S. COEN

Annulation de la cohomologie à valeurs dans le faisceau structural et espaces de Stein

Compositio Mathematica, tome 37, nº 1 (1978), p. 63-75
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1978__37_1_63_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 37, Fasc. 1, 1978, pag. 63–75.
Sijthoff & Noordhoff International Publishers–Alphen aan den Rijn
Printed in the Netherlands

ANNULATION DE LA COHOMOLOGIE A VALEURS DANS LE FAISCEAU STRUCTURAL ET ESPACES DE STEIN

S. Coen

Summary

Complex spaces Y such that $H^q(Y, \mathcal{O}) = 0$ for $q \geq 1$, are considered. In particular, it is proved that if Y is a locally analytic subspace of a finite-dimensional Stein space X, then $H^q(Y, \mathcal{O})$ vanishes for $q \geq 1$ if and only if Y is a Stein subspace of X.

On sait que si Ω est un ouvert d'une variété de Stein de dimension finie X, une condition nécessaire et suffisante pour que Ω soit une sous-variété ouverte de Stein est que $H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ pour $q \geq 1$ (cf. Serre [14], Laufer [10], Siu [16], Bănică et Stănăsilă [3]). Dans le cas de $X = \mathbb{C}^2$ le problème avait été traité par H. Cartan [5] et Behnke-Stein [4]; il fallait démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine Ω de $\mathbb{C}^2$ soit un domaine d'holomorphie est que sur Ω le problème additif de Cousin soit toujours résoluble.

On connaît plusieurs généralisations du théorème précédent. En particulier, Y.-T. Siu a démontré que si (Ω, λ) est un domaine étalé dans une variété de Stein X, alors, pour que Ω soit une variété de Stein il faut et il suffit que $H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ pour $q \geq 1$. De plus, cette condition est équivalente à la condition que $\dim_{\mathbb{C}} H^q(\Omega, \mathcal{O})$ soit dénombrable pour $1 \leq q \leq \dim_{\mathbb{C}} \Omega - 1$.

De toute façon, les démonstrations des résultats qui précèdent font intervenir les enveloppes d'holomorphie de Stein de Ω, et par conséquent, elles ne se prêtent pas facilement à l'extension au cas où les espaces considerés ont des singularités.

Dans la présente note nous allons indiquer diverses propriétés de certaines classes d'espaces complexes Ω tels que $H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ pour $q \geq 1$. En particulier, nous allons démontrer que si Ω est un sous-espace localement analytique dans un espace de Stein de dimension finie X, alors pour que Ω soit un espace de Stein, il faut et il suffit que $H^q(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ pour $q \geq 1$. Cette proposition généralise celle que nous avons donnée au début. Pour tourner les difficultés liées à l'existence de l'enveloppe d'holomorphie de Ω, nous nous servirons systématiquement d'un récent résultat de Nagel [12].

§0. Préliminaires

Si Z est un espace complexe (réduit ou non réduit), nous notons $\mathcal{O}_Z$ le faisceau structural de Z et nous désignons souvent par $(Z, \mathcal{O}_Z)$ l'espace Z. Dans la suite nous appellerons *espaces complexes* les espaces analytiques complexes σ-compacts et réduits et nous appellerons *espaces complexes généraux* les espaces complexes, σ-compacts qui ne sont pas nécessairement réduits (cf. [7]).

Soit $(Z, \mathcal{O}_Z)$ un espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbres locales (cf. Grothendieck [7]); soit U un ouvert de Z et soit s une section de $\mathcal{O}_Z$ sur U. Nous notons $[s]: U \to \mathbb{C}$ *l'application sous-jacente* à s: si pour tout $z \in Z$, $\epsilon_z: \mathcal{O}_{Z,z} \to \mathbb{C}$ est l'application canonique (évaluation en z), on pose $[s](z) = \epsilon_z(s)$.

Soit Z un espace complexe général; on dit que $Y \subset Z$ est un *sous-espace localement analytique* de Z si Y est un sous-espace analytique (fermé) d'un ouvert de Z. On dit que Z est *holomorphiquement séparé* si pour $z_1 \in Z$, $z_2 \in Z$, $z_1 \neq z_2$ il existe $s \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ telle que $[s](z_1) \neq [s](z_2)$. Pour les définitions d'espace holomorphiquement convexe, d'espace localement réalisable par des sections globales nous renvoyons à la bibliographie. Un *espace (général) de Stein* est un espace complexe (général) holomorphiquement séparé, holomorphiquement convexe, réalisable par des sections globales.

