COMPOSITIO MATHEMATICA

L. GUILLOU
H. HÄHL

Les voisinages réguliers ouverts : critères homotopiques d'identification

Compositio Mathematica, tome 32, nº 2 (1976), p. 133-156
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1976__32_2_133_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 32, Fasc. 2, 1976, pag. 133–156
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

LES VOISINAGES REGULIERS OUVERTS: CRITERES HOMOTOPIQUES D'IDENTIFICATION

L. Guillou et H. Hähl

Introduction

Cet article s'enchaîne avec deux autres articles [19], [20],[1] qui ont développé la notion de voisinage ouvert régulier d'un sous-espace X d'un espace topologique Y. Notre but présent est d'obtenir des critères de nature *homotopique* permettant d'identifier ces voisinages réguliers lorsqu'on sait qu'il en existe.

De nombreux problèmes classiques trouvent là un cadre naturel. Par exemple, si M est une variété compacte sans bord ayant le type d'homotopie d'une sphère S^n, démontrer la conjecture (généralisée) de Poincaré revient à reconnaître M-point comme voisinage régulier d'un autre point de M. Le théorème de Stallings sur le dénouement topologique des sphères s'interprète similairement [2]. On voit donc que nos théorèmes auront probablement un rôle unificateur plutôt que fécond, les principales applications en étant depuis longtemps épuisées. (Reste bien sûr l'espoir de quelques autres).

La stratégie adoptée pour démontrer de tels théorèmes est de vérifier un critère élémentaire d'identification par absorption des compacts [19, 4.2]. Naturellement on va vérifier ce critère par engouffrement ce qui nous contraint à supposer que $Y - X$ est une variété topologique de dimension $\neq 4$ (pour le cas de dimension $\leqq 3$, voir l'appendice). Une autre possibilité serait de déduire les critères d'identification des critères d'existence (cf. l'appendice), mais malheureusement tous les résultats de [20] comportent

[1] Pour un résumé, voir [18]. Excepté dans l'appendice, on n'utilisera pas [20].

[2] Par exemple le théorème 2.1 donne immédiatement un critère de dénouement des cordes (R^{n+2}, Y) avec $Y \approx R^n$, pour $n \geqq 3$. (Ceci a été obtenu par S. Ichiraku et M. Kato [9, corollary 3] pour $n \geqq 4$, avec des méthodes différentes.)

l'hypothèse X compact. La première stratégie, outre qu'elle n'utilise pas les résultats de [20], a l'avantage de nous permettre de traiter le *cas où X est non-compact*. De plus elle offre une occasion de montrer l'utilité des entourages à complément régulier introduits dans [19, § 3].

Voici un théorème échantillon (cf. [18, 3.1]) pour le cas compact (le cas non compact exigeant quelques définitions, voir § 1).

THÉORÈME: *Soient Y un* ENR *et X un compact de Y tels que $Y-X$ soit une variété topologique connexe sans bord de dimension > 4. Supposons que pour tout voisinage U de X, l'inclusion $U-X \hookrightarrow U$ soit une 1-équivalence. Supposons aussi que X admette des voisinages I-réguliers dans Y. Alors Y est un voisinage I-régulier de X si et seulement si*

(i) *L'inclusion $X \hookrightarrow Y$ est une équivalence fondamentale (au sens de Borsuk, cf.* [2], [5], [10]).

(ii) *Pour tout compact K de Y, il existe un compact L, $K \subset L \subset Y$, tel que pour $i = 0, 1$ l'application (induite par l'inclusion)*

$$i_*: \pi_i(Y-L) \to \pi_i(Y-K)$$

vérifie $\operatorname{Im} i_* \cong \pi_i(Y)$ *(par inclusion) chaque fois que l'on choisit le point base dans une composante connexe de $Y-L$ d'adhérence non compacte.*

L'objet principal de cet article est le théorème d'identification 2.1 qui est une généralisation du théorème précédent évitant de supposer X compact ou Y ENR. La formulation des conditions qui remplacent (i) et surtout (ii) à ce niveau de généralité est un point assez délicat. Sa démonstration constitue le § 2; elle calque dans ses grandes lignes celle de [16, theorem 4.1] et se compose d'une partie géométrique (2.5 à 2.7) qui utilise des arguments d'engouffrements (appuyés sur un lemme non trivial de triangulation [15, p. 224]) et la notion d'anti-gigogne, et d'une partie algébrique (2.8 à 2.13) qui établit les conditions homotopiques nécessaires aux engouffrements.

Le § 3 expose (en 3.1) une forme simplifiée du théorème 2.1 pour les grandes codimensions. C'est une version topologique d'un théorème établi pour les catégories PL et DIFF dans [15, § 2.1 et 2.2] (mais par des méthodes différentes). On y donne aussi (en 3.3) une forme simplifiée du théorème 2.1 lorsque X est compact.

Dans le § 1 on a regroupé quelques définitions et propositions de nature homotopique. Les énoncés 1.1 à 1.5 suffisent pour lire le § 2, les énoncés 1.6 à 1.7 permettent ensuite de déduire les résultats du § 3 de ceux du § 2.

Enfin dans l'appendice on expose une démonstration alternative du

théorème 2.1 lorsque X est compact et Y localement compact, et on fait quelques remarques sur les cas où $Y-X$ est de dimension $\leqq 3$.

C'est avec grand plaisir que nous remercions L. Siebenmann de nous avoir longuement expliqué ses méthodes et ses idées et d'avoir ensuite contribué à la formulation du théorème général 2.1.

0. Terminologie et rappels

Homotopies et isotopies particulières

Dans ce texte, on considérera souvent des homotopies et des isotopies qui partent de l'identité ou d'une inclusion. Plus précisément, si F est un sous-espace d'un espace topologique E et si I désigne l'intervalle $[0, 1]$, nous entendons par une *homotopie de F dans E* une famille $\{h_t | t \in I\}$ d'applications de F dans E telles que h_0 soit l'inclusion $F \hookrightarrow E$ et que l'application $h: F \times I \to E \times I$ définie par $h(x, t) = (h_t(x), t)$ soit continue. Lorsque $F = E$, la famille $\{h_t\}$ sera simplement appellée *homotopie de E*. Une *isotopie de E* sera une homotopie $\{h_t\}$ de E telle que h est un homéomorphisme. On dit que l'homotopie $\{h_t\}$ *fixe* le sous-ensemble A de F, si $h_t|A = \mathrm{id}|A$ pour tout $t \in I$. Le *support* de $\{h_t\}$ est par définition l'adhérence de $\{x \in F | \exists t \in I: h_t(x) \neq x\}$ dans E.

On a des définitions analogues si I est remplacé par un intervalle $[0, r)$ ou $[0, r]$ quelconque avec $0 \leqq r \leqq \infty$. Lorsque rien n'est précisé, l'intervalle utilisé sera I.

Voisinages réguliers

Il sera essentiel de bien retenir les notions suivantes (cf. [18], [19]) relatives à un sous-espace X d'un espace topologique Y.

Soient U et V deux sous-ensembles de Y et W un voisinage de X dans Y. Une isotopie $\{h_t\}$ de Y fixant $Y-U$ et un voisinage de X dans Y telle que $h_1(V) \subseteq W$ est appelée une *I-compression* (= compression par isotopie) *de V jusque dans W fixant $Y-U$*. On dit que V est *I-compressible vers X dans U* – et on écrit $V \searrow X(U)$ – si pour tout voisinage W de X dans Y il existe une I-compression de V jusque dans W fixant $Y-U$.

Une *I-gigogne* de (Y, X) est une suite croissante

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$$

de voisinages de X dans Y telles que $E_i \searrow X(E_{i+1})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Un voisinage ouvert E de X dans Y est *I-régulier*, s'il existe une I-gigogne $\{E_i\}$ telle que $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Une *anti-I-gigogne* de (Y, X) est une suite décroissante

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

de voisinages de X dans Y telles que $E_{i+1} \searrow X(E_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. L'intersection $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ d'une telle anti-I-gigogne s'appelle un *entourage de X à complément I-régulier dans Y.* Si A est lui-même un voisinage de X dans Y, on dit que A est un *voisinage de X à complément I-régulier dans Y.*

On vérifie facilement (cf. [19, 1.6]) que X admet des voisinages I-réguliers dans Y si et seulement si le couple (Y, X) vérifie

I-AXIOME: Pour tout voisinage U de X dans Y, il existe un voisinage V de X tel que $V \searrow X(U)$.

