COMPOSITIO MATHEMATICA

F. RONGA

« La classe duale aux points doubles » d'une application

Compositio Mathematica, tome 27, nº 2 (1973), p. 223-232

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1973__27_2_223_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 27, Fasc. 2, 1973, pag. 223-232
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

'LA CLASSE DUALE AUX POINTS DOUBLES' D'UNE APPLICATION

F. Ronga

On se propose de calculer la classe duale aux points doubles d'une application $f: V \to W$; on traitera simultanément le cas où V et W sont des variétés différentiables et f est différentiable (différentiable = de classe C^{∞}) et le cas où V et W sont des variétés analytiques complexes et f est analytique complexe. On désignera par K le corps des nombres réels ou complexes.

Soit $M(f) = \{x \in V | \exists y \neq x \text{ avec } f(y) = f(x)\}$ l'ensemble des points multiples de f et soit $\Sigma(f) = \{x \in V | \dim (\ker (df_x)) \geqq 1\}$ l'ensemble des points singuliers de f, où df_x désigne la dérivée de f en x. On montre que si f est 'assez bonne' l'adhérence de $M(f)$ est égale à $M(f) \cup \Sigma(f)$ et que cet ensemble porte une classe fondamentale en homologie à supports les fermés, à coefficients entiers dans le cas complexe et à coefficients modulo deux dans le cas réel. Par dualité de Poincaré sur V, il correspond à cette classe fondamentale une classe de la cohomologie ordinaire de V, qu'on appelle classe duale aux points doubles de f. Le but de cette note est de déterminer cette classe de cohomologie (voir th. (2.6)). On retrouve en particulier la formule que Whitney a donné dans ([5], page 131) dans le cas réel, lorsque f est une immersion.

1. Quelques lemmes

Soient E et F des espaces vectoriels sur K de dimension finie. Soit Hom (E, F) l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F; si $l \in \text{Hom}(E, F)$ et $e \in E$, on écrira $\langle l, e \rangle$ pour $l(e)$.

Soit U un ouvert convexe de E et $f: U \to F$ une application différentiable (respectivement $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$-différentiable). Désignons par $df_x \in \text{Hom}(E, F)$ la dérivée de f en $x \in U$. Soient $x, y \in U$ et $t \in [0, 1]$; posons:

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 df_{(x+t(y-x))} \cdot dt,$$

où l'on intègre dans Hom (E, F).

On définit ainsi une application différentiable:

$$\varphi : U \times U \to \mathrm{Hom}\,(E, F)$$

1.1. LEMME: *On a*

(i) $\langle \varphi(x, y), y-x \rangle = f(y)-f(x)$
(ii) $\varphi(x, x) = df_x$

DÉMONSTRATION:

$$f(y)-f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(x+t(y-x)))\cdot dt = \int_0^1 \langle df_{(x+t(y-x))}, y-x\rangle \cdot dt$$
$$= \langle \varphi(x, y), y-x\rangle.$$

La deuxième égalité énoncée est immédiate. ||

Soit $P(E)$ la variété des droites passant par l'origine de E. Si U est un ouvert de E, on pose:

$$F_2(U) = \{(x, y, d) \in U \times U \times P(E) | x-y \in d\}.$$

$F_2(U)$ est l'éclaté de $U \times U$ le long de la diagonale; c'est le 'fat square' de U.

Soit $G = \{(x, y, d, v) \in U \times U \times P(E) \times E | x-y \in d, v \in d\}$. On a une projection $p : G \to F_2(U)$, $p(x, y, d, v) = (x, y, d)$, qui fait de $\gamma = (p : G \to F_2(U))$ un fibré vectoriel de rang 1, sous-fibré du fibré trivial $F_2(U) \times E \to F_2(U)$.

Supposons que U soit convexe et définissons $S(f) : G \to F$ par $S(f)_{(x,y,d,v)} = \langle \varphi(x, y), v\rangle$. $S(f)$ est linéaire par rapport à v.