Voici le théorème de A. Nagel qui a été cité plus haut et que nous allons employer souvent

(0.1) THÉORÈME (Nagel [12]): *Soient X un espace topologique et $\mathcal{S}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres locales sur X. Pour tout $x \in X$ on désigne par $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{S}_x$. On suppose que pour tout $x \in X$ l'application naturelle $\mathbb{C} \to \mathcal{S}_x/\mathfrak{m}_x$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres et que pour toute $s \in \Gamma(X, \mathcal{S})$ l'application $[s]: X \to \mathbb{C}$, $x \to s_x + \mathfrak{m}_x \xrightarrow{\sim} [s](x) \in \mathbb{C}$ est continue.*

On suppose $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$ pour $q \geq 1$.

Soient $s_1, \ldots, s_m \in \Gamma(X, \mathcal{S})$ des sections telles que à tout $x \in X$ soit associé un indice $j = j(x)$, $1 \leq j \leq m$ pour lequel $[s_j](x) \neq 0$.

Alors $\{s_1, \ldots, s_m\}$ engendrent $\Gamma(X, \mathcal{S})$ comme module sur lui-même.

La démonstration est fondée sur l'étude d'un certain complexe de Koszul, complexe qui se révèle être une résolution acyclique de $\mathcal{S} \simeq \Lambda^m \mathcal{S}^m$.

Le théorème suivant nous sera utile par la suite

(0.2) THÉORÉME (Siu [15]). *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur un espace complexe général X,* $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. *Si X n'a aucune composante connexe compacte de dimension n, alors on a $H^q(X, \mathcal{F}) =$ 0 pour $q \geq n$.*

§1.

(1.1) THÉORÈME: *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace de Stein général; soit $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un sous-espace localement analytique de $(X, \mathcal{O}_X)$,* $\dim_{\mathbb{C}} X = n < \infty$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ soit de Stein est que $H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $1 \leq q \leq \dim_{\mathbb{C}} Y - 1$.

DÉMONSTRATION: Si $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un sous-espace de Stein, les groupes $H^q(Y, \mathcal{O}_Y)$ sont nuls pour $q \geq 1$ (Théorème B, cf. [6]).

Réciproquement, nous remarquons que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est holomorphiquement séparé et réalisable par des sections globales parce que $(X, \mathcal{O}_X)$ l'est aussi. Il suffit, donc, de démontrer que pour tout sous-ensemble infini discret et dénombrable $\{y_k\}_{k\geq 1}$ de Y il existe une section $\alpha \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ telle que

$$\sup_{k\geq 1} |[\alpha](y_k)| = \infty$$

Première partie. Supposons que $\{y_k\}_{k\geq 1}$ soit un sous-ensemble discret dans X. Comme $(X, \mathcal{O}_X)$ est holomorphiquement convexe il y a une section $S \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ telle que $\sup_{k\geq 1}|[S](y_k)| = \infty$. Désignons par $S_{|Y}$ la restriction de S à Y; plus précisément $S_{|Y}$ est la restriction à Y de la restriction de S à un sous-ensemble ouvert convenable de X.

On a

$$\sup_{k\geq 1} |[S_{|Y}](y_k)| = \sup_{k\geq 1} |[S]_{|Y}(y_k)| = \infty;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Deuxième partie. Nous allons démontrer que pour tout $w \in X \setminus Y$ il existe un nombre fini de sections $S_1, \ldots, S_m \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ telles que $[S_j](w) = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ et telles que pour chaque $y \in Y$ *on puisse choisir un indice* $j = j(y)$ pour lequel $[S_j](y) \neq 0$.

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre $\{[S_{|Y}] = [S]_{|Y} \mid S \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\}$. Comme X est de dimension finie il y a un nombre fini d'éléments de $\mathcal{A}$ qui séparent les points de X (cf. Gunning-Rossi [8]); nous les appelons $S_1, \ldots, S_m$.