On utilisera de manière essentielle le facile (cf. [19, 4.2 et 1.7]):

CRITERE D'ABSORPTION DES COMPACTS: *Supposons que (Y, X) vérifie l'I-axiome et que $Y - X$ soit σ-compact.*

Alors Y tout entier est un voisinage I-régulier de X si et seulement si il existe un voisinage I-régulier E de X dans Y et un voisinage V de X dans Y tel que pour tout compact K de Y il existe un homéomorphisme de Y sur lui-même qui est l'identité sur V et applique K dans E.

Enfin, si A est une partie de X et U un voisinage de A dans Y, un *pseudo-pincement de (Y, X) autour de A dans U* est une homotopie $\{h_t\}$ de Y telle que:

(i) $\{h_t\}$ fixe $(Y - U) \cup X$

(ii) pour tout $\tau \in (0, 1)$ la famille $\{h_t | t \in [0, \tau]\}$ est une isotopie

(iii) $h_1^{-1}(X)$ est un voisinage de A dans Y.

On considère la propriété

$P'(A)$: Pour tout voisinage U de A dans Y il existe un pseudo-pincement de (Y, X) autour de A dans U.

On sait alors que sous des hypothèses assez larges, si on a $P'(x)$ pour tout $x \in X$ alors (Y, X) vérifie l' I-axiome (cf. [19, 5.4]).

HYPOTHÈSE GÉNÉRALE: Pour toute la suite du texte, Y désignera un espace topologique et X un sous-espace *fermé* de Y.

1. Une étude de conditions homotopiques

1.1. DÉFINITIONS:

(i) Soit Z un sous-ensemble de Y.
On dit Z *atteint l'infini* de (Y, X) si pour tout compact K de Y et tout sous-ensemble A de Y contenant X et tel que $A \searrow X(Y)$, on a $Z \cap (Y-K-A) \neq \emptyset$.

(ii) Soient $A \subset B$ des sous-ensembles de Y contenant X.
Soient $K \subset L$ des compacts de Y. Alors, pour $i \in \mathbb{N}$, on considère les affirmations suivantes:

$\prod_i(B, A; L, K)$

L'application $j_*: \pi_i(Y-B-L) \to \pi_i(Y-A-K)$ induite par l'inclusion satisfait à $\operatorname{Im} j_* \cong \pi_i(Y-X)$ (par inclusion) pour $i \geqq 1$, chaque fois que l'on choisit le point base dans une composante connexe par arcs de $Y-B-L$ qui atteint l'infini.

$\prod_i(B, A)$

Pour tout compact K de Y, il existe un compact L de Y contenant K tel que $\prod_i(B, A; L, K)$ soit satisfaite.

$\forall \prod_i$

Dans tout voisinage U de X, il existe des voisinages $A \subset B \subset U$ de X qui vérifient $\prod_i(B, A)$.

1.2. DÉFINITION: Un couple $A \subset B$ de voisinages fermés de X dans Y est dit *couple excellent* si A et B sont des entourages à complément I-régulier de X dans Y (voir [19, 3.1]), et si $A \searrow X(B)$, $B \searrow X(Y)$. (On remarque que $B \searrow X(Y)$ est déjà conséquence de la première condition).

1.3. REMARQUES: Supposons que (Y, X) satisfasse à l' I-axiome et que Y soit normal.

(i) Si A est un voisinage de X dans Y à complément I-régulier (ce qui entraîne $A \searrow X(Y)$), alors il existe un entourage B de X à complément I-régulier contenant A tel que $A \subset B$ soit un couple excellent (utiliser une anti-I-gigogne $\mathfrak{Z}$ telle que $A = \bigcap \mathfrak{Z}$ et [19, 3.3.i]). En particulier il existe des couples excellents.

(ii) Si $A \subset B$ est un couple excellent, alors $Y-B \hookrightarrow Y-A$ est une équivalence d'homotopie (utiliser [19, 3.6]).

1.4. PROPOSITION: – *Pour $i \in \mathbb{N}$, la condition $\forall \prod_i$ implique la suivante: 'Pour tout couple $A_1 \subset B_1$ de voisinages de X dans Y tels que $A_1 \searrow X(B_1)$ et $B_1 \searrow X(Y)$ on a $\prod_i(B_1, A_1)$'. – Si Y est normal et si (Y, X) satisfait à l' I-axiome ces deux conditions sont équivalentes.*

PREUVE: La deuxième assertion découle de la première et de 1.3(i). Démontrons la première. Soit donc un couple $A_1 \subset B_1$ comme dans l'énoncé. Par hypothèse il existe un couple $A \subset B$ de voisinages de X avec $B \subset B_1$ qui vérifie $\prod_i(B, A)$. Soit donné un compact K_1, alors, utilisant les hypothèses de compressibilité de A_1 et B_1 on trouve des compacts $K_1 \subset K \subset L_1 \subset L$ et des isotopies $\{F_t\}$, $\{G_t\}$ de Y tels que

(i) $F_1(A_1) \subset A$, $F_t(K_1) \subset K$; $\{F_t\}$ est à support dans B_1 et fixe X;
(ii) $G_1(B_1) \subset B$, $G_t(L_1) \subset L$; $\{G_t\}$ fixe X;
ceci pour $t \in I = [0, 1]$.
(iii) les affirmations $\prod_i(B, A; L_1, K)$ et $\prod_i(B, A; L, L_1)$ sont vérifiées.

On va vérifier l'affirmation $\prod_i(B_1, A_1; L_1, K_1)$ (en choisissant le point base considéré en homotopie hors du support de $\{G_t\}$).

D'après (iii), tout élément de $\pi_i(Y-X)$ peut être représenté par une application continue $\alpha: S^i \to Y-B-L$. Alors par (ii), $\{G_t^{-1} \circ \alpha\}$ est une homotopie de α à un représentant d'un élément de $\pi_i(Y-B_1-L_1)$. Ceci montre que la flèche $\pi_i(Y-B_1-L_1) \to \pi_i(Y-X)$ induite par inclusion est surjective.

D'autre part, soit α un représentant d'un élément de $\pi_i(Y-B_1-L_1)$ homotope à zéro dans $Y-X$. D'après (iii) et puisque

$$Y-B_1-L_1 \subset Y-B-L_1,$$

α est homotope à l'application constante dans $Y-A-K$ disons par une homotopie $\{\varphi_t\}$. Alors $\{F_1^{-1} \circ \varphi_t\}$ est, d'après (i), une homotopie dans $Y-A_1-K_1$ de α à l'application constante. Ce qui conclut.

1.5. PROPOSITION: *Supposons que X soit un G_δ-ensemble de l'espace normal Y tel que $Y-X$ soit localement compact et satisfasse au principe de prolongement des isotopies* (cf. [19, 4.4], [17, 6.5]). *Supposons de plus que Y soit un voisinage I-régulier de X. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, (Y, X) a la propriété $\forall \prod_i$.*

PREUVE: Dans tout voisinage U de X il existe des couples excellents $A \subset B$ et pour un tel couple, l'affirmation $\prod_i(B, A)$, $i \in \mathbb{N}$, est une conséquence immédiate de l'

AFFIRMATION: *Pour tout compact K de Y il existe des compacts L et L' de Y avec $K \subset L \subset L'$, un voisinage fermé B' de X dans Y à complément I-régulier et contenant B, et des applications f et g qui rendent le diagramme suivant commutatif à homotopie près:*

$$\begin{tikzcd}
Y-B'-L' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Y-B' \arrow[d, hook, "\simeq"] \arrow[dl, "g"'] \\
Y-B-L \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Y-B \arrow[d, hook, "\simeq"] \arrow[dl, "f"'] \\
Y-A-K \arrow[r, hook] & Y-X
\end{tikzcd}$$

(*D'après* [19, 3.8], $Y-B' \hookrightarrow Y-B$ *et* $Y-B \hookrightarrow Y-X$ *sont des équivalences d'homotopie*).

PREUVE DE L'AFFIRMATION: Puisque Y est un voisinage I-régulier de X et que $A \searrow X(B)$ on peut trouver une isotopie $\{h_t\}$ de Y qui fixe A et telle que $h_1(K) \subset B$ (voir [19, 4.2]). En utilisant le principe de prolongement des isotopies (par exemple comme en [19, 5.8]) on peut supposer de plus que l'isotopie a un support compact C. Soient $L = K \cup C$ et $f = h_1^{-1}|Y-B : Y-B \to Y-A-K$. Alors f convient. Soit B' un entourage fermé de X dans Y à complément I-régulier et contenant B tel que $B \subset B'$ soit un couple excellent (cf. 1.3(i)). Le raisonnement précédent appliqué à B, B', L à la place de A, B, K donne le compact L' et la flèche g (à la place de L et f).

