-Mannigfaltigkeit mit $1 \leq q < \infty$, so führt dieser Weg zu keinem guten Ergebnis, denn in diesem Fall ist die Dimension von $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ unendlich, ja sogar gleich der Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ (W.F. Newns, A.G. Walker [3]). Man kann aber T_xM in diesem Fall folgendermaßen beschreiben:

Sei $\mathfrak{m}_x^{(2)} := \{f \in \mathfrak{m}_x | \nabla f(x) = 0\}$. Dabei ist der Gradient ∇f von f bzgl. irgendeines Koordinatensystems von M um x zu nehmen. Dann ist T_xM der Dualraum von $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}$ (vergleiche [3]). Diese Definition ist auch für C^∞-bzw. C^ω-Mannigfaltigkeiten richtig, denn in diesen Fällen ist $\mathfrak{m}_x^{(2)} = \mathfrak{m}_x^2$. Es gibt bereits Versuche, das Ideal $\mathfrak{m}_x^{(2)}$ durch "innere" Eigenschaften von $\mathcal{O}_x$ zu beschreiben, doch verwenden alle diese Beschreibungen an irgendeiner Stelle mehr als nur die Ringstruktur von $\mathcal{O}_x$. So benötigen beispielsweise Newns und Walker [3] C^q-Algebren; genauer gesagt, sie betrachten für $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{m}_x$ den Homomorphismus vom Ring $\mathcal{D}_m^q$ der Keime von C^q-Funktionen in $0 \in \mathbb{R}^m$ nach $\mathcal{O}_x$, der durch Einsetzen von $f_1, \ldots, f_m$ für die Koordinaten $Y_1, \ldots, Y_m$ des $\mathbb{R}^m$ entsteht. Es ist aber ein bis heute noch nicht gelöstes Problem, ob es neben diesem Einsetzungsmorphismus weitere $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismen $\rho : \mathcal{D}_m^q \to \mathcal{O}_x$ gibt mit $\rho(Y_i) = f_i$ (vgl. hierzu [4] und [6]). Jedoch könnten Satz 13 und Korollar 17 der vorliegenden Arbeit einen Beitrag zur Lösung dieses Problems liefern, denn dort werden Eigenschaften solcher Morphismen gezeigt, die nicht notwendig Einstzungsmorphismen sind.

Das wichtigste Ergebnis dieser Arbeit ist aber, daß sich $\mathfrak{m}_x^{(2)}$ durch

0010-437X/79/03/0369-11 $00.20/0

ausschließlich algebraische Eigenschaften von $\mathcal{O}_x$ (also durch Eigenschaften, die nur in der Struktur von $\mathcal{O}_x$ als $\mathbb{R}$-Algebra begründet sind,) beschreiben läßt (Satz 8).

Außerdem sei für $r \leq q+1$ mit $\mathfrak{m}_x^{(r)}$ das Ideal aller der $f \in \mathcal{O}_x$ bezeichnet, deren partielle Ableitungen (bzgl. irgendeines Koordinatensystems) bis zur Ordnung $r-1$ in x verschwinden. Dann ist stets $\mathfrak{m}_x^r \subset \mathfrak{m}_x^{(r)}$ (Leibnizregel). Auch für $\mathfrak{m}_x^{(r)}$ gebe ich eine rein algebraische Beschreibung (Satz 11, Bemerkung 12). Die im Falle von C^ω-bzw. C^∞-Mannigfaltigkeiten richtige Beschreibung $\mathfrak{m}_x^{(r)} = \mathfrak{m}_x^r$ ist für $q < \infty$ ebenfalls falsch. Mit einem ähnlichen Argument wie in [3] zeigt man sogar, daß $\mathfrak{m}_x^{(r)} \not\subset \mathfrak{m}_x^2$ ist für $q < \infty$ und alle $1 \leq r \leq q+1$.

Mit Hilfe dieser Beschreibung von $\mathfrak{m}_x^{(r)}$ folgt dann, daß die Bilder $\rho(\mathfrak{m}_x^{(r)})$ unter einem algebraischen Morphismus ρ (der also nicht notwendig ein Einsetzungsmorphismus ist,) wieder in $\mathfrak{m}_x^{(r)}$ liegen (Satz 13). Damit induziert ein jeder solcher Morphismus einen Morphismus der Taylorpolynome (Korollar 16).

Ich danke dem Referenten für einige wichtige Hinweise und Anregungen.

Bezeichnungen, Vorbereitungen

Weil es sich hier um lokale Aussagen handelt, können wir o.E. davon ausgehen, daß $M = \mathbb{R}^n$ und $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$.