On peut admettre qu'on a $[S_j](w) = 0$ pour $1 \leq j \leq m$. En effet, il suffit de remplacer chaque section S_j par une section $S'_j \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ telle que $[S'_j](x) = [S_j](x) - [S_j](w)$ pour tout $x \in X$. De plus, on peut supposer que

$$Z_{\mathcal{A}} = \{y \in Y \mid [S_j](y) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq m\}$$

est vide. En effet, puisque $[S_{1|Y}], \ldots, [S_{m|Y}]$ séparent les points de Y, $Z_{\mathcal{A}}$ contient tout au plus un point $Z_{\mathcal{A}} \supset \{a\}$. Il existe une section $T \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ telle que $[T](a) \neq [T](w)$. On peut, par conséquent, admettre que parmi les sections S_j se trouve une section $T' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ avec $[T'](x) = [T](x) - [T](w)$ pour tout $x \in X$.

Troisième partie. Conclusion.

Supposons qu'il existe un point $w \in \bar{Y} \backslash Y$, adhérent à l'ensemble $\{y_k\}_{k \geq 1}$. Au point w faisons correspondre les sections $S_1, \ldots, S_m$ definies dans la partie précédente.

Pour tout $y \in Y$ il existe $j = j(y)$, $1 \leq j \leq m$ tel que $[S_j](y) \neq 0$. Il résulte de l'hypothèse et du Théorème (0.2) que $H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $q \geq 1$; les conditions du Théorème (0.1) sont donc verifiées. Soit $s \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ tel que $[s] = 1$; on peut choisir $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ telles qu'on ait

$$\sum_{j=1}^{m} S_{j|Y} \alpha_j = s$$

et par conséquent

$$\sum_{j=1}^{m} [S_{j|Y}][\alpha_j] = 1$$

sur Y. On a pour tout $j = 1, \ldots m$

$$\lim_{k \to \infty} [S_{j|Y}](y_k) = 0;$$

par suite, une au moins des fonctions $[\alpha_j]$ n'est pas bornée dans l'ensemble $\{y_k\}_{k \geq 1}$.

c.q.f.d.

Soit X un espace complexe général et soit Y un sous-espace topologique de X, localement fermé; posons $U = X \backslash (\bar{Y} \backslash Y)$. Rappelons (cf. Grothendieck [7]) que si $\mathcal{O}_Y$ est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres locales, on dit que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un sous-espace annelé de $(X, \mathcal{O}_X)$ s'il existe un sous-faisceau d'idéaux $\mathcal{T}$ de $\mathcal{O}_U$ sur U tel que $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_U / \mathcal{T}_{|Y}$ et que, de plus, le support de $\mathcal{O}_U / \mathcal{T}$ soit Y (on n'exige pas que $\mathcal{T}$ soit de type fini).

La démonstration de (1.1) va nous servir à démontrer la remarque suivante.

(1.2) REMARQUE: *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace de Stein général*, $\dim_{\mathbb{C}} X = n < \infty$. *Soit $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un sous-espace annelé de $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $q \geq 1$.*

Alors pour tout sous-ensemble infini dénombrable et discret $\{y_k\}_{k \geq 1}$ de Y, il existe $\alpha \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ tel que

$$\sup_{k \geq 1} |[\alpha](y_k)| = \infty.$$

(1.3) THÉORÈME: *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace complexe général holomorphiquement séparé. Soit $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un sous-espace localement analytique de $(X, \mathcal{O}_X)$, $Y \subset\subset X$.*

Alors, pour que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ soit un espace de Stein il faut et il suffit que $H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $q \geq 1$.

DÉMONSTRATION: Nous pouvons supposer que on a $\dim_{\mathbb{C}} X < \infty$ et utiliser un raisonnement analogue à celui de la deuxième partie et de la troisième partie de (1.1).

c.q.f.d.

Sous des conditions très restrictives on peut donner des résultats de la forme précedente sans qu'il ne soit nécessaire d'exiger que l'espace ambiant X soit holomorphiquement séparé. Il faut donner tout d'abord une nouvelle définition. Soit Ω un ouvert d'un espace complexe général X; soit $\partial\Omega \neq \emptyset$ la frontière de Ω dans X. Disons que Ω a une *frontière de Stein* dans X quand tout $x \in \partial\Omega$ a un système fondamental de voisinages $\{U_j\}_{j \geq 1}$ tel que $U_j \cap \Omega$ est un ouvert de Stein pour tout $j \geq 1$.

(1.4) COROLLAIRE: *Soit X un espace complexe général et connexe*, $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$. *Soit $\Omega \subsetneq X$ un ouvert de X tel que $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.*

Alors Ω a une frontière de Stein dans X.