Les définitions qui précèdent suffisent pour la démonstration du théorème 2.1 (§ 2) qui est une réciproque partielle à la facile proposition précédente. Les résultats qui suivent ne seront utilisés que pour la démonstration des théorèmes 3.1 et 3.3 (§ 3).

Ils examinent les liens entre les conditions $\prod_i(X, X)$ et $\forall\prod_i$. Il est clair que si X a des voisinages compacts dans Y ces deux conditions sont équivalentes.

1.6. PROPOSITION: *Supposons que Y soit localement compact, σ-compact, et que pour tout $x \in X$, la condition $P'(x)$* (cf. [19, 5.2] *et* § 0) *soit satisfaite. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(a) $\prod_i(X, X)$

(b) $\forall\prod_i$

(c) *Il existe un couple excellent $A \subset B$ tel que $\prod_i(B, A)$ soit satisfaite.*

PREUVE: (a) $\Rightarrow$ (b): Soit $A \subset B$ un couple excellent (il en existe dans tout voisinage de X, cf. 1.3(i)); soit K un compact de Y. Il faut trouver un compact L de Y contenant K tel que $\prod_i(B, A; L, K)$ soit vérifiée. En utilisant [19, 5.13], des compressions de A (fixant $Y-B$) et de B,

et $\prod_i(X, X)$, on trouve successivement une famille d'isotopies $\{F_t^W\}$ de Y (indexée par tous les voisinages W de X dans Y) et un compact $K' \supset K$, puis un compact $L \supset K'$, puis une seconde famille d'isotopies $\{G_t^W\}$ de Y et un compact $L' \supset L$ tels que:

(i) $F_1^W(A) \subset W$; $F_t^W(K) \subset K'$; $\{F_t^W\}$ fixe $(Y-B) \cup X$;
(ii) $G_1^W(B) \subset W$; $G_t^W(L) \subset L'$; $\{G_t^W\}$ fixe X et le complément d'un voisinage de X I-compressible vers X et indépendant de W;
ceci pour tout $t \in I$ et tout voisinage W de X dans Y.
(iii) Les affirmations $\prod_i(X, X;\ L, K')$ et $\prod_i(X, X; L', L)$ sont vérifiées.

On choisit le point base considéré en homotopie hors du support de $\{G_t^W\}$ pour tout voisinage W de X dans Y. On va maintenant démontrer $\prod_i(B, A; L, K)$.

Soit α le représentant d'un élément de $\pi_i(Y-X)$. D'après (iii) on peut supposer que α est une application continue $S^i \to Y-X-L'$. Soit W un voisinage de X qui ne rencontre pas l'image de α. Alors par (ii), $\{(G_t^W)^{-1} \circ \alpha\}$ est une homotopie dans $Y-X$ de α à un représentant d'un élément de $\pi_i(Y-B-L)$. Ceci montre que la flèche

$$\pi_i(Y-B-L) \to \pi_i(Y-X)$$

induite par l'inclusion est surjective.

Il reste à démontrer que, si α est le représentant d'un élément de $\pi_i(Y-B-L)$ homotope à zéro dans $Y-X$, alors α est en fait déjà homotope à zéro dans $Y-A-K$. Mais d'après (iii), α est homotope à zéro dans $Y-X-K'$; soit donc $\{\varphi_t\}$ une homotopie de α à l'application constante dans $Y-X-K'$. Soit W un voisinage de X qui ne rencontre pas l'image de cette homotopie. Alors, d'après (i), $\{(F_1^W)^{-1} \circ \varphi_t\}$ donne une homotopie dans $Y-A-K$ de α à l'application constante.

(b) $\Rightarrow$ (c): D'après 1.3 (i) il existe un couple excellent. On lui applique 1.4.

(c) $\Rightarrow$ (a): Soit $A \subset B$ un couple excellent qui vérifie $\prod_i(B, A)$. Soit K un compact de Y. Il faut trouver un compact $L \supset K$ de Y tel que $\prod_i(X, X; L; K)$ soit satisfaite. En utilisant [19, 5.13] et des compressions de B, on trouve une famille d'isotopies $\{G_t^W\}$ de Y (indexée par les voisinages W de X dans Y) et des compacts $L \supset K' \supset K$ de Y tels que:

(i) $G_1^W(B) \subset W$; $G_t^W(K') \subset L$; $\{G_t^W\}$ fixe X et le complément d'un voisinage de X I-compressible vers X et indépendant de W (ceci pour tout $t \in I$ et tout voisinage W de X dans Y)
(ii) $\prod_i(B, A; K', K)$ soit vérifiée.

On choisit le point base considéré en homotopie hors du support de $\{G_t^W\}$ pour tout voisinage W de X.

La surjectivité de la flèche $\pi_i(Y-X-L) \to \pi_i(Y-X)$ est alors évidente puisque, par $\prod_i(B, A)$, $\pi_i(Y-A-L) \to \pi_i(Y-X)$ est déjà surjective. Pour prouver $\prod_i(X, X; L, K)$, il reste donc à montrer que si α est le représentant d'un élément de $\pi_i(Y-X-L)$ homotope à zéro dans $Y-X$, alors α est déjà homotope à zéro dans $Y-X-K$. Soit W un voisinage de X qui ne rencontre pas l'image de α. D'après (i), $\{(G_t^W)^{-1} \circ \alpha\}$ donne alors une homotopie dans $Y-X-K' \subset Y-X-K$ de α à un représentant α' d'un élément de $\pi_i(Y-B-K')$, qui est lui aussi homotope à zéro dans $Y-X$. D'après (ii), α' est homotope à zéro dans $Y-A-K \subset Y-X-K$; d'où, par composition, le résultat.

Si l'on supprime l'hypothèse $P'(x)$, il ne nous reste que le résultat suivant:

1.7. **Proposition**: *Supposons X compact et Y métrique. Soit $A \subset B$ un couple excellent pour lequel il existe une anti-I-gigogne*[1] $\mathfrak{Z} = \{E_n, n \geqq 0\}$ *telle que $A = \bigcap \mathfrak{Z} \subset E_0 \subset B$. Alors les conditions $\prod_i(X, X)$ et $\prod_i(B, A)$ sont équivalentes.*

Preuve: L'unicité des anti-gigognes (cf. [19, 3.6]) fournit une isotopie $\{g_t | t \in [0, \infty)\}$ de Y à support dans $B-X$ telle que $g_t | Y-E_n = g_n | Y-E_n$ pour $t \geqq n$ et que $\{g_n(E_n) | n \geqq 0\}$ forme une base de voisinages de X. Grâce à cela, on peut alors faire un raisonnement parallèle à celui déjà fait en 1.6, en remplaçant les isotopies $\{F_t^W\}$ et $\{G_t^W\}$ par les isotopies $\{g_t | t \in [0, n]\}$ et en remarquant que si K est un compact de Y, l'ensemble $C = X \cup \bigcup_t \{g_t(K) | t \in [0, \infty)\}$ est un compact de Y. En effet, soit $\{O_i\}$ un recouvrement ouvert de C. Il existe $O_1, \ldots, O_k$ qui recouvrent X. Posons $O = O_1 \cup \ldots \cup O_k$. Il existe $n \in N$ tel que $g_n(E_n) \subset O$, donc $C-O \subset \bigcup \{g_t(K) | t \in [0, n]\}$ ce qui est compact. On conclut.

Remarque: Plus généralement, il aurait suffit de supposer X compact et admettant une base dénombrable de voisinages dans Y normal (ce qui permet d'appliquer [19, 3.3iii et 3.6]).

[1] Une telle anti-I-gigogne existe toujours si Y est localement compact. La question de son existence dans le cas général est d'un type pathologique, cf. [19, Appendice].

2. Le théorème d'identification homotopique

2.1. THÉORÈME: *Soient Y un espace normal et X un fermé de Y tels que $Y-X$ soit une variété topologique connexe de dimension $\geqq 5$. Alors Y est un voisinage I-régulier de X dans lui-même, pourvu que:*

(a) *Il existe un voisinage I-régulier E de X dans Y tel que $E-X \hookrightarrow Y-X$ soit une équivalence d'homotopie;*

(b) *L'affirmation $\forall\prod_1$ soit satisfaite;*

(c) *$\partial(Y-X) \cup X$ soit un voisinage I-régulier de X dans lui-même.*

2.2. COMMENTAIRES:

(i) Vu que $Y-X$ est σ-compact (par hypothèse) X est un G_δ-ensemble (i.e. intersection dénombrable d'ouverts de Y) ce qui équivaut à dire que X est un entourage à complément I-régulier (cf. [19, 3.3ii]).