1.2. LEMME: *Il existe $(x, y, d, v) \in G$ tels que $v \neq 0$ et $S(f)_{(x,y,d,v)} = 0$ si et seulement si*

i) *$x \neq y$, x et $y \in M(f)$, ou bien*
ii) *$x = y \in \Sigma(f)$*

Ce lemme est une conséquence immédiate de 1.1. ||

Soit $\tilde{\Sigma} = \{(\alpha, d) \in \mathrm{Hom}\,(E, F) \times P(E) | \alpha | d = 0\}$; on montre dans ([4], prop. 1.1) que c'est une sous-variété de $\mathrm{Hom}\,(E, F) \times P(E)$. Soit $\Sigma^i = \{\alpha \in \mathrm{Hom}\,(E, F) | \dim\,(\ker\,(\alpha)) = i\}$; c'est une sous-variété de $\mathrm{Hom}(E, F)$. Soit enfin $P : \mathrm{Hom}\,(E, F) \times P(E) \to \mathrm{Hom}\,(E, F)$ la projection sur le premier facteur.

1.3. LEMME: *Soit $(\alpha, d) \in \tilde{\Sigma}$ et supposons que $\alpha \in \Sigma^i$. Alors:*

$$dP_{(\alpha,d)}(T_{(\alpha,d)}(\tilde{\Sigma})) \supset T_\alpha(\Sigma^i),$$

où T_z ( ) désigne l'espace tangent en z.

DÉMONSTRATION: Soit d' un sous-espace vectoriel de E supplémentaire à d. Soit $U_d = \{a \in P(E) | \, a \cap d' = 0\}$; en considérant tout $a \in U_d$ comme graphe d'une application linéaire de d dans d' on définit un difféomorphisme de U_d sur Hom (d, d').

Soit $V_d = \text{Hom}\,(E, F) \times \text{Hom}\,(d; d')$; on a:

$\tilde{\Sigma} \cap V_d = \{(\alpha, \delta) \in \text{Hom}\,(E, F) \times \text{Hom}\,(d, d') | \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \delta = 0\}$, où $\alpha_1 = \alpha | d$ et $\alpha_2 = \alpha | d'$. L'espace tangent à $\tilde{\Sigma}$ au point $(\alpha, 0)$ est égal à $\{(A, D) \in \text{Hom}\,(E, F) \times \text{Hom}\,(d, d') | A_1 + \alpha_2 \cdot D = 0\}$. D'autre part on a $T_\alpha(\Sigma^i) = \{A \in \text{Hom}\,(E, F) | A^* : \ker\,(\alpha) \to \text{coker}\,(\alpha) \text{ est zéro}\}$, où A^* est la composition : $\ker\,(\alpha) \to E \xrightarrow{A} F \to F/\text{Im}(\alpha)$.

Si $A \in T_\alpha(\Sigma^i)$, $\text{Im}\,(A_1) \subset \text{Im}\,(\alpha) = \text{Im}\,(\alpha_2)$; on peut alors trouver $D \in \text{Hom}\,(d, d')$ tel que $A_1 = -\alpha_2 \cdot D$. On aura $(A, D) \in T_{(\alpha, d)}(\tilde{\Sigma})$. Ainsi $dP_{(\alpha, d)}(T_{(\alpha, d)}(\tilde{\Sigma})) \supset T_\alpha(\Sigma^i)$. ||

2. Désingularisation des points doubles

Nous reprenons les constructions du paragraphe 1 dans le cas d'une application respectivement différentiable ou analytique complexe $f : V \to W$.

Rappelons qu'une gerbe sur la variété V (voir [3], chap. 4, § 3–4) est une application différentiable (dans le cas complexe et dans le cas réel) $e_V : T(V) \to V$ telle que:

(i) e_V restreinte à la section nulle est l'identité

(ii) pour tout $x \in V$ il existe un voisinage U_x de zéro dans $T_x(V)$ tel que $e_V | U_x$ est un difféomorphisme sur son image.

Dans ce qui suit on supposera que les variétés V et W sont munies de gerbes; si $x \in V$, on notera par U_x un voisinage ouvert *convexe* de zéro dans $T_x(V)$ tel que $e_x = e_V | U_x$ soit un difféomorphisme sur son image. On utilisera la même notation sur W.