DÉMONSTRATION: Il suffit de vérifier que si B est un ouvert de Stein de X, il en est de même de $B \cap \Omega$.

D'après le Théorème (1.1) il suffit de vérifier que $H^1(B \cap \Omega, \mathcal{O}) = 0$.

Comme B est un ouvert de Stein on a $H^1(B, \mathcal{O}) = 0$; d'après le Théorème (0.2), $H^2(B \cup \Omega, \mathcal{O}) = 0$. La conclusion s'en déduit en rappelant la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\cdots \to H^1(B \cup \Omega, \mathcal{O}) \to H^1(B, \mathcal{O}) \oplus H^1(\Omega, \mathcal{O}) \to H^1(B \cap \Omega, \mathcal{O}) \to$$
$$\to H^2(B \cup \Omega, \mathcal{O}) \to \cdots \qquad \text{c.q.f.d.}$$

On va maintenant donner une extension partielle d'un théorème de Laufer [10] et de Siu [16], en appliquant de nouveau (1.1). Rappelons qu'un couple (D, λ) s'appelle un domaine étalé dans X, si D et X sont des variétés complexes et $\lambda : D \to X$ est une application localement biholomorphe.

(1.5) COROLLAIRE: *Soit* (D, λ) *un domaine étalé dans une variété de Stein* X, $\dim_{\mathbf{C}} X = n < \infty$. *Supposons D holomorphiquement séparé.*

Pour qu'un sous-espace analytique Y de D soit un espace de Stein il faut et il suffit que $H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ *pour* $1 \leq q \leq \dim_{\mathbf{C}} Y - 1$.

DÉMONSTRATION: Il suffit de montrer qu'on peut identifier D avec un sous-ensemble ouvert d'une variété de Stein S et ensuite d'appliquer le Théorème (1.1).

Nous savons (cf. Gunning–Rossi [8]) que (D, λ) a une enveloppe d'holomorphie (S, ψ) qui est un domaine étalé dans X, tel que S soit une variété de Stein. Il y a une application $\mu : D \to S$ localement biholomorphe telle que $\psi_0 \mu = \lambda$.

Puisque D est holomorphiquement séparé, μ est injective. On peut donc identifier D avec l'ouvert $\mu(D)$ de S.

c.q.f.d.

Récemment A. Markoe (cf. [11]) a énoncé le théorème suivant: si $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ est une suite croissante d'espaces de Stein telle que Ω_j soit ouvert dans Ω_{j+1} pour tout $j \geq 1$, une condition nécessaire et suffisante pour que $\bigcup_{j \geq 1} \Omega_j$ soit de Stein est que $H^1(\bigcup_{j \geq 1} \Omega_j, \mathcal{O}) = 0$; une deuxième condition équivalente est que $\{\Omega_j\}$ soit une "famille de Runge". Maintenant à partir de (1.1) et de (1.3) nous somme en mesure de démontrer les résultats (1.6), (1.7) qui sont de même nature, mais qui ont des hypothèses plus restrictives. La démonstration est (probablement) différente de celle indiquée par A. Markoe.

En effet (cf. Andreotti–Vesentini [2], Prop. (5.1a)) si $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ est une suite croissante d'ouverts d'un espace topologique paracompact X et si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens sur X tel que $H^q(\Omega_j, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et pour tout $j \geq 1$, on a $H^q(\bigcup_{j\geq 1} \Omega_j, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \geq 2$. Dans [17] V. Villani a démontré, au moyen de la formule de Künneth–Grothendieck, que si $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ est une suite croissante d'ouverts de Stein d'un espace complexe X et si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X, une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $H^1(\bigcup_{j\geq 1} \Omega_j, \mathcal{F}) = 0$ est que $H^1(\bigcup_{j\geq 1} \Omega_j, \mathcal{F})$ soit séparé.

En appliquant ces derniers résultats et le Théorème (1.1) on a

(1.6) COROLLAIRE: *Soit X un espace de Stein,* $\dim_{\mathbb{C}} X = n < \infty$. *Soit $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-espaces ouverts de Stein de X. Soit $\bigcup_{j\geq 1} \Omega_j = \Omega$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Ω est un ouvert de Stein;*

(2) $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$;

(3) *$H^1(\Omega, \mathcal{O})$ est séparé.*

(1.7) Un autre cas où (1.6) est valable est celui où X est holomorphiquement séparé et $\bar{\Omega}$ est compact (on n'exige pas que X soit de Stein). En effet, il suffit d'appliquer (1.3) à la place de (1.1).