(ii) La condition (a) est équivalente au fait que pour *tout* voisinage I-régulier E' de X dans Y, $E'-X \hookrightarrow Y-X$ est une équivalence d'homotopie (cf. [19, 2.2]); ce qui montre que cette condition est nécessaire.

(iii) La condition (b) est nécessaire d'après 1.5.

(iv) Les conditions (a) et (b) sont conservées par une équivalence d'homotopie propre de $Y-X$, cf. [14]; on a donc bien un critère de nature homotopique pour reconnaître les voisinages réguliers lorsqu'il en existe. D'autre part, lorsque X est compact et Y localement compact, il y a aussi des critères homotopiques d'existence ([20]).

(v) Nous allons traiter explicitement le cas où $\partial(Y-X) = \emptyset$, les légères adaptations nécessaires pour traiter le cas $\partial(Y-X) \neq \emptyset$ sont réunies en 2.14.

On va démontrer le théorème 2.1 en vérifiant que Y satisfait au critère d'absorption des compacts [19, 4.2]. Pour ceci, on utilisera les méthodes de l'engouffrement; aussi nos principaux outils seront les deux théorèmes suivants:

2.3. THÉORÈME: (Stallings [22], Newman [12]). *Soit M^n une variété topologique connexe sans bord. Soient P un polyèdre localement docile ('tame') dans M de dimension $\leqq n-3$ et U un ouvert de M tel que $P-U$ soit compact et possède un voisinage de dimension p dans P, et que $\pi_i(M, U) = 0$ pour $0 \leqq i \leqq p$. Alors il existe une isotopie $\{h_t\}$ de M, à support compact, telle que $h_1(U) \supset P$.*

La version PL de ce théorème est due à Stallings; en travaillant carte

par carte, Newman en a établi la version topologique. Dans [16] on peut trouver les indications pour établir la version citée ici qui permet de démontrer:

2.4. PROPOSITION: (cf. [16, 2.1]) *Soit M une variété topologique connexe de dimension $\geqq 5$ sans bord. Soit O un ouvert de M muni d'une structure de variété* PL. *Soit P un sous-polyèdre de O fermé dans M et de dimension $\leqq 2$. Soit $V \subset U$ un couple d'ouverts connexes de M tels que $P - V$ soit compact et que*

(i) $\pi_1(M, V) = 0$

(ii) *La flèche $\pi_2(U, V) \to \pi_2(M, V)$ induite par inclusion soit surjective. Alors il existe une isotopie $\{h_t\}$ de M à support compact telle que $h_1(U) \supset P$.*

Jusqu'à la fin du § 2, on supposera vérifiées les hypothèses du théorème 2.1 (et en plus jusqu'en 2.14 que $\partial(Y - X) = \emptyset$ pour simplifier l'exposition).

A – *Partie géométrique de la démonstration de* 2.1

2.5. AFFIRMATION: *Y est la réunion d'un voisinage I-régulier O_1 de X dans Y et d'un ouvert O_2 de $Y - X$ muni d'une structure de variété* PL.

2.6. AFFIRMATION: *Il existe un voisinage fermé A de X dans Y contenu dans O_1 tel que, pour tout compact C de Y, il existe un homéomorphisme f de Y qui fixe A et tel que $f(O_1) \supset C$.*

Par le critère d'absorption des compacts (cf. § 0) le théorème 2.1 suit alors immédiatement de 2.6.

PREUVE DE 2.5 (parallèle à [16, 4.3 et 4.4]): Suivant les indications de [15, p. 224], on trouve un ouvert U de $Y - X$ muni d'une structure de variété PL et des fermés B_n ($n \in \mathbb{N}$) de Y contenus dans U tels que $B_n \subset \mathring{B}_{n+1}$, $\pi_i(Y - X - B_n, U - B_n) = 0$ pour $i = 1, 2$ et $n \in \mathbb{N}$, et $U = \bigcup_n B_n$. D'autre part, [19, 3.7] nous fournit des voisinages fermés A_n de X dans Y tels que $A_n \subset \mathring{A}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), $E = \bigcup_n A_n$ (pour le E de l'hypothèse (a) de 2.1), et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Y - A_n, E - A_n)$ soit homéomorphe à $(Y - X, E - X)$, donc, par l'hypothèse (a) de 2.1, que $\pi_i(Y - A_n, E - A_n) = 0$ pour tous $n, i \in \mathbb{N}$.

Alors, en utilisant le théorème 2.3 et une méthode d'engouffrement bien connue (qui sera d'ailleurs illustrée par la preuve de 2.6), on démontre que, pour un compact K de Y donné et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un homéomorphisme g_n de $Y - X$ fixant A_n (et s'étendant donc à Y par

l'identité) et un homéomorphisme h_n de $Y-X$ fixant B_n tels que $g_n(E) \cup h_n(U) \supset K$.

En engouffrant ainsi des compacts de plus en plus grands par des homéomorphismes fixant des fermés A_n (resp. B_n) de plus en plus grands, on trouve à la limite des plongements ouverts $g: E \to Y$ et $h: U \to Y-X$ tels que $g(E) \cup h(U) = Y$. Alors $O_1 = g(E)$ et $O_2 = h(U)$ conviennent. (Pour voir que O_1 est un voisinage I-régulier de X dans Y, utiliser le critère d'absorption des compacts de § 0).

Preuve de 2.6: Soit L un voisinage polyèdrique (peut être non compact) de $O_2 - O_1$ dans O_2 (les O_1 et O_2 de 2.5), qui est fermé dans Y et contenu dans $Y-X$ (on utilise la normalité de Y). On fixe une triangulation de O_2, qui fait de L un sous-complexe de O_2. On va déduire 2.6 de la proposition suivante:

2.7. Proposition: (cf. [16, § 3 et 4]) *Soient $A \subset B$ des voisinages fermés de X tels que $B \cap L = \emptyset$ et que $B \searrow X(O_1)$. Soit C un compact de Y. Supposons qu'il existe des ouverts connexes $V \subset U$ de $Y-A$ tels que:*

(i) $U \cap C = \emptyset$

(ii) *$Y-V-B$ soit relativement compact*

(iii) $\pi_1(Y-A, V) = 0$

(iv) *La flèche $\pi_2(U, V) \to \pi_2(Y-A, V)$ induite par l'inclusion soit surjective.*

Alors il existe un homéomorphisme f de Y qui fixe A et tel que $f(O_1) \supset C$.

Preuve de 2.7: Elle est une adaptation de [16, § 3], qui traite une situation plus simple qu'ici. La proposition 2.4 fournit un homéomorphisme h de $Y-A$ à support compact (qui s'étend donc à un homéomorphisme de Y par l'identité sur A) tel que $h(U)$ contienne le 2-squelette $L^{(2)}$ de L. (D'après la condition (ii), $L^{(2)} - V$ est compact, puisque $B \cap L = \emptyset$).

Soit $N = (Y-U) \cup$ (support de h). Puisque $B \cap L = \emptyset$,

$$L - U = L - U - B$$

est contenu dans $Y-V-B$ et est donc compact; donc $N \cap L$ est compact. Soit $\bar{N}$ le fermé de Y constitué de tous les simplexes de l'étoile de L dans O_2 qui rencontrent N; clairement $\bar{N} \cap L$ est aussi compact. On va trouver un voisinage D de X dans Y à complément I-régulier et contenu dans O_1, et un sous complexe fini L' de L tels que $\bar{N} \subset \mathring{D} \cup \mathring{L}'$ et que $\pi_i(Y-D, O_1-D) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$:

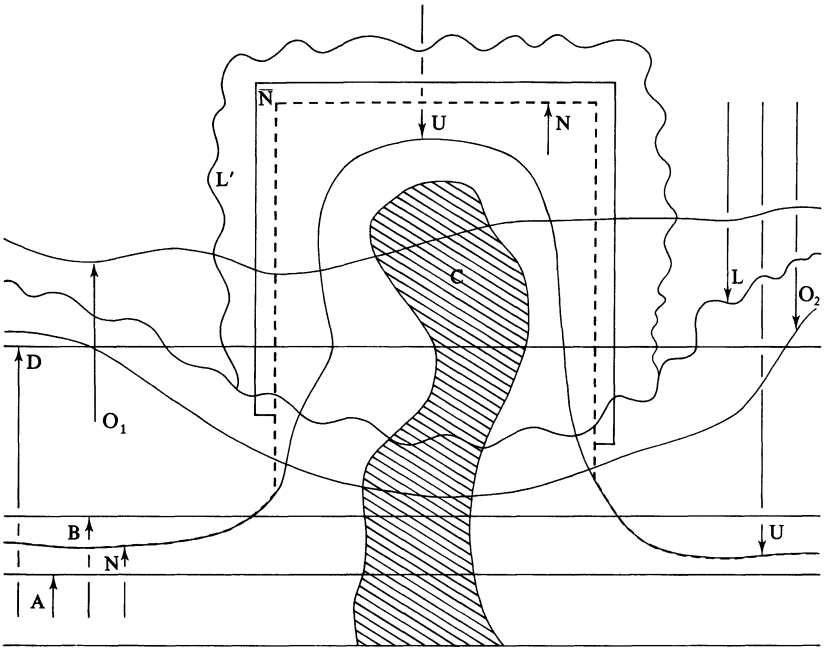

Figure 1-a

Soient N_1 et N_2 deux fermés de Y tels que $\bar{N} = N_1 \cup N_2$ et que $N_1 \subset \mathring{L}$, $N_2 \subset O_1$. Le fermé N_1 est compact puisque $\bar{N} \cap L$ l'est. D'après (ii) et la définition de N, N_2 est contenu dans la réunion de B et d'un compact; puisque $B \searrow X(O_1)$, il existe une I-gigogne $\{E_i\}$ telle que $O_1 = \bigcup_i E_i$ et $B \subset E_0$ et donc $N_2 \subset E_j$ pour un j convenable. D'après [19, 3.7], il existe donc un voisinage D de X dans Y à complément I-régulier tel que $N_2' \subset \mathring{D} \subset D \subset O_1$ et que $(Y-D, O_1-D)$ soit homéomorphe à $(Y-X, O_1-X)$, donc que $\pi_i(Y-D, O_1-D) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (d'après 2.2 (ii)). On choisit enfin un sous complexe fini L' de L tel que $\mathring{L'}$ contienne le compact N_1; alors D et L' conviennent. La figure 1-a illustre la situation ainsi obtenue.

Soit $L'_{(n-3)}$ le $(n-3)$-squelette dual de L' (dual à $L'^{(2)} \cap L'$ dans la première subdivision barycentrique de celui-ci). Le théorème 2.3 appliqué à la variété $Y-D$ donne un homéomorphisme g_0 de $Y-D$ à support compact tel que $g_0(O_1-D) \supset L'_{(n-3)}-D$. L'homéomorphisme g_0 s'étend par l'identité sur D à un homéomorphisme g de Y tel que $g(O_1) \supset L'_{(n-3)} \cup D$. On rappelle que $h(U) \supset L'^{(2)}$. Le procédé d'étirement de Stallings ('stretching process' [23, 8.1]) appliqué dans O_2 fournit alors un homéomorphisme θ de Y tel que:

(1) $\theta h(U) \cup g(O_1) \supset L' \cup D \supset L'$
(2) $\theta(\Delta) = \Delta$ pour tout simplexe Δ de O_2
(3) θ est à support compact contenu dans l'étoile de L' dans O_2.

Par (2), (3) et la définition de $\bar{N}$, on obtient $\theta(Y-\bar{N}) = Y-\bar{N}$. Puisque N contient $Y-U$ et le support de h, on a donc:

$$\theta h(U) \supset \theta h(Y-N) \supset \theta(Y-N) \supset \theta(Y-\bar{N}) = Y-\bar{N}.$$

Ceci et (1) donnent:

$$\theta h(U) \cup g(O_1) \supset (Y-\bar{N}) \cup D \cup L' = Y.$$

Donc
(4) $U \cup (\theta h)^{-1} \circ g(O_1) = Y.$
Si l'on pose $f = (\theta h)^{-1} \circ g$ alors f fixe A, puisque θ, h et g fixent A par construction; et d'après (i), l'équation (4) affirme que $f(O_1) \supset C$. CQFD.

Par 2.7, l'affirmation 2.6 et donc le théorème 2.1 seront entièrement démontrés, si l'on prouve l'affirmation suivante:

2.8. Affirmation: *Il existe un couple $A \subset B$ de voisinages fermés de X tels que $B \cap L = \emptyset$, $B \searrow X(O_1)$ et que, pour tout compact C de Y, il existe des ouverts connexes V, U de $Y-A$ qui satisfont aux hypothèses* (i)–(iv) *de* 2.7

La preuve de 2.8 est l'objet de:

B – *Partie algébrique de la démonstration de* 2.1

Tout d'abord il nous faut deux lemmes sur les ANR. Il est bien connu que les variétés topologiques sont des ANR, et qu'un couple d'espaces métrisables a la propriété d'extension des homotopies dont le but est un ANR (cf. par exemple [7, p. 117]). De ce dernier fait, on déduit à l'aide de [21, p. 31, corollary 10 and theorem 11] le lemme suivant:

2.9. Lemme: *Soit $M \subset N$ un couple d'*ANR, *où M est un fermé de N, tel que $M \hookrightarrow N$ soit une équivalence d'homotopie. Alors M est un rétract par déformation fort de N.*

2.10. Lemme: *Soit $M \subset N$ un couple d'*ANR, *où M est un ouvert de N, tel que $M \hookrightarrow N$ soit une équivalence d'homotopie; soit F un fermé de N*

contenu dans M. Alors il existe une homotopie $\{h_t\}$ *de N telle que* $h_0 = \mathrm{id}|N$, $h_1(N) \subset M$ *et que* $h_t|F = \mathrm{id}|F$ *pour tout* $t \in I$.

PREUVE: (cf. la figure 1-b). Soit $\hat{N} = N \times I - (N - M) \times \{0\}$, et soit $p: \hat{N} \to N$ la restriction de la projection $N \times I \to N$ à $\hat{N}$. Alors $\hat{N}$ est un ouvert de $N \times I$, donc un ANR; et $M \times \{0\}$ est fermé dans $\hat{N}$. Or $\hat{N} \hookrightarrow N \times I$ et $M \times \{0\} \hookrightarrow N \times I$ sont des équivalences d'homotopie, donc $M \times \{0\} \hookrightarrow \hat{N}$ l'est aussi. D'après 2.9, $M \times \{0\}$ est donc un rétract par déformation fort de $\hat{N}$; i.e. il existe une application continue $\Phi: \hat{N} \times I \to \hat{N}$ telle que $\Phi(x, 0) = x$ pour tout $x \in \hat{N}$, $\Phi(x, t) = x$ pour tout $x \in M \times \{0\}$ et tout $t \in I$, et $\Phi(\hat{N} \times \{1\}) = M \times \{0\}$. Soit une fonction continue $\alpha: N \to I$ telle que $\alpha = 0$ sur F et $\alpha = 1$ sur $N - M$. Alors si on pose $N' = \{(x, \alpha(x)) | x \in N\} \subset \hat{N}$, l'application $\varphi: N \to N'$ telle que $\varphi(x) = (x, \alpha(x))$ est un homéomorphisme. On définit une application $h: N \times I \to N$ par $h = p \circ (\Phi|N' \times I) \circ (\varphi \times \mathrm{id}|I)$; alors $h_t: N \to N$ définie par $h_t(x) = h(x, t)$ convient.

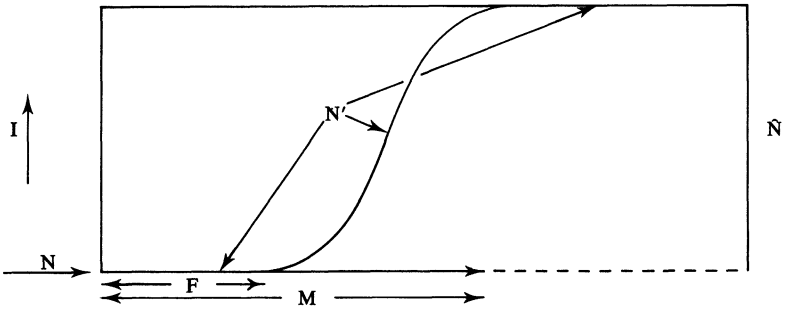

Figure 1-b

Dorénavant, et jusqu'à la fin de la partie B, on notera $p: \widetilde{Y - X} \to Y - X$ le revêtement universel de $Y - X$, et, pour $Z \subset Y - X$, on écrira $\tilde{Z} = p^{-1}(Z)$. Remarquons que si B est un entourage à complément I-régulier, alors $p|\widetilde{Y - B}: \widetilde{Y - B} \to Y - B$ est un revêtement universel de $Y - B$, puisque $Y - B \hookrightarrow Y - X$ est une équivalence d'homotopie (cf. [19, 3.6]). Sauf précision contraire, homologie et cohomologie seront entendues à coefficients entiers. Enfin, rappelons que nous sommes toujours sous les hypothèses de 2.1 (avec $\partial(Y - X) = \emptyset$).