Außerdem sei q eine beliebige aber von jetzt an feste natürliche Zahl > 0, $\mathcal{D}$ sei die $\mathbb{R}$-Algebra der C^q-Funktionskeime in $0 \in \mathbb{R}^n$, und $\mathfrak{m}$ sei das maximale Ideal von $\mathcal{D}$.

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \text{ seien die Koordinaten des } \mathbb{R}^n.$$

Mit $I = (i_1, \ldots, i_n)$, $J, \ldots$ seien stets Multiindizes aus $\mathbb{N}^n$ bezeichnet. Außerdem sei

$$|I| := \sum_{\nu=1}^n i_\nu, \quad X^I := \prod_{\nu=1}^n X_\nu^{i_\nu},$$

und es sei $I \leq J$ genau dann, wenn $i_\nu \leq j_\nu$ ist für alle $1 \leq \nu \leq n$.

Für eine C^q-Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $|I| \leq q$ sei

$$D^I f := \frac{\partial^{|I|} f}{(\partial X_1)^{i_1} \ldots (\partial X_n)^{i_n}}.$$

Schließlich sei noch $\mathfrak{m}^{(r)} := \{f \in \mathcal{D} \mid D^I f(0) = 0 \text{ für } |I| < r\}$ für $0 \leq r \leq$

$q+1$, dann ist $\mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m}^{(r)}$ (folgt mit der Leibnizregel). Für eine Funktion $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sei $N(f) := f^{-1}(0)$ die Nullstellenmenge von f. Entsprechendes gelte für Keime. $H_\nu := N(X_\nu)$ sei die ν-te Koordinatenhyperfläche und $H := \bigcup_{\nu=1}^n H_\nu$.

Bevor ich die angekündigte Beschreibung der Ideale $\mathfrak{m}^{(r)}$ geben kann, benötige ich einige Hilfsaussagen. Dabei sind Satz 3 und Korollar 5 von zentraler Bedeutung für die gesamte Arbeit. Um die Aussagen nicht unnötig kompliziert zu machen, wird oft nur von Funktionen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ die Rede sein, auch wenn nur Keime aus $\mathscr{D}$ gemeint sind.

1. Hilfssatz: *$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sei von der Klasse C^q, $q \geq 1$.*

(a) *Ist $f|H_\nu = 0$ für ein $1 \leq \nu \leq n$, so gibt es eine C^{q-1}-Funktion $g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $f = X_\nu \cdot g$, und es ist $g(x) = \partial f/\partial X_\nu\,(x)$ für alle $x \in H_\nu$.*

(b) *Ist $f(0) = 0$, so gibt es C^{q-1}-Funktionen $f_\nu: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $f = \Sigma_{\nu=1}^n X_\nu \cdot f_\nu$, wobei sogar jeder einzelne Summand von der Klasse C^q ist. Dabei ist außerdem $f_\nu(0) = \partial f/\partial X_\nu\,(0)$ für $1 \leq \nu \leq n$.*

Beweis: (a) Siehe z.B. [2]. Man setze

$$g(x_1, \ldots, x_n) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial X_\nu}(x_1, \ldots, t \cdot x_\nu, \ldots, x_n)\, dt,$$

(b) folgt durch Induktion über n.

$$n = 1: \text{siehe (a)}$$
$$n-1 \Rightarrow n: \tilde{f}(x_1, \ldots, x_{n-1}) := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Dann ist $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}$ ist von der Klasse C^q und $f - \tilde{f}|H_n = 0$, wenn man $\tilde{f}$ als Funktion auf $\mathbf{R}^n$ betrachtet. Mit der Induktionsvoraussetzung und mit (a) folgt die Behauptung wegen $f = \tilde{f} + (f - \tilde{f})$. □

2. Hilfssatz: *$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sei stetig und außerhalb von H sogar C^1. Lassen sich alle partiellen Ableitungen $\partial f/\partial X_\nu: \mathbf{R}^n/H \to \mathbf{R}$ stetig auf ganz $\mathbf{R}^n$ fortsetzen, so ist f auf ganz $\mathbf{R}^n$ von der Klasse C^1.*

Beweis: Durch einen linearen Koordinatenwechsel können wir H in eine Menge $\tilde{H}$ mit folgenden Eigenschaften transformieren: $\tilde{H}$ ist eine Vereinigung von Hyperebenen; jede Gerade G, die parallel zu einer der Koordinatenachsen X_ν verläuft, trifft $\tilde{H}$ höchstens in endlichvielen Punkten.