Même si on suppose que X est un espace complexe général on peut montrer par nos méthodes l'équivalence des conditions (1) et (2) de (1.6) et de (1.7).

On va maintenant donner une nouvelle conséquence du Théorème (0.1) de A. Nagel.

(1.8) REMARQUE: *Soient X et Ω des espaces complexes. Soit $\alpha: \Omega \to X$ une application holomorphe. Supposons X holomorphiquement séparé,* $\dim_{\mathbb{C}} X = n < \infty$. *Soit $H^q(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$ pour $q \geq 1$.*

Alors, si $\alpha^*: \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ est surjective, $\alpha(\Omega)$ est un sous-ensemble fermé de X.

DÉMONSTRATION: Dénotons $\overline{\alpha(\Omega)}$ l'adhérence de $\alpha(\Omega)$ dans X. Soit z un point de $\overline{\alpha(\Omega)} \backslash \alpha(\Omega)$; l'existence de z conduit à une contradiction.

En effet, comme X est holomorphiquement séparé, il y a des fonctions $s_1, \ldots, s_m \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ telles que

$$\{z\} = \{x \in X \mid s_j(x) = 0 \quad \text{pour tout } j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Les fonctions $\alpha^*(s_j) = s_j \circ \alpha \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ n'ont pas de zéro commun dans Ω. D'après le Théorème (0.1) il existe des fonctions $g_1, \ldots, g_m \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ telles que $\Sigma_{j=1}^m g_j \cdot \alpha^*(s_j) = 1$.

Par hypothèse, pour chaque $g_j \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ il existe une fonction $h_j \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ telle que $\alpha^*(h_j) = g_j$. Soit $\{z_k\}_{k\geq 1}$ une suite de points de $\alpha(\Omega)$ convergente vers z. On a

$$\sum_{j=1}^m h_j(z_k)s_j(z_k) = 1$$

pour tout $k \geq 1$. Il s'ensuit qu'au moins une des fonctions $|h_j|$ n'est pas bornée sur la suite $\{z_k\}_{k\geq 1}$; cela contredit la définition des h_j.

c.q.f.d.

Si Ω est un espace complexe $(0,0)$-convexe-concave, tel que prof $\mathcal{O}_\Omega \geq 3$, on peut identifier Ω avec un sous-ensemble ouvert d'un espace de Stein X et l'application de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ est une bijection (cf. Andreotti-Siu [1]). En vertu de (1.8) il s'ensuit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace complexe connexe Ω tel que $\dim_{\mathbb{C}} \Omega < \infty$ et prof $\mathcal{O}_\Omega \geq 3$, soit de Stein est que Ω soit $(0,0)$-convexe-concave et que pour tout $q \geq 1$ on ait $H^q(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$.

§2.

Soit X un espace complexe; Z soit un sous-ensemble fermé de X. Rappellons que la $\mathbb{C}$-algèbre $\Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ est identifiée à la limite inductive de la famille $\{\Gamma(A, \mathcal{O}_X)\}$ lorsque A parcourt le système inductif des ouverts de X contenants Z. On munit $\Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ de la topologie de la limite inductive.

On désigne par

$$\mathrm{Sp}\, Z$$

l'ensemble des homomorphismes non nuls et continus de la $\mathbb{C}$-algèbre $\Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ à valeurs complexes. Pour tout $z \in Z$ on désigne par ${}_Z\xi_z : \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z}) \to \mathbb{C}$ l'homomorphisme qui à toute $f \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ associe ${}_Z\xi_z(f) = f(z)$. On a ainsi défini une application

$${}_Z\xi : Z \to \mathrm{Sp}\, Z$$

qui à tout $z \in Z$ associe ${}_Z\xi_z$. Lorsque on a $X = Z$, on munit $\mathrm{Sp}\, Z =$

Sp X de la topologie la moins fine telle que pour toute $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ l'application $\hat{f}: \mathrm{Sp}\, X \to \mathbb{C}$ définie, pour $\varphi \in \mathrm{Sp}\, X$, par $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$, soit continue. L'application ${}_Z\xi$ est continue.