2.11. LEMME: (Mêmes hypothèses que pour 2.1, mais on n'utilisera pas l'hypothèse (b)). *Soit* $B \subset B'$ *un couple excellent. Alors, pour tout compact* K *de* Y, *il existe un compact* $K' \supset K$ *tel que, si* $W = Y - B - K$ *et*

$W' = Y - B' - K'$, *les flèches induites par inclusion*:

$$i_1 : H_i(\widetilde{Y-B}, \widetilde{W'}) \to H_i(\widetilde{Y-B}, \widetilde{W})$$

et

$$i_2 : H_i(Y-B, W'; Z_2) \to H_i(Y-B, W; Z_2)$$

soient nulles (*pour tout* $i \in \mathbb{N}$).

PREUVE: Puisque $B \searrow X(B')$, il existe un voisinage I-régulier E' de X dans Y tel que $B \subset E' \subset B'$; $E' - X \hookrightarrow Y - X$ est une équivalence d'homotopie (cf. 2.2(ii)). D'après 2.10, on a une homotopie $\{h_t\}$ de $Y - X$ qui fixe $B - X$ (et s'étend donc à Y par l'identité sur X) telle que $h_0 = \mathrm{id}\,|Y$ et $h_1(Y-X) \subset E' - X \subset B' - X$. Soit K' un compact quelconque de Y contenant $\bigcup \{h_t(K) | t \in I\}$; alors, par restriction de $\{h_t\}$, on obtient une homotopie $\{h'_t\}$ de $B \cup K - X$ dans $B' \cup K' - X$ telle que $h'_1(B \cup K - X) \subset B' - X$. L'homotopie $\{h'_t\}$ est propre, car $\{h_t\}$ fixe $B - X$ et K est compact. Par dualité de Poincaré[1] dans la variété $Y - X$, on obtient le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
H_i(Y-B, W'; Z_2) \arrow[dr, "i_2"] & \\
H_i(Y-B', W'; Z_2) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "D.P."] & H_i(Y-B, W; Z_2) \arrow[d, "\cong"', "D.P."] \\
\bar{H}_C^{n-i}(B^i \cup K' - X, B' - X; Z_2) \arrow[r, "①"] & \bar{H}_C^{n-i}(B \cup K - X, B - X; Z_2)
\end{tikzcd}$$

où $\bar{H}_C$ désigne la cohomologie d'Alexander (ou de Čech) à support compact et où les flèches sont soit données par la dualité de Poincaré, soit induites par inclusion.

Deux applications qui sont homotopes par une homotopie propre induisent la même application en cohomologie à support compact; $\{h'_t\}$ factorise donc la flèche ① par $\bar{H}_C^{n-i}(B' - X, B' - X; Z_2) = 0$; donc ① est nulle. D'où i_2 aussi.

Pour i_1, la démonstration est essentiellement identique; le lecteur pourrait la suivre dans [16, 4.6 step 1].

[1] Notée D.P.

2.12. COROLLAIRES:

(i) *Tout couple excellent $B \subset B'$ vérifie $\prod_0(B', B)$. Autrement dit, pour tout compact K de Y, il existe un compact $K' \supset K$ tel que $W' = Y - B' - K'$ soit entièrement contenu dans une seule composante connexe de $W = Y - B - K$, la seule qui atteigne l'infini.*

(ii) (Hypothèses de 2.11). *Soient B un voisinage fermé de X dans Y à complément I-régulier et K un compact de Y. Notons $W = Y - B - K$. Alors la flèche $H_2(\widetilde{W}) \to H_2(\widetilde{Y-B})$ induite par l'inclusion est surjective.*

PREUVE:

(i) est une conséquence du diagramme commutatif suivant (où les flèches verticales proviennent des suites exactes en homologie et où les flèches horizontales sont induites par inclusion):

$$\begin{tikzcd}
H_1(Y-B, W'; Z_2) \arrow[r, "zéro"] \arrow[d] & H_1(Y-B, W; Z_2) \arrow[d] \\
\tilde{H}_0(W'; Z_2) \arrow[r, "①"] \arrow[d] & \tilde{H}_0(W; Z_2) \arrow[d] \\
\tilde{H}_0(Y-B; Z_2) = 0 & \tilde{H}_0(Y-B; Z_2) = 0
\end{tikzcd}$$

qui montre que la flèche ① est nulle. (Pour justifier la dernière ligne du diagramme, on remarque que $Y - B \hookrightarrow Y - X$ est une équivalence d'homotopie d'après [19, 3.6] et que $Y - X$ est connexe par hypothèse).

(ii) D'après 1.3(i), il existe un voisinage fermé B' de X dans Y à complément I-régulier contenant B tel que $B \subset B'$ soit un couple excellent. Le lemme 2.11 donne alors un $W' \subset W$ tel que

$$H_2(\widetilde{Y-B}, \widetilde{W'}) \to H_2(\widetilde{Y-B}, \widetilde{W})$$

soit zéro; ceci entraîne que

$$H_2(\widetilde{W}, \widetilde{W'}) \to H_2(\widetilde{Y-B}, \widetilde{W'})$$

est surjective. Les suites exactes en homologie de $(\widetilde{W}, \widetilde{W'})$ et $(\widetilde{Y-B}, \widetilde{W'})$ permettent de conclure par une chasse dans le diagramme obtenu (cf. la preuve de la surjectivité dans le 'lemme des cinq' [21, p. 185, lemma 11]).

2.13. Lemme: (Hypothèses de 2.1, mais on n'utilisera pas les hypothèses (a)–(c)). *Soit B un voisinage fermé de X dans Y et soient $V \subset U$ deux ouverts connexes de $Y-B$. Supposons que:*

(i) *La flèche $i: \pi_1(V) \to \pi_1(U)$ induite par l'inclusion vérifie*

$$\operatorname{Im} i \cong \pi_1(Y-B)$$

(par inclusion).

(ii) *Les flèches $H_2(\tilde{V}) \to H_2(\widetilde{Y-B})$ et $H_2(\tilde{U}) \to H_2(\widetilde{Y-B})$ induites par inclusions soient surjectives.*

Alors la flèche $\pi_2(U, V) \to \pi_2(Y-B, V)$ induite par inclusion est surjective.

Preuve: Elle est incluse dans [16, 4.6 steps 3 and 4].

Nous sommes maintenant en mesure d'accomplir la

Preuve de l'affirmation 2.8: Soient O_1, O_2 et L comme dans 2.5 et le début de la preuve de 2.6. Soit $A \subset A'$ un couple excellent satisfaisant $\prod_1(A', A)$ (donné par l'hypothèse (b) de 2.1, cf. 1.4). D'après 1.3(i), il existe un voisinage fermé B de X dans Y à complément I-régulier et contenant A', tel que $A' \subset B$ soit un couple excellent. En particulier $B \searrow X(Y)$, donc on peut supposer que $B \cap L = \emptyset$ et que $B \searrow X(O_1)$. Soit C un compact de Y. Par $\prod_1(A', A)$, il existe un compact $C' \supset C$ tel que $\prod_1(A', A; C', C)$ soit vérifiée. D'après 2.12(i), il existe un compact $K \supset C'$ tel que $Y-B-K$ soit contenu dans l'unique composante connexe V de $Y-A'-C'$ qui atteint l'infini. Soit U l'unique composante connexe de $Y-A-C$ qui atteint l'infini. Alors on a $V \subset U$ et les conditions (i) et (ii) de 2.7 sont immédiates; 2.7 (iii) suit de $\prod_1(A', A; C', C)$ et, finalement, 2.12(ii), le fait que $Y-B \hookrightarrow Y-A$ est une équivalence d'homotopie et 2.13 assurent la condition 2.7(iv). Ceci démontre 2.8 et achève la preuve du théorème 2.1 lorsque $\partial(Y-X) = \emptyset$.