Soit $F_2(V)$ le 'fat square' de V, c'est-à-dire la variété obtenue en faisant éclater la diagonale Δ_V dans $V \times V$. Puisque le fibré normal à Δ_V dans $V \times V$ s'identifie naturellement à $T(V)$ par la projection de $V \times V$ sur le premier facteur, en tant qu'ensemble $F_2(V)$ est la réunion de $V \times V - \Delta_V$ et de l'espace total du fibré en projectif associé à $T(V)$, qu'on notera $P : P(T(V)) \to V$. On a une application naturelle $\sigma : F_2(V) \to V \times V$ qui est l'identité sur $V \times V - \Delta_V$.

Soit γ le fibré canonique de rang 1 sur $P(T(V))$, sous-fibré de $P^*(T(V))$; il s'identifie naturellement au fibré normal à $P(T(V))$ dans $F_2(V)$.

2.1. LEMME: *A l'aide de la gerbe sur V on peut étendre de manière naturelle γ en un fibré sur $F_2(V)$ (qui sera encore noté γ) muni d'une trivialisation sur $F_2(V) - P(T(V))$.*

Démonstration: Soit $0'$ le voisinage de Δ_V dans $V \times V$ formé des couples (x, y) tels que $y \in e_x(U_x)$; soit $0 = \sigma^{-1}(0')$, voisinage ouvert de $P(T(V))$ dans $F_2(V)$. 0 s'identifie à la sous-variété de $V \times V \times P(T(V))$ formée des triples $(x, y, d) \in V \times V \times P(T(V))$ tels que $d \subset T_x(V)$, $y \in e_x(U_x)$ et $e_x^{-1}(y) \in d$. Posons:

$$G = \{(x, y, d, v) \in V \times V \times P(T(V)) \times T(V) | (x, y) \in 0', d \subset T_x(V), \\ e_x^{-1}(y) \in d \text{ et } v \in d\}.$$

On a une projection $p' : G \to 0$, $p'(x, y, d, v) = (x, y, d)$ qui fait de $\gamma' = (p' : G \to 0)$ un fibré vectoriel de rang 1, dont la restriction à $P(T(V))$ s'identifie à γ. Si $x \neq y$, $e_x^{-1}(y)$ est un vecteur non nul de $T_x(V)$; on peut donc recoller γ' avec le fibré trivial de rang 1 sur $F_2(V) - P(T(V))$. ||

Soit $\pi : F_2(V) \to V$ la composition de $\sigma : F_2(V) \to V \times V$ avec la projection sur le premier facteur. Soit $f : V \to W$ resp. différentiable ou analytique complexe. Posons:

$$\Omega' = \{(x, y) \in V \times V | f(y) \in e_{f(x)}(U_{f(x)})\},$$

$\Omega = \sigma^{-1}(\Omega')$, voisinage ouvert de $P(T(V))$ dans $F_2(V)$ et $T(W)' = \pi^*(f^*(T(W)))$. Nous associons à f une section $S(f) : \Omega \to \mathrm{HOM}\ (\gamma, T(W)')$ de manière suivante:

(i) au-dessus de Ω–$P(T(V))$ un élément de l'espace total de γ s'écrit sous la forme (x, y, λ), où $x \neq y$ et $\lambda \in K$; on pose:

$$S(f)_{(x, y, \lambda)} = \lambda \cdot e_{f(x)}^{-1}(f(y))$$

(ii) si $y \in e_x(U_x)$ on pose:

$$S(f)_{(x, y)} = \int_0^1 d(e_{f(x)}^{-1} \cdot f \cdot e_x)_{(t \cdot e_x{}^{-1}(y))} \cdot dt \,\Big|\, d$$

Il suit de 1.1 que cette définition est cohérente.

Soit $\Sigma^i = \{\alpha \in \mathrm{HOM}\ (T(V), T(W)) |\ \dim\ (\ker\ (\alpha)) = i\}$; c'est une sous-variété de $\mathrm{HOM}\ (T(V), T(W))$. L'application f est dite Σ^i-transverse si sa dérivée $df : V \to \mathrm{HOM}\ (T(V), T(W))$ est transverse à Σ^i.