(2.1) PROPOSITION: *Soit X un espace complexe; Z soit un sous-ensemble fermé de X, séparé par $\Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$. Supposons $H^q(Z, \mathcal{O}_{X|Z}) = 0$ pour $q \geq 1$.*

(a) (Nagel [12]) *Soient $s_1, \ldots, s_m \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ des fonctions qui séparent les points de Z. Soit $\varphi: \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z}) \to \mathbb{C}$ un homomorphisme $\neq 0$ de $\mathbb{C}$-algèbres. Il existe, alors, un point w déterminé d'une manière unique tel que $\varphi = {}_Z\xi_w$.*

(b) *Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de type fini de $\Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$. Il existe un point w determiné d'une manière unique tel que $\mathcal{M} = \mathrm{Ker}\, {}_Z\xi_w$.*

DÉMONSTRATION:

(a) Quitte à remplacer les s_j par des fonctions qui séparent, elles aussi, les points de Z, on peut admettre que

$$\varphi(s_j) = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq m.$$

Si pour tout $z \in Z$ il y a un indice $j = j(z)$ tel que $s_j(z) \neq 0$, il résulte de (0.1) qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ telles que $\Sigma_{j=1}^m \alpha_j s_j = 1$. Par conséquent on a $\varphi(1) = 0$, relation qui contredit la condition $\varphi \neq 0$.

Comme $s_1, \ldots, s_m$ séparent les points de Z, il existe alors $w \in Z$ tel que pour tout $z \in Z \backslash \{w\}$ il y a un indice $j = j(z)$ tel que $s_j(z) \neq 0$ et que $s_j(w) = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Supposons donnée une fonction $h \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ telle que $h(w) \neq 0$. En appliquant (0.1) à la famille $\{s_1, \ldots, s_m, h\}$ on a, de nouveau, une contradiction.

Il s'ensuit que $h(w) = 0$ pour toute $h \in \mathrm{Ker}\, \varphi$. Pour toute $f \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ on a $f - \varphi(f) \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ et par conséquent $f(w) = \varphi(f)$, c'est-à-dire $\varphi = {}_Z\xi_w$.

(b) Ecrivons

$$M = \{z \in Z \mid h(z) = 0 \quad \text{pour toute } h \in \mathcal{M}\}.$$

Il suffit de démontrer qu'il existe $w \in Z$ tel que $M = \{w\}$.

En effet, s'il en est ainsi, on a $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ker}\, {}_Z\xi_w \subsetneq \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ et par conséquent on a $\mathcal{M} = \mathrm{Ker}\, {}_Z\xi_w$. Alors, w est determiné d'une manière unique.

Supposons M vide. Comme $\mathcal{M}$ est de type fini, d'après (0.1) on aura l'égalité $\mathcal{M} = \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ contrairement à l'hypothèse.

Supposons que M contienne deux points a, b, $a \neq b$. Soient f, $g \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$ telles que $f(a) \neq 0$, $f(b) = 0$, $g(a) = 0$, $g(b) \neq 0$. On a $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M} + (f) \subsetneq \Gamma(Z, \mathcal{O}_{X|Z})$; en effet, $f \notin \mathcal{M}$, $g \notin \mathcal{M} + (f)$. Nous avons ainsi une nouvelle contradiction. Par conséquent l'existence du point w cherché, est démontrée.

c.q.f.d.

(2.2) Une application de (2.1): Au moyen de la Proposition (2.1) nous allons donner une démonstration de (1.1) et de (1.3) qui diffère un peu de la démonstration donnée auparavant, en supposant cette fois X, Y réduits.

Il est bien connu (cf. Rossi [13]) que si Z est un espace complexe et si l'application ${}_Z\xi : Z \to \operatorname{Sp} Z$ est un homéomorphisme, alors Z est un espace de Stein.

Aussi bien dans les hypothèses de (1.1) que dans les hypothèses de (1.3) on sait qu'il y a des fonctions $s_1, \ldots, s_m \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ qui séparent les points de Y. D'après (2.1a) il s'ensuit que l'application

$${}_Y\xi : Y \to \operatorname{Sp} Y$$

est bijective et continue.