Bezeichnen wir mit $\tilde{f}$ die Funktion, die durch Transformation aus f

entsteht, so ist $\tilde{f}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$ und außerhalb $\tilde{H}$ sogar C^1. Außerdem lassen sich alle partiellen Ableitungen von $\tilde{f}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortzetzen.

Ist nun $1 \leq \nu \leq n$, und ist G irgendeine Gerade parallel zur X_ν-Achse, so ist $f|G\, C^1$ bis auf die endlichvielen Punkte von $G \cap \tilde{H}$, und die Ableitung $(f|G)' = \partial f/\partial X_\nu|G$ von $f|G$ ist stetig ergänzbar. Durch Integration von $(f|G)'$ erhält man dann, daß $f|G$ überall C^1 ist. Macht man diese Überlegung für alle achsenparallelen Geraden, so sieht man, daß f überall partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen ist. Damit ist f aber überall C^1. □

3. Satz: *I sei ein Multiindex mit $|I| \leq q$ und $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f := X^I \cdot g$ ist von der Klasse C^q und*

(ii) (a) *g ist von der Klasse $C^{q-|I|}$.*

(b) *$g|\mathbb{R}^n \backslash H$ ist von der Klasse C^q.*

(c) *Für alle $J \leq I$ und alle K mit $|K| = |J| + q - |I|$ läßt sich $X^J \cdot D^K g$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.*

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): (a) folgt durch $|I|$-faches Anwenden von Hilfssatz 1a.

(b) ist klar, weil $X^I(x) \neq 0$ ist für $x \in \mathbb{R}^n \backslash H$.

Nach Hilfssatz 1a ist $X^J \cdot g$ von der Klasse $C^{q+|J|-|I|} = C^{|K|}$. c) folgt jetzt durch Induktion über $|J|$:

$|J| = 0$: siehe unter (a)

$$|J|-1 \Rightarrow |J|: D^K(X^J \cdot g) = \sum_{L \leq K} c_L \cdot D^L(X^J) \cdot D^{K-L} g \qquad \text{(Leibnizregel)}$$

$$= X^J \cdot D^K g + \sum_{0 \neq L \leq K, J} \tilde{c}_L \cdot X^{J-L} \cdot K^{K-L} g$$

mit geeigneten Konstanten c_L, $\tilde{c}_L \in \mathbb{R}$ läßt sich, wie gerade gezeigt, stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen. Nach Induktionsvoraussetzung lassen sich die Summanden unter dem Summenzeichen stetig fortsetzen, also hat auch $X^J \cdot D^K g$ eine stetige Fortsetung.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen zuerst, daß (c) sogar für alle K mit $|K| \leq |J| + q - |I|$ gilt. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

(1) $|K| + |I| - q \geq 0$. In diesem Fall gibt es ein $0 \leq \tilde{J} \leq J$ mit $|K| = |\tilde{J}| + q - |I|$ und nach ii, (c) läßt sich $X^{\tilde{J}} \cdot D^K g$ und damit erst recht $X^J \cdot D^K g$ stetig auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen

(2) $|K| + |I| - q < 0$. In diesem Fall ist $|K| < q - |I|$, es ist also sogar $D^K g$ stetig fortsetzbar nach ii, (a).

Für jedes $|K| \leq q$ ist nun

$$D^K(X^I \cdot g) = \sum_{L \leq I, K} c_L \cdot X^{I-L} D^{K-L} g, \; c_L \in \mathbb{R} \text{ geeignet.}$$

Wegen $|K - L| \leq q - |L| = |I - L| + q - |I|$ für jedes $L \leq I$, K läßt sich $D^K(X^I \cdot g)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen. Mehrfaches Anwenden von Hilfssatz 2 liefert die Behauptung. □

Diesen Satz findet man für den Fall $n = 1$ bereits bei Spallek [5], Satz 4.1.

4. Korollar: *Unter den Voraussetzungen von Satz* 3 *gilt* 3, ii, (c) *auch für alle* K *mit* $|K| \leq |J| + q - |I|$. □

5. Korollar: *Es sei* $|I| \leq q$, f *und* g *seien stetige Funktionen auf* $\mathbb{R}^n$, *so daß* $X^I \cdot f$ *und* $X^I \cdot g$ *von der Klasse* C^q *sind.*

(a) $X^I \cdot (f + g)$ *ist von der Klasse* C^q.

(b) $X^I \cdot (f \cdot g)$ *ist von der Klasse* C^q.