2.2. Proposition: *Supposons que f soit Σ^i-transverse pour tout i. Alors la restriction de $S(f)$ à $P(T(V))$ est transverse à la section nulle de* HOM $(\gamma, T(W)')$.

Démonstration: Reprenons les constructions de ([4], § 1). Soit $h : \mathrm{HOM}\ (T(V), T(W)) \to V$ la projection naturelle et soit $P(h^*(T(V)))$ l'espace total du fibré en projectif associé à $h^*(T(V))$. Un élément de $P(h^*(T(V)))$ est un couple (α, d), où $\alpha \in \mathrm{Hom}\ (T_x(V), T_y(W))$ et d est une droite de $T_x(V)$. On définit $H : P(h^*(T(V))) \to P(T(V))$ par

$H(\alpha, d) = d$. Soit $\Psi : P(h^*(T(V))) \to \text{HOM}\,(H^*(\gamma), T(W))$ définie en associant à $(\alpha, d) \in P(h^*(T(V)))$ la restriction de α à d. On montre dans ([4], prop. 1.1) que Ψ est transverse à la section nulle. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\text{HOM}\,(\gamma, T(W)') \arrow[r, dotted, "G"] & \text{HOM}\,(H^*(\gamma), T(W)) \\
P(T(V)) \arrow[u, "S(f)"] \arrow[d, "P"] \arrow[r, dotted, shift left, "g"] & P(h^*(T(V))) \supset \tilde{\Sigma} \arrow[l, shift left, "H"] \arrow[u, "\Psi"'] \arrow[d, "P'"'] \\
V \arrow[r, shift left, "df"] & \text{HOM}\,(T(V), T(W)) \supset \bar{\Sigma}^1 = \cup \Sigma^i, i \geqq 1 \arrow[l, shift left, "h"]
\end{tikzcd}$$

où g et G se définissent de manière naturelle. G est un isomorphisme linéaire sur chaque fibre et il est donc transverse à la section nulle. Pour savoir que $S(f)|P(T(V))$ est transverse à la section nulle, il suffit de montrer que g est transverse à la variété des zéros de Ψ, qu'on a désigné par $\tilde{\Sigma}$. Si $(\alpha, d) \in \tilde{\Sigma}$ et $\alpha \in \Sigma^i$, il suit de 1.3 que $dP'_{(\alpha, d)}(T_{(\alpha, d)}(\tilde{\Sigma})) \supset T_\alpha(\Sigma^i)$. Puisque g est un isomorphisme sur les fibres et que df est transverse à Σ^i, on a que g est transverse à $\tilde{\Sigma}$. ||

2.3. Corollaire: *Si f est Σ^i-transverse pour tout i, et $f \times f : V \times V \to W \times W$ est transverse à Δ_W sur $V \times V - \Delta_V$, $S(f) : \Omega \to \text{HOM}\,(\gamma; T(W)')$ est transverse à la section nulle.*

En effet, il suit de 2.2 que $S(f)$ est transverse à la section nulle en tout point de $P(T(V))$. Si $x, y \in V$, $x \neq y$, en coordonnées locales, moyennant des identifications naturelles, on peut écrire $S(f)_{(x,y)} = f(y) - f(x)$; on en déduit immédiatement que $S(f)$ est transverse à zéro en (x, y) si et seulement si $f \times f$ est transverse à Δ_W en (x, y). Ainsi $S(f)$ est transverse à la section nulle. ||

Définition: On pose $\tilde{M}_2(f) = \{z \in \Omega | S(f)_{(z)} = 0\}$. Si f vérifie les hypothèses de 2.3, c'est une sous-variété de $F_2(V)$; si f est propre c'est une sous-variété fermée.