Avec les notations et les hypothèses de (1.1) et de (1.3), il suffit alors de prouver que si $\eta = {}_Y\xi_y \in \operatorname{Sp} Y$ et si $\{{}_Y\xi_{y_j}\}_{j\geq 1}$ est une suite convergente vers η dans $\operatorname{Sp} Y$, alors $\{y_j\}_{j\geq 1}$ converge vers y dans Y.

Supposons que $\{y_j\}_{j\geq 1}$ ne converge pas vers y.

Il existe, alors, un voisinage U de y dans X et une sous-suite $\{y_{j_i}\}_{i\geq 1}$ de $\{y_j\}_{j\geq 1}$ tels que $y_{j_i} \notin U$ pour tout $i \geq 1$. On ne peut extraire de $\{y_{j_i}\}_{i\geq 1}$ aucune sous-suite $\{z_t\}_{t\geq 1}$ convergente dans X. En effet, supposons qu'il y ait une telle suite; d'après la relation $\lim_{t\to\infty} {}_Y\xi_{z_t} = \lim_{j\to\infty} {}_Y\xi_{y_j} = {}_Y\xi_y$ il s'ensuit que $\lim_{t\to\infty} {}_X\xi_{z_t} {}_X\xi_y$. Si $\{z_t\}_{t\geq 1}$ converge donc vers un point $w \in X$, on a ${}_X\xi_w = {}_X\xi_y$ et, par suite, $w = y$, ce qui contredit le choix de U.

Supposons verifiées les conditions de (1.3). Rappelons que $\bar{Y}$ est compact; on peut donc extraire de $\{y_{j_i}\}_{i\geq 1}$ une suite convergente dans X. En vertu du précédent raisonnement, (1.3) est démontré.

Supposons vérifiées les conditions de (1.1). Il existe $g \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_{X\|Y})$ telle que $\sup_{i\geq 1} |g(y_{j_i})| = \infty$. Rappelons que

$$V_g = \{\varphi \in \operatorname{Sp} Y \mid |\varphi(g) - {}_Y\xi_y(g)| < 1\}$$

est un voisinage de ${}_Y\xi_y$ dans $\operatorname{Sp} Y$. Il existe donc un entier p tel que

$j \geq p$ implique

$$_Y\xi_{y_j} \in V_g.$$

Pour $i \geq p$ on a donc $|g(y_{j_i}) - g(y)| < 1$, ce qui contredit le choix de g.

Il s'ensuit, cette fois encore, que la suite $\{y_j\}_{j\geq 1}$ converge vers y; (1.1) est démontré.

Rappelons une définition de Harvey-Wells [9].

(2.3) DÉFINITION: *Soit K un sous-ensemble compact d'une variété de Stein X. On dit que K est holomorphiquement convexe si l'application $_K\xi : K \to \mathrm{Sp}\, K$ est bijective.*

On connaît plusieurs caractérisations des compacts holomorphiquement convexes. En particulier, dans [9] on démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble K d'une variété de Stein soit holomorphiquement convexe est que le Théorème B soit vérifié pour tout faisceau $\mathcal{O}_{X|K}$-cohérent sur K.

En vertu de (2.1) on a donc le Théorème

(2.4) THÉORÈME: *Soit K un sous-ensemble compact d'une variété de Stein X, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) *K est holomorphiquement convexe;*

(2) *$H^q(K, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et pour tout faisceau $\mathcal{O}_{X|K}$-cohérent $\mathcal{F}$;*

(3) *$H^q(K, \mathcal{O}_{X|K}) = 0$ pour tout $q \geq 1$.*

DÉMONSTRATION: L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$(2) est démontrée dans [9]. L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est évidente. L'implication (3) $\Rightarrow$ (2) s'ensuit en appliquant la Proposition (2.1).

c.q.f.d.

En vertu de (2.4) et d'un théorème de [2] (la Prop. (5.1a) que nous avons employée dans la démonstration de (1.6)), nous avons le corollaire suivant:

(2.5) COROLLAIRE: Soit $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-ensembles compacts holomorphiquement convexes d'une variété de Stein X; $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ pour tout $j \geq 1$ ($\mathring{K}_{j+1}$ est, ici, l'intérieur de K_{j+1} dans K). Supposons que $K = \bigcup_{j\geq 1} K_j$ soit compact.

Une condition nécessaire et suffisante pour que K soit holomorphiquement convexe est que $H^1(K, \mathcal{O}_{X|K}) = 0$.

Donnons, maintenant, un nouveau corollaire de (2.1).