(c) $X^I \cdot (f/g)$ *ist in einer Umgebung der Null von der Klasse* C^q, *falls* $g(0) \neq 0$ *ist.*

Beweis: (a) ist klar. Nach Voraussetzung erfüllen f und g die Bedingungen von 3, ii. Dann erfüllen auch $f \cdot g$ bzw. f/g die Bedingungen 3, ii, (a) und (b). Lediglich für die Bedingung 3, ii, (c) bleibt etwas zu zeigen. Sei also $J \leq I$ und $|K| = |J| + q - |I|$. Dann folgt mit der Leibnizregel

$$\begin{aligned} X^J \cdot D^K(f \cdot g) &= X^J \cdot \sum_{0 \leq L \leq K} c_L \cdot D^L f \cdot D^{K-L} g \\ &= \sum_{\substack{0 \leq L \leq K \\ |L| < q - |I|}} c_L \cdot D^L f \cdot (X^J \cdot D^L g) \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq L \leq K \\ |L| \geq q - |I|}} c_L \cdot (X^{J_I(L)} \cdot D^L f) \cdot X^{J - J_I(L)} \cdot D^{K-L} g, \end{aligned}$$

$c_L \in \mathbb{R}$ geeignet und $J_1(L) \leq J$ mit $|L| = |J_1(L)| + q - |I|$. Damit ist die erste Summe wegen 3, ii, (a) für f und Korollar 4 für g stetig fortsetzbar und in der zweiten Summe ist $X^{J_1(L)} \cdot D^L f$ ebenfalls stetig fortsetzbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} |K - L| &= |K| - |L| = |J| + q - |I| - |J_1(L)| - q + |I| \\ &= |J - J_1(L)| \leq |J - J_1(L)| + q - |I|. \end{aligned}$$

Nach Korollar 4 ist also auch $X^{J-J_1(L)} \cdot D^{K-L}g$ stetig fortsetzbar. Der Beweis für f/g verläuft ähnlich. □

Algebraische Beschreibung der Ideale $\mathfrak{m}^r$

6. DEFINITION: Seien $f, g \in \mathfrak{m}$. Dann heiße $f \le g$ genau dann, wenn für alle $j \in N$ gilt: f^j teilt g^{j+1} in $\mathcal{D}$.$f \not\le g$ bedeute, daß nicht $f \le g$ ist. Ist $M \subset \mathfrak{m}$ eine Teilmenge, so heiße $f \in M$ minimales Element von M, wenn für jedes $g \in M$ mit $g \le f$ folgt, daß $f \le g$ ist. □

Zwar ist "$\le$" keine Ordnungsrelation, aber mit gewissen Einschränkungen stimmt folgende Vorstellung: Ist $f \le g$, so verschwindet g von höherer Ordnung als f. Präzisiert wird diese Aussage durch.

7. SATZ: *Ist $f \in \mathfrak{m}^{(r)}$ für ein $r \le q+1$ und ist $g \in \mathfrak{m}$ mit $f \le g$, so ist auch $g \in \mathfrak{m}^{(r)}$.*

BEWEIS: Wir zeigen die Aussage zunächst für den Fall $n = 1$. Sei dazu Y die Koordinatenfunktion auf dem $\mathbf{R}^1$. Ist $g \notin \mathfrak{m}^{(r)}$, so gibt es ein $0 < k < r$ und stetige Funktionen $\tilde{f}$, $\tilde{g}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f = Y^k \cdot \tilde{f}$, $g = Y^k \cdot \tilde{g}$ und mit $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{g}(0) \neq 0$.

$f \le g$ bedeutet insbesondere, daß $h := g^2/f = Y^k \cdot \tilde{g}^2/\tilde{f}$ eine C^q-Funktion ist. Weil $\tilde{g}^2/\tilde{f}$ nicht stetig ist, ist $h \notin \mathfrak{m}^{(k)}$. Damit gibt es ein $0 \le k' < k$ und eine stetige Funktion $\tilde{h}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $\tilde{h}(0) \neq 0$ und $h = Y^{k'} \cdot \tilde{h}$.

Damit ist $\tilde{g}^2/\tilde{f} = h/Y^k = \tilde{h} \cdot Y^{k'-k}$ außerhalb von o. Weil $f \le g$ ist, muß auch

$$
\begin{aligned}
g^{k+2}/f^{k+1} = Y^k \cdot \tilde{g}^{k+2}/\tilde{f}^{k+1} &= Y^k \cdot (\tilde{g}^2/\tilde{f})^{k+1} \cdot (1/\tilde{g})^k \\
&= Y^{k-(k-k')\cdot(k+1)} \cdot \tilde{h}^{k+1} \cdot (1/\tilde{g})^k.
\end{aligned}
$$

eine C^q-Funktion sein. Das ist aber nicht der Fall, denn es ist $k-(k-k')\cdot(k+1) < 0$ und $\tilde{h}^{k+1} \cdot (1/\tilde{g})^k(0) \neq 0$.