2.4. Corollaire: *Sous les hypothèses de* 2.3. *tout point singulier de f est adhérent aux points multiples de f.*

En effet, puisque d'après 2.2 $S(f)|P(T(V))$ est transverse à la section nulle, les zéros de $S(f)|P(T(V))$ forment une sous-variété de codimension 1 de $\tilde{M}_2(f)$; il suit de là que si df_x n'est pas injective il existe x' et $y \in V$ aussi proches que l'on veut de x tels que $(x', y) \in \tilde{M}_2(f) - P(T(V))$, ce qui veut dire que $x' \neq y$ et, d'après 1.2, $f(x') = f(y)$. ||

Soit $f^k : V^k \to W^k$ le k-ième produit de f. Posons

$$\Delta_V^k = \{(y_1, \cdots, y_k) \in V^k | \exists\, i \neq j \text{ t.q. } y_i = y_j\}$$

et

$$\delta_W^k = \{(y, \cdots, y) \in W^k\}$$

DÉFINITION: On dit que $f: V \to W$ est 'générique pour les points doubles' si f est Σ^i-transverse pour tout i et si $f^k : V^k \to W^k$ est transverse à δ_W^k sur $V^k - \Delta_V^k$.

Dans le cas différentiable il suit des théorèmes classiques de transversalité qu'en déformant arbitrairement f on peut la rendre générique pour les points doubles. Dans le cas complexe, un résultat analogue est vrai lorsque V est une variété de Stein et W est un espace numérique.

Posons $\mathring{M}_2(f) = \{(x, y) \in F_2(f) - P(T(V)) | f(x) = f(y),\ f(x) = f(z)$ entraîne $z = x$ ou y, df_x et df_y sont injectives$\}$.

2.5. THÉORÈME: *Soit* $f: V \to W$ *une application propre (resp. différentiable ou analytique complexe), où* $\dim (V) < \dim (W)$. *Si f est générique pour points doubles, on a*:

(i) $\tilde{M}_2(f)$ *est une sous-variété fermée de* $F_2(V)$.

(ii) $\mathring{\tilde{M}}_2(f)$ *est un ouvert dense de* $\tilde{M}_2(f)$.

(iii) $\pi|\tilde{M}_2(f)$ *est propre et* $\pi|\mathring{\tilde{M}}_2(f)$ *est un plongement d'image l'ensemble des points doubles purs de f, c'est-à-dire l'ensemble* $M_2(f) = \{x \in V | \exists$ *un et un seul* $y \neq x$ *tel que* $f(x) = f(y)$ *et* df_x *et* df_y *sont injectives*$\}$

(iv) $\pi(\tilde{M}_2(f))$ *est égal à l'adhérence de* $M_2(f)$, *qui est encore égale à* $M(f) \cup \Sigma(f)$.

DÉMONSTRATION:

(i) suit de 2.3.

Pour (ii), il est clair que $\mathring{\tilde{M}}_2(f)$ est ouvert dans $\tilde{M}_2(f)$. D'autre part, puisque df est Σ^i-transverse pour tout i, le produit $df \times df: V \times V \to$ HOM $(T(V), T(W)) \times$ HOM $(T(V), T(W))$ est transverse aux produits $\Sigma^i \times \Sigma^j$, pour tout i et j. On vérifie que la projection naturelle HOM $(T(V), T(W)) \times$ HOM $(T(V), T(W)) \to W \times W$ restreinte à $\Sigma^i \times \Sigma^j$ est transverse à Δ_W. Puisque $f \times f$ est transverse à Δ_W sur $V \times V - \Delta_V$, on a que les variétés $\{(x, y) \in V \times V | df_x \in \Sigma^i,\ df_y \in \Sigma^j\}$ sont transverses à $\tilde{M}_2(f)$ pour tout i et j. Il s'en suit que l'ensemble $M' = \{(x, y) \in F_2(V) - P(T(V)) | f(x) = f(y),\ df_x$ et df_y injectives$\}$ est dense dans $\tilde{M}_2(f)$. Du fait que f^k est transverse à δ_W^k sur $V^k - \Delta_V^k$ il suit que $\mathring{\tilde{M}}_2(f)$ est dense dans M', donc aussi dans $\tilde{M}_2(f)$.

(iii) le fait que $\pi(\tilde{M}_2(f)$ est propre suit facilement du fait que f l'est. Montrons que $\pi|\mathring{\tilde{M}}_2(f)$ est une immersion. Supposons $x \neq y$; en coordonnées locales on peut écrire $S(f)_{(x,y)} = f(y) - f(x)$. La dérivée de $S(f)$ en (x, y) s'écrit: $d(S(f))_{(x,y)} = df_y - df_x$.