2.14. Remarque: Nous collectons ici les quelques modifications à apporter à la démonstration du théorème 2.1 lorsque $Y-X$ est une variété de bord $\partial(Y-X)$ non vide. D'après les hypothèses et en particulier l'hypothèse (c), $E \cap \partial(Y-X) \cup X$ aussi bien que $\partial(Y-X) \cup X$ lui-même sont des voisinages I-réguliers de X dans $\partial(Y-X) \cup X$. Par un argument d'unicité (cf. [19, 2.1]) on peut donc supposer que le voisinage I-régulier E de X dans Y contient $\partial(Y-X)$. Alors O_1 (cf. 2.5) contient $\partial(Y-X) \cup X$. Dans la preuve de 2.6 on peut donc choisir L et L' de façon que $L' \subset L \subset \operatorname{int}(Y-X)$; par conséquent il sera suffisant de faire des engouffrements à support compact dans la variété sans bord $\operatorname{int}(Y-X)$. Ceci assure l'adaptation de la partie géométrique du raisonnement au cas

à bord. Pour la partie algébrique, le plus simple est sans doute de remarquer qu'en 2.11 on peut commencer par choisir un voisinage I-régulier E' de X dans Y et un fermé F de Y tels que $B \subset F \subset E' \subset B'$ et que $B \searrow X(F)$. L'hypothèse (c) et [19, 4.2] fournissent une isotopie de $\partial(Y-X)$ qui compresse $K \cap \partial(Y-X)$ jusque dans $F \cap \partial(Y-X)$ et fixe un voisinage de $B \cap \partial(Y-X) \cup X$ dans $\partial(Y-X) \cup X$. Moyennant d'un voisinage collier du bord, cette isotopie peut s'étendre à une isotopie $\{g_t | t \in [0,1]\}$ de Y tout entier qui fixe B. Alors $g_1(K) - \mathring{F}$ est un compact de $\operatorname{int}(Y-X)$. Ensuite le lemme 2.10 fournit une homotopie de $\operatorname{int}(Y-X)$ qui fixe $F \cap \operatorname{int}(Y-X)$ et se termine par une application de $\operatorname{int}(Y-X)$ dans $\operatorname{int}(E'-X)$. L'isotopie $\{g_t\}$ restreinte à $\operatorname{int}(Y-X)$ suivie de cette homotopie induit une homotopie propre $\{h'_t\}$ de $(B \cup K - X) \cap \operatorname{int}(Y-X)$ dans $(B' \cup K' - X) \cap \operatorname{int}(Y-X)$, où K' est un compact convenable de $\operatorname{int}(Y-X)$. Puisque pour tout fermé C de Y contenant X l'inclusion $(Y-C) - \partial(Y-C) \hookrightarrow Y-C$ est une equivalence d'homotopie, cette homotopie $\{h'_t\}$ permet de conclure comme en 2.11 à la nullité des homomorphismes i_1 et i_2, la dualité de Poincaré s'appliquant dans la variété sans bord $\operatorname{int}(Y-X)$. Le reste de la partie algébrique du raisonnement pourra alors se faire sans changement.

3. Théorème d'identification homotopique en codimension $\geqq 3$

3.1. THÉORÈME: *Soit Y une variété topologique connexe de dimension $\geqq 5$. Soit X un fermé de Y de codimension homologique $\geqq 3$ tel que:*

(a) *$P'(x)$ est vérifiée pour tout $x \in X$* (cf. § 0)

(b) *$Y-X$ est $1-\mathrm{LC}$ en tout point de X.*

Alors Y est un voisinage l-régulier de X si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(c) *$X \hookrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie*

(d) *Y a un seul bout et pour tout compact K de Y, il existe un compact $L \supset K$ tel que $Y-L$ soit connexe et que la flèche*

$$i: \pi_1(Y-L) \to \pi_1(Y-K)$$

induite par inclusion satisfasse à $\operatorname{Im} i \cong \pi_1(Y)$ *(par inclusion)*

(e) *$\partial Y \cup X$ est un voisinage I-régulier de X dans lui-même.*

3.2. COMMENTAIRES:

(i) Les conditions (a) et (b) sont vérifiées par exemple dans les situations suivantes:

(*) X est une sous-variété localement plate de Y de codimension $\geqq 3$ ((b) est alors évidente, pour (a) on utilise [19, 5.16]).

(**) X est un polyèdre localement docile ('tame') dans Y de codimension $\geqq 3$. ((a) suit de [19, 5.16] et (b) s'obtient par un argument de position générale).

(ii) Les hypothèses de dimension et la condition (c) entraînent déjà que Y a un seul bout, cf. [15, 1.2]. En d'autres termes: il existe des compacts arbitrairement grands de Y dont le complément est connexe.

(iii) Vu les hypothèses de dimension et les conditions (b) et (c), la condition (d) équivaut à $\prod_1(X, X)$. En effet [15, 4.4] affirme que sous ces hypothèses $Y-X$ est connexe et que les flèches induites par inclusion: $\pi_1(Y-X) \to \pi_1(Y)$ et $\pi_1(Y-X-K) \to \pi_1(Y-K)$ (pour un compact K de Y) sont des isomorphismes; ceci permet de conclure.

(iv) La condition (a) implique que (Y, X) satisfait à l'I-axiome (voir [19, 5.4]).

Preuve de 3.1: *Nécessité*: (c) est immédiate d'après [19, 5.12]. Ensuite 1.5 et 1.6 donnent $\prod_1(X, X)$ ce qui entraîne alors (d) d'après la remarque 3.2(iii) ci-dessus. (e) est triviale. *Suffisance*: On va se ramener au théorème d'identification 2.1. $Y-X$ est connexe d'après la remarque 3.2.(iii) ci-dessus. Soit E un voisinage I-régulier de X dans Y; la condition (c) et [19, 5.12] impliquent alors que $E \hookrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie. Vu les isomorphismes de groupes fondamentaux de 3.2(iii) on peut en déduire que $\pi_*(Y-X, E-X) = 0$ en passant aux revêtements universels, en excisant, et en appliquant le théorème de Hurewicz. Donc $E-X \hookrightarrow Y-X$ est une équivalence d'homotopie d'après le théorème de Whitehead [21, p. 399], qui est valable pour les applications d'ANR puisque tout ANR est homotopiquement équivalent à un CW-complexe ([11]). Enfin, par 3.2(iii), (d) entraîne $\prod_1(X, X)$ donc $\forall \prod_1$ par 1.6. Ceci montre que toutes les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées. On conclut.

Comme autre corollaire au théorème d'identification 2.1 on obtient la version simplifiée suivante de ce même théorème dans le cas où X est compact:

3.3. Théorème: *Soient Y un espace métrique et X un compact de Y tels que $Y-X$ soit une variété topologique connexe de dimension $\geqq 5$. Alors Y est un voisinage I-régulier de X dans lui-même si et seulement si*:

(a) *Il existe un voisinage I-régulier E de X dans Y tel que $E-X \hookrightarrow Y-X$ soit une équivalence d'homotopie*;

(b) *La condition* $\prod_1(X, X)$ *est satisfaite*;
(c) $\partial(Y-X) \cup X$ *est un voisinage I-régulier de* X *dans lui-même.*

Preuve: C'est une conséquence immédiate du théorème 2.1 et de la proposition 1.7.

Appendice: Le cas compact

L'objet de cet appendice est de montrer que dans le cas où X est compact et Y localement compact, les théorèmes d'identification se déduisent aisément des théorèmes d'existence de [20]. Comme exemple nous allons redémontrer le théorème 3.3 avec l'hypothèse supplémentaire que Y est localement compact:

Tout d'abord on remarque que puisque X est compact et (Y, X) vérifie l'I-axiome, $Y-X$ n'a qu'un nombre fini de bouts à X et ces bouts sont dociles (cf. [20, 1.1 et 4.1]). On se ramène donc au cas où $Y-X$ a un seul bout docile à X. D'autre part on montre comme en 2.12(i) que Y a un seul bout, noté ε, à l'∞. On va prouver que ce bout ε est docile ('tame') en vérifiant la condition (A) de docilité de [20, 1.3].

L'hypothèse $\prod_1(X, X)$ est exactement la partie (i) de la condition (A).

Pour vérifier la partie (ii) de la condition (A) il suffit (d'après [13, 1.4.3]) de voir que tout 0-voisinage de ε (cf. [20, 2.5] [13, 2.4]) est dans $\mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ désigne la classe des espaces ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe finiment dominé. Soit donc U un 0-voisinage de ε; soit aussi (voir la figure A-a) $U' \subset E$ un 0-voisinage du bout de $Y-X$ à X (cf. [13, 2.5]). Ce dernier étant docile, $U' \in \mathscr{D}$ [13, 4.3 et 4.2]. Puisque $\partial U'$

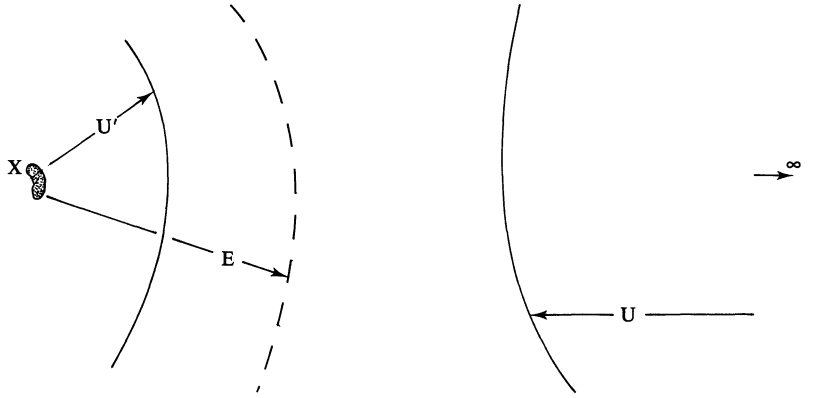

Figure A-a

et $\overline{Y-(U \cup U')}$ sont des ANR compacts, ils sont dans $\mathscr{D}$ ([1, p. 106]) et donc $\overline{Y-X-U} \in \mathscr{D}$ d'après [13, 6.6]. D'autre part $E-X \in \mathscr{D}$ (cf. [20, 1.1]) donc aussi $Y-X \in \mathscr{D}$, enfin ∂U est un ANR compact, donc $\partial U \in \mathscr{D}$, et l'on déduit de [13, 6.6] que $U \in \mathscr{D}$.