Um nun den allgemeinen Fall einzusehen, muß man f und g auf irgendeine Gerade G durch den Nullpunkt einschränken. Dabei bleibt $f|G \in \mathfrak{m}^{(r)}$ und es bleibt $f|G \le g|G$. Es folgt also $g|G \in \mathfrak{m}^{(r)}$. Ist P das Taylorpolynom vom Grad $r-1$ von g im Nullpunkt, so ist $P|G = 0$ für alle Geraden G durch Null, denn $P|G$ ist das Taylorpolynom vom Grade $r-1$ von $g|G$. Dann ist aber P bereits das Nullpolynom, und das bedeutet, daß $g \in \mathfrak{m}^{(r)}$ ist. □

Im vorangegangenen Beweis wird die Sprechweise benutzt "f/g ist eine C^q-Funktion" als Abkürzung für "es gibt eine C^q-Funktion h mit $f = g \cdot h$". Diese vereinfachte Sprechweise wird auch in den folgenden Beweisen verwendet.

8. SATZ: $\mathfrak{m}^{(2)}$ wird von den nicht minimalen Elementen aus $\mathfrak{m}$ erzeugt.

BEWEIS: Sei $f \in \mathfrak{m}^{(2)}$, dann gibt es C^{q-1}-Funktionen $f_\nu : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ mit $f_\nu(0) = 0$ und $f = \Sigma_{\nu=1}^n X_\nu \cdot f_\nu$, so daß $X_\nu \cdot f_\nu$ für alle ν eine C^q-Funktion ist (Hilfssatz 1.b) Nun ist $(X_\nu \cdot f_\nu)^{j+1} = X_\nu^{j+1} \cdot f_\nu^{j+1} = X_\nu^j \cdot (X_\nu \cdot f_\nu^{j+1})$ für jedes $1 \leq \nu \leq n$ und jedes $j \in \mathbf{N}$. Nach Korollar 5.b ist $X_\nu \cdot f_\nu^{j+1}$ von der Klasse C^q, also ist $X_\nu \leq X_\nu \cdot f$. Wäre jetzt auch $X_\nu \cdot f_\nu \leq X_\nu$, so folgte $X_\nu \in \mathfrak{m}^{(2)}$ mit Satz 7. Damit ist gezeigt, daß $X_\nu \cdot f_\nu$ nicht minimal in $\mathfrak{m}$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß jedes $f \notin \mathfrak{m}^{(2)}$ minimal in $\mathfrak{m}$ ist. Sei also $f \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}$ und $g \in \mathfrak{m}$ mit $g \leq f$. Nach Koordinatenwechsel können wir oE annehmen $f = X_1$. Wegen $g \leq f$ ist f^2/g eine C^q-Funktion, damit ist $N(g) \subset N(f) = H_1$. Wegen Satz 7 ist außerdem $g \notin \mathfrak{m}^{(2)}$, damit ist $N(g)$ sogar eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist aber $N(g) = H_1$, mit Satz 1, a gibt es also eine stetige Funktion $g_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $g = X_1 \cdot g_1$. Daraus folgt, daß $g^{j+1}/f^j = X_1 \cdot g_1^{j+1}$ eine C^q-Funktion ist für alle $j \in N$ (Korollar 5) und das bedeutet $f \leq g$. $\square$

Man beachte, daß man ein Koordinatensystem zwar für den Beweis von Satz 8 braucht, nicht aber für die mit diesem Satz gegebene algebraische Beschreibung von $\mathfrak{m}^{(2)}$.

Es gibt jedoch für $n \geq 2$ minimale Funktionen in $\mathfrak{m}$, die in $\mathfrak{m}^{(2)}$ liegen, zum Beispiel $\Sigma_{\nu=1}^n X_\nu^2$.

9. DEFINITION: Sei I ein Multiindex mit $|I| \leq q$.

$$\mathfrak{m}^{(I)} := \left\{ f \in \mathfrak{m} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Es gibt } g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \text{ stetig} \\ \text{mit } f = X^I \cdot g \end{array} \right\} \quad \square$$

Diese Definition ist natürlich nicht rein algebraisch und hängt vom gewählten Koordinatensystem X ab. Da man aber mit Satz 8 rein algebraisch definieren kann: $X_1, \ldots, X_d \in \mathfrak{m}$ heißen Koordinatensystem, falls die X_i eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}$ bilden, liefert der folgende Satz doch eine algebraische Beschreibung von $\mathfrak{m}^{(I)}$, sofern wir uns wieder ein festes Koordinatensystem X gegeben denken.