On a: $T_{(x,y)}(\tilde{M}_2^{\circ}(f)) = \ker\ (d(S(f))_{(x,y)}) = \{(\xi,\ \eta) | df_x(\xi) = df_y(\eta)\}$; d'autre part, $\ker\ (d\pi_{(x,y)}) = \{(0,\ \eta)\}$. Puisque df_y est injective $\ker\ (d\pi_{(x,y)}) \cap T_{(x,y)}(\tilde{M}_2^{\circ}(f)) = \{0\}$, ce qui prouve que $\pi | \tilde{M}_2^{\circ}(f)$ est une immersion. D'autre part, définissons $g : M_2(f) \to \tilde{M}_2^{\circ}(f)$ en associant à $x \in M_2(f)$ le couple $(x,\ y) \in \tilde{M}_2^{\circ}(f)$, où y est l'unique point de V tel que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. On vérifie que g est continue et que $\pi \cdot g = id$, $g \cdot (\pi | \tilde{M}_2^{\circ}(f)) = id$.

(iv) il suit de 1.2 que $\pi(\tilde{M}_2(f)) = M(f) \cup \Sigma\ (f)$. $\pi | \tilde{M}_2(f)$ étant propre, $\pi(\tilde{M}_2(f))$ est fermé. Puisque $\pi(\tilde{M}_2(f))$ contient $M_2(f)$, il contient son adhérence: comme $\tilde{M}_2^{\circ}(f)$ est dense dans $\tilde{M}_2(f)$ et que $\pi(\tilde{M}_2^{\circ}(f)) = M_2(f)$, on a que $\pi(\tilde{M}_2(f)) = \overline{M}_2(f)$. ||

DÉFINITION: Soit X un fermé de la variété V. Une 'classe fondamentale' de X sur l'anneau A est un élément $u \in H_k(X)$(homologie à supports les fermés à coefficients dans A) tel qu'il existe un ouvert dense U de X, qui est une variété topologique de dimension k telle que la restriction de u à l'homologie locale en tout $x \in U$ soit un générateur de ce A-module libre de rang 1.

2.6. THÉORÈME: *Sous les hypothèses du théorème précédent, $\overline{M}_2(f)$ porte une classe fondamentale en homologie à supports les fermés (à coefficients modulo deux dans le cas réel, à coefficients entiers dans le cas complexe). La classe duale correspondante est égale à:*

$f^*(f_!(1)) - c_{p-n}(f^*(T(W)) - T(V))$ *dans le cas complexe*

$f^*(f_!(1)) - w_{p-n}(f^*(T(W)) - T(V))$ *dans le cas où réel* $p = \dim\ (W)$, $n = \dim\ (V)$; c_{p-n} et w_{p-n} *désignent la* $(p-n)$*-ième classe de Chern et Stiefel-Whitney respectivement*; $f_! : H^i(V) \to H^{i+p-n}(W)$ *désigne l'homomorphisme de Gysin associé à* f (*voir* [1], *section* D).

DÉMONSTRATION: Il suit de 2.5 (i) que $\tilde{M}_2(f)$ porte une classe fondamentale à supports les fermés (coefficients modulo deux dans le cas réel, coefficients entiers dans le cas complexe); il suit de 2.5 (ii), (iii) et (iv) que l'application induite en homologie par $\pi | \tilde{M}_2(f) : \tilde{M}_2(f) \to \overline{M}_2(f)$ envoie la classe fondamentale de $\tilde{M}_2(f)$ sur une classe fondamentale de $\overline{M}_2(f)$.

Il suffit de se placer dans le cas complexe, le cas réel étant analogue. L'ouvert Ω peut être remplacé par un fermé, toujours noté Ω, qui est une variété à bord, noté $\partial\Omega$, tel que $\pi | \Omega$ est propre et dont l'intérieur contient $P(T(V))$.

Puisque l'application induite en homologie par $\pi | \