(2.6) DÉFINITION: Soit Ω un ouvert d'un espace complexe X. On dit que Ω es *un ouvert d'holomorphie* si pour tout domaine D, $\varphi \neq D \subset \Omega$ et pour tout domaine D', $D \subset D' \not\subset \Omega$ il y a une fonction $f \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ telle que pour toute $g \in \Gamma(D', \mathcal{O}_X)$ on ait $f_{|D} \neq g_{|D}$.

(2.7) COROLLAIRE: *Soit X un espace complexe irréductible et holomorphiquement séparé,* $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. *Soit Ω un ouvert de X tel que* $H^q(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$ *pour* $1 \leq q \leq n-1$. *Alors Ω est un ouvert d'holomorphie.*

DÉMONSTRATION: Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il y ait deux domaines $D \subset D'$ de X, $D \subset \Omega$, $D' \not\subset \Omega$ tels que à toute $f \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ soit associée une fonction $f' \in \Gamma(D', \mathcal{O}_X)$, $f_{|D} = f'_{|D}$.

Soit $z \in \partial\Omega \cap D'$. Comme la fonction f' est determinée de manière unique, on peut définir l'application $\varphi: \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) \to \mathbb{C}$

$$\varphi(f) = f'(z);$$

où φ est un homomorphisme d'algèbres.

On sait (cf. [8]) que il y a $2n+1$ fonctions holomorphes $s_1, \ldots, s_{2n+1}$ qui séparent les points de X. D'après le Théorème (2.1a), il existe un point $w \in \Omega$ tel que $\varphi = {}_\Omega\xi_w$. Soit F une fonction holomorphe sur X telle que $F(z) \neq F(w)$. On a $(F_{|\Omega})' = F_{|D'}$ et, par suite

$$F(w) = {}_\Omega\xi_w(F_{|\Omega}) = \varphi(F_{|\Omega}) = F(z);$$

une contradiction.

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI and Y.-T. SIU: Projective Embedding of Pseudo-concave Spaces. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XXIV* (1970) 231–278.

[2] A. ANDREOTTI and E. VESENTINI, *Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets*, "Seminaire Ehresmann", *4*, 1–31, Paris 1962–63.

[3] C. BĂNICĂ and O. STĂNĂSILĂ, Sur les ouverts de Stein dans un espace complexe, *C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268* (1969) 1024–1027.

[4] H. BEHNKE and K. STEIN, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, *47*, (1937) 177–192.

[5] H. CARTAN, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, *C.R. Acad. Sc. Paris, t. 199* (1934) 1284–1287.

[6] H. GRAUERT, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. I.H.E.S., *5*, Paris, 1960.

[7] A. GROTHENDIECK, *Techniques de construction en géométrie analytique.*"Seminaire H. Cartan", *13*, Paris, 1960–61.

[8] R.C. GUNNING and H. ROSSI, *Analytic Functions of Several Complex Variables.* Prentice-Hall, N.J., 1965.

[9] R. HARVEY and R.O. WELLS, JR., Compact holomorphically convex subsets of a Stein manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *136*, (1969) 509–516.

[10] H.B. LAUFER, On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy, *Ann. of Math.*, *84*, (1966) 102–118.

[11] A. MARKOE, Runge Families and increasing Unions of Stein Spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. 82, No. 5*, (1976) 787–788.

[12] A. NAGEL, Cohomology, maximal ideals, and point evaluations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, *42* (1974) 47–50.

[13] H. ROSSI, On Envelops of Holomorphy, *Comm. Pure Appl. Math.*, *XVI*, (1963) 9–17.

[14] J.P. SERRE, *Quelques problèmes relatifs aux variétés de Stein*, Coll. sur les fonct. de plus var., 57–68, Bruxelles, 1953.

[15] Y.-T. SIU, Analytic sheaf cohomology groups of dimension n of n-dimensional complex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *143* (1969) 77–94.

[16] Y.-T. SIU, Non-Countable Dimensions of Cohomology of Analytic Sheaves and Domains of Holomorphy, *Math. Zeitschr. 102*, (1967) 17–29.

[17] V. Villani, Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi, *Atti Accad. Naz. Lincei*, *XLIII*, (1967) 168–170.

(Oblatum 27-I-1977)

Istituto di Geometria
Piazza di Porta San Donato, 5
Università di Bologna (Italy)