10. SATZ: *Sei $|I| \leq q$. Dann gilt für $f \in \mathfrak{m}$: $f \in \mathfrak{m}^{(I)} \Leftrightarrow X^I \leq f$.*

BEWEIS: Sei $f \in \mathfrak{m}^{(I)}$, $f = X^I \cdot g$, g stetig. Nach Korollar 5, b ist $f^{j+1}/(X^I)^j = X^I \cdot g^{j+1}$ eine C^q-Funktion für alle $j \geq 1$, also ist $X^I \leq f$. Ist andererseits $f \in \mathfrak{m}$ und $X^I \leq f$ mit $I = (i_1, \ldots, i_n)$, so folgt für jede Gerade G parallel zur X_ν-Achse: $X_\nu^{i_\nu}|G \leq f|G$ und dararaus folgt mit Satz 7 $\mathrm{d}^i(f|G)/(\mathrm{d}X_\nu)^i\,(x) = 0$ für alle $i < i_\nu$, $x \in H_\nu$.

Macht man diese Überlegung für alle ν, so liefert mehrfaches Anwenden von Hilfssatz 1, a die Behauptung. $\square$

Damit ist eine algebraische Beschreibung von $\mathfrak{m}^{(r)}$ für $r \leq q$ gegeben, denn es gilt:

11. SATZ: $\mathfrak{m}^{(r)} = \Sigma_{|I|=r}\, \mathfrak{m}^{(I)}$ *für* $r \leq q$.

BEWEIS: Es gibt zunächst C^∞-Funktionen $\Phi_\nu : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Bedingungen:

(a) $\Phi_\nu = 0$ in einer Umgebung von $H_\nu \backslash \{0\}$

(b) $\Sigma_{\nu=1}\, \Phi_\nu = 1$

(c) Für jedes $f \in \mathfrak{m}^{(q+1)}$ ist $\Phi_\nu \cdot f$ von der Klasse C^q.

Diese Funktionen findet man mit Hilfe von Multiplikatoren (vgl. hierzu [7], IV. 4), weil die H_ν und alle endlichen Schnitte der H_ν paarweise regulär liegen.

Sei nun $f \in \mathfrak{m}^{(r)}$ und T sei das Taylorpolynom q-ten Grades von f im Nullpunkt. Dann ist $f - T \in \mathfrak{m}^{(q+1)}$ und es gibt stetige Funktionen g_ν mit $\Phi_\nu \cdot (f - T) = X_\nu^q \cdot g_\nu$ wegen Bedingung (a) und (c). Außerdem ist $g_\nu(0) = 0$.

Wegen $T \in \Sigma_{|I|=r}\, \mathfrak{m}^I \subset \Sigma_{|I|=r}\, \mathfrak{m}^{(I)}$ folgt damit

$$f = T + \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu \cdot (f - T) \in \sum_{|I|=r} \mathfrak{m}^{(I)}$$

Ist andereseits $f \in \mathfrak{m}^{(I)}$, $|I| = r$, so ist $X^I \leq f$. Wegen $X^I \in \mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m}^{(r)}$ folgt $f \in \mathfrak{m}^{(r)}$ mit Satz 7. $\square$

Auch diese Beschreibung von $\mathfrak{m}^{(r)}$ hängt nicht vom Koordinatensystem ab. Jetzt muß man nur noch $\mathfrak{m}^{(q+1)}$ algebraisch beschreiben. Das geschieht mit der folgenden

12. BEMERKUNG: Sei I beliebig mit $|I| = r \leq q$. Dann gilt $\mathfrak{m}^{(I)} \cap \mathfrak{m}^{(r+1)} = \{f \in \mathfrak{m}^{(I)} | f$ ist nicht minimal in $\mathfrak{m}^{(I)}\}$. Das liefert für $|I| = q$ wegen Satz 11 insbesondere eine Beschreibung von $\mathfrak{m}^{(q+1)}$.

BEWEIS: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $X^I \cdot f \in \mathfrak{m}^{(I)}$. Dann ist $X^I \cdot f \in \mathfrak{m}^{(r+1)}$ genau dann, wenn $f(0) = 0$ ist.

Sind nun $X^I \cdot f$ und $X^I \cdot g$ aus $\mathfrak{m}^{(I)}$, wobei f und g stetige Funktionen seien, und ist $f(0) \neq 0$, so ist $(X^I \cdot g)^{j+1}/(X^I \cdot f)^j = X^I \cdot g \cdot (g/f)^j$ nach Korollar 5 eine C^q-Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist also $X^I \cdot f \leq X^I \cdot g$. Das bedeutet, daß $X^I \cdot f$ minimal in $\mathfrak{m}^{(I)}$ ist.