D'après [20] le bout docile ε admet donc des voisinages I-réguliers. Il est alors facile de vérifier par des méthodes d'engouffrement standard (cf. [24, § 3]; [4]) le critère d'absorption de compacts (cf. § 0) qui montre que Y est un voisinage I-régulier de X. (C'est le même raisonnement qui montre qu'un h-cobordisme est inversible. Pour vérifier les conditions homotopiques nécessaires à l'engouffrement à partir de l'∞, on peut soit reprendre les raisonnements déjà faits, soit remarquer que $(Y-X) \times S^1$ est un produit d'après [13, chap. V, VI], le théorème du h-cobordisme et la dualité de Poincaré classique.)

En s'appuyant sur [8] à la place de [13] et sur [3] pour remplacer les raisonnements par engouffrement, on peut adapter la même méthode au cas où $Y-X$ est une variété de dimension 3 pour obtenir le résultat suivant:

A.1. Théorème: *Soient Y un espace localement compact et X un compact de Y tels que $Y-X$ soit une variété topologique connexe sans bord de dimension* 3 *qui vérifie la conjecture de Poincaré*[1]. *Alors Y est un voisinage I-régulier de X dans lui-même si*:

(a) *Il existe un voisinage I-régulier E de X dans Y tel que $E-X \hookrightarrow Y-X$ soit une équivalence d'homotopie; et*

(b) *La condition $\prod_1(X, X)$ est satisfaite et $\pi_1(Y-X) \ncong Z_2$.*

Preuve: On déduit comme toute à l'heure de $\prod_1(X, X)$ que l'unique bout de Y à l'∞ est docile. Puisque $\pi_1(Y-X) \ncong Z_2$, il y a donc d'après [8, Theorem 2] un voisinage arbitrairement petit W de l'∞ dans Y qui est un produit $\partial Y \times [0, 1)$, où ∂Y est une sous-variété compacte connexe de dimension 2. En particulier $\prod_1(X, X)$ entraîne que $\pi_1(\partial Y) \cong \pi_1(Y-X)$ par inclusion. Le même raisonnement appliqué à (E, X) au lieu de (Y, X) donne un voisinage ouvert E' de X dans E tel que $E-E'$ est un produit $\partial E \times [0, 1)$ où ∂E est une sous-variété compacte connexe de dimension 2 avec $\pi_1(\partial E) \cong \pi_1(Y-X)$ par inclusion (en effet par 1.5 et puisque X a des voisinages compacts dans Y, le couple (E, X) à la place de (Y, X) satisfait également à la condition $\prod_1(X, X)$). $B = Y-(E' \cup \mathring{W})$ est alors un cobordisme entre ∂E et ∂Y. Il suffit de vérifier qu'il est trivial, c.a.d.

[1] ce qui signifie que toute sous-variété contractible qui est bordée par une sphère est homéomorphe à la boule standard.

un produit; on peut alors conclure facilement par le critère d'absorption des compacts du § 0.

Or, en utilisant des I-compressions fixant $Y-E$ qu'offre la définition d'un voisinage I-régulier même, on montre que la flèche

$$\pi_1(B) \to \pi_1(Y-X)$$

induite par l'inclusion est injective. Par conséquence $\pi_1(\partial Y)$ et $\pi_1(\partial E)$ sont isomorphes à $\pi_1(B)$ par inclusion, et la trivialité du cobordisme B s'en suit par [3, 3.1].

En dimension 2 enfin on a

A.2. THÉORÈME: *Soient Y un espace normal et X un fermé de Y tels que $Y-X$ soit une variété topologique connexe de dimension 2. Alors Y est un voisinage I-régulier de X dans lui-même si(et seulement si) il existe un voisinage I-régulier E de X dans Y tel que $E-X \hookrightarrow Y-X$ soit une équivalence d'homotopie.*

En dimension 2 on n'a donc pas besoin d'une condition du type 1.1. En effet, la condition que $E-X \hookrightarrow Y-X$ soit une équivalence d'homotopie entraîne déjà d'après [6, § 5 et 7] qu'il existe un homéomorphisme entre $Y-X$ et $E-X$ qui fixe un voisinage de X, et on conclut trivialement.

REFERENCES

[1] K. BORSUK: *Theory of retracts*. Monografie Matematyczne tom 44, Polish Scientific publishers, Warszawa (1967).

[2] K. BORSUK: Concerning homotopy properties of compacta. *Fund. Math. 62* (1968) 223–254.

[3] E.BROWN: Unknotting in $M^2 \times I$. *Trans. Amer. Math. Soc. 123* (1966) 480–505.

[4] E. CONNEL: A topological h-cobordism for $n \geqq 5$. *Illinois J. of Math. 11* (1967) 300–309.

[5] R. FOX: On shape. *Fund. Math. 74* (1972) 47–71 et *idem 75* (1972) 85.

[6] M. GOLDMAN: An algebraic classification of non compact 2-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc. 156* (1971) 241–258.

[7] S. HU: *Theory of retracts*. Wayne State Univ. Press, Detroit (1965).

[8] L. HUSH and T. PRICE: Finding a boundary for a 3-manifold. *Ann. of Math. (2) 91* (1970) 223–235 et *idem (2) 93* (1971) 486–488.

[9] S. ICHIRAKU and M. KATO: On higher-dimensional strings of codimension two. *Quart. J. of Math. 23* (1972) 239–248.

[10] M.MARDESIC and J. SEGAL: Shape of compacta and ANR-systems. *Fund. Math. 72* (1971) 41–59 et 61–68.

[11] J. MILNOR: On space having the homotopy type of a CW complex. *Trans. Amer. Math. Soc. 90* (1959) 272–280.

[12] M. NEWMAN: The engulfing theorem for topological manifolds. *Ann. of Math. (2) 84* (1966) 555–571.

[13] L. SIEBENMANN: *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension* $\geqq 5$. Thesis, Princeton (1965).
[14] L. SIEBENMANN: Nouvelle version de [13] (à paraître).
[15] L. SIEBENMANN: On detecting open collars. *Trans. Amer. Math. Soc. 142* (1969) 201–227.
[16] L. SIEBENMANN: On detecting euclidean space homotopically among topological manifolds. *Inventiones Math. 6* (1968) 245–261.
[17] L. SIEBENMANN: Deformation of homeomorphisms on stratified sets. *Comment. Math. Helv. 47* (1972) 123–163.
[18] L. SIEBENMANN: Regular open neighbourhoods. *General Topology and its applications 3* (1973) 51–61.
[19] L. SIEBENMANN, L. GUILLOU, H. HÄHL: Les voisinages ouverts réguliers. *Ann. Ecole Normale Sup. (4) 6* (1973) 253–293.
[20] L. SIEBENMANN, L. GUILLOU, H. HÄHL: Les voisinages ouverts réguliers: Critères homotopiques d'existence. *Ann. Ecole Normale Sup. (4) 7* (1974) 431–462.
[21] E. SPANIER: *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Inc. (1966).
[22] J. STALLINGS: The piecewise linear structure of euclidean space, *Proc. Camb. Phil. Soc. 58* (1962) 481–488.
[23] J. STALLINGS: On topologically unknotted spheres. *Ann. of Math. (2) 77* (1963) 490–503.
[24] J. STALLINGS: On infinite processes leading to differentiability in the complement of a point, pp. 245–254 in *Differential and Combinatorial Topology: a symposium in honor of Marston Morse*. Princeton Univ. Press, N.J. (1965).

(Oblatum 18–X–1973)

Math.
Université Paris-XI
91 Orsay
Mathematisches Institut der
Universität Tübingen
74 Tübingen 1
Auf der Morgenstelle 10
RFA