Ist andereseits $X^I \cdot f \in \mathfrak{m}^{(I)}$, wobei f stetig ist, mit $f(0) = 0$, so ist $X^I \not\leq X^I \cdot f$, denn sonst wäre $X^I \in \mathfrak{m}^{(r+1)}$ mit Satz 7. Es ist aber $X^I \leq X^I \cdot f$ (Satz 10). In diesem Fall ist also $X^I \cdot f$ nicht minimal in $\mathfrak{m}^{(I)}$. □

Invarianz der Ideale $\mathfrak{m}^r$ unter Morphismen.

Seien n' und q' zwei weitere, von jetzt an feste natürliche Zahlen, $\mathscr{D}'$ sei die $\mathbb{R}$-Algebra der Keime von $C^{\bar{q}'}$-Funktionen im Nullpunkt des $\mathbb{R}^{n'}$, $\mathfrak{m}'$ sei das maximale Ideal von $\mathscr{D}'$, und Y sei ein Koordinatensystem des $\mathbb{R}^{n'}$. Außerdem sei $\rho : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ ein lokaler Morphismus von $\mathbb{R}$-Algebren.

13. Satz: *Ist $r \leq \min\{q, q'\} + 1$, so ist $\rho(\mathfrak{m}^{(r)}) \subset \mathfrak{m}'^{(r)}$.*

Beweis: *Fall* 1: $r \leq q$.

Wegen Satz 11 genügt es, zu zeigen, daß $\rho(\mathfrak{m}^{(I)}) \subset \mathfrak{m}^{(r)}$ ist für $|I| = r$. Sei also $f \in \mathfrak{m}^{(I)}$, so ist $X^I \leq f$, daraus folgt $\rho(X^I) \leq \rho(f)$. Außerdem ist $\rho(X^I) = (\rho(X))^I \in \mathfrak{m}'^r \subset \mathfrak{m}'^{(r)}$. Mit Satz 7 ist $\rho(f) \in \mathfrak{m}'^{(r)}$.

Fall 2: $r = q + 1$. Sei $f \in \mathfrak{m}^{(q+1)}$. Wie im Beweis von Satz 10 gezeigt wurde, genügt es, den Fall $f = X_1^q \cdot g$ mit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $g(0) = 0$ zu betrachten. Es folgt $\rho(X_1)^q \leq \rho(f)$. Ist $\rho(X_1) \in \mathfrak{m}'^{(2)}$, so ist $\rho(X_1)^q \in \mathfrak{m}'^{(q+1)}$ (Leibnizformel) und damit $\rho(f) \in \mathfrak{m}^{(q+1)}$ (Satz 7). Ist $\rho(X_1) \notin \mathfrak{m}'^{(2)}$, so können wir o.E. annehmen $\rho(X_1) = Y_1$ und damit $Y_1^q \leq \rho(f)$. Es gibt damit ein stetiges $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\rho(f) = Y_1^q \cdot h$. Wäre $\rho(f) \notin \mathfrak{m}'(q+1)$, so wäre a $:= h(0) \neq 0$. Damit wäre $\tilde{f} := g - aX_1^q \leq X_1^q$. Daraus folgte $\rho(\tilde{f}) \leq Y_1^q$, was wegen $\rho(\tilde{f}) = Y_1^q(h - a) \in \mathfrak{m}'^{(q+1)}$ nicht möglich ist (vgl. Bemerkung 12). □

Da wir jetzt über eine invariante Definition der Ideale $\mathfrak{m}^{(r)}$ verfügen, ist es auch möglich, Taylorpolynome invariant zu definieren.

14. Definition: Sei $k \leq q$, und $f \in \mathscr{D}$. Dann sei $\mathrm{T}^k f$ das Taylorpolynom vom Grad k von f bzgl. des (von uns fest gewählten) Koordinatensystems X. □

Bezeichnet man mit P_n^k den Ring aller Polynome in n Variablen $Z_1, \ldots, Z_n$ über $\mathbb{R}$ vom Grade $\leq k$, so ist $\mathrm{T}^k : \mathscr{D} \to P_n^k$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, der sich folgendermaßen invariant beschreiben läßt.

15. Bemerkung: $\mathrm{T}^k f$ ist das eindeutig bestimmte Polynom aus P_n^k, so daß $\mathrm{T}^k f(X) - f \in \mathfrak{m}^{(k+1)}$ ist. Damit ist nicht nur $\mathfrak{m}^{(r)}$ für alle $r \leq q+1$ rein algebraisch beschrieben, sondern auch für jedes I mit $|I| \leq q$ der Wert von $D^I f(0)$ bzgl. des Koordinatensystems X. □

16. Korollar: *Ist unter den Voraussetzungen von Satz* 13 *zusätzlich* $k \leq \min\{q, q'\}$, *und bezeichnet* $\mathrm{T}^k : \mathscr{D} \to P_n^k$ *bzw.* $\mathrm{T}'^k : \mathscr{D}' \to P_{n'}^k$ *jeweils die Taylorabbildung, so gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus* $\mathrm{T}^k \rho : P_n^k \to P_{n'}^k$ *mit* $\mathrm{T}'^k \circ \rho = (\mathrm{T}^k \rho) \circ \mathrm{T}^k$.

Beweis: Folgt sofort mit Satz 13, weil

$$\rho(\text{Ker } \mathrm{T}^k) = \rho(\mathfrak{m}^{(k+1)}) \subset \mathfrak{m}^{(k+1)} = \text{Ker } \mathrm{T}'^k \text{ ist.} \quad \square$$

Die Aussage von Korollar 16 ist für den Fall, daß $q \geq q'$ ist und ρ durch Einsetzen von $C^{q'}$-Funktionen gegeben wird, bekannt. Allerdings weiß man bisher noch nicht, ob alle Morphismen auf diese Art gegeben werden (vgl. hierzu [6], § 4 und [4]).

Jedoch erhält man.

17. Korollar: *Ist* $q \geq q'$ und ist $\tilde{\rho} : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ *derjenige Morphismus, der durch Einsetzen von* $\rho(X_1), \ldots, \rho(X_n)$ *für* $X_1, \ldots, X_n$ *entsteht, so ist* $\rho(f) - \tilde{\rho}(f) \in \mathfrak{m}'^{(q'+1)}$ *für alle* $f \in \mathscr{D}$.

(Das bedeutet, daß sich ρ höchstens um q'-platte Funktionen von einem Einsetzungsmorphismus unterscheidet.)

Beweis: Aus der Konstruktion von $\tilde{\rho}$ folgt sofort, daß $\mathrm{T}^{q'}\tilde{\rho}(X_i) = \mathrm{T}^{q'}\rho(X_i)$ ist für $1 \leq i \leq n$. Weil $\mathrm{T}^{q'}\tilde{\rho}$ und $\mathrm{T}^{q'}\rho$ als Morphismen von Polynomringen durch Einsetzen entstehen, ist dann $\mathrm{T}^{q'}\tilde{\rho} = \mathrm{T}^{q'}\rho$. Damit ist $\mathrm{T}'^{q}(\tilde{\rho}(f)) = \mathrm{T}'^{q'}(\rho(f))$ für alle $f \in \mathscr{D}$, und es folgt die Behauptung. □

LITERATUR

[1] C. Chevalley: *Theory of Lie Groups I.* Princeton 1946.

[2] H. Flanders: Development of an extended exterior differential calculus. *Trans. AMS 75* (1953) 311–326.

[3] W.F. Newns and A.G. Walker: Tangent Planes to a Differentiable Manifold *J. London Math. Soc. 31* (1956), 400–407.

[4] K. Reichard: Nichtdifferenzierbare Morphismen differenzierbarer Räume. *Man. Math. 15,* (1975) 243–250.

[5] K. Spallek: Abgeschlossene Garben differenzierbarer Funktionen. *Man. Math. 6,* (1972) 147–175.

[6] K. Spallek: Beispiele zur lokalen Theorie der differenzierbaren Räume. *Math. Ann. 195*, (1972) 332–347.

[7] J.-C. Tougeron: Idéaux de fonctions différentiables. *Ergeb. d. Math. Bd. 71*, Springer-Verlag (1972).

(Oblatum 13-II-1978 & 28-VIII-1978)

Institut für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Universitätsstr. 150
Bochum 1 D.B.R.

Nachtrag bei der Korrektur

Mit ähnlichen Methoden, wie sie zum Beweis von Korollar 5 verwendet wurden, läßt sich die folgende Verallgemeinerung von Korollar 5 zeigen:

I und q seien gegeben wie in Satz 3, und $g_1, \ldots, g_m$ seien stetige Funktionen, so daß $X^I \cdot f_j$ von der Klasse C^q ist für $1 \leq j \leq m$. Ist dann $F(Y_1, \ldots, Y_m)$ eine C^q-Funktion, so ist auch $X^I \cdot F(f_1, \ldots, f_m)$ von der Klasse C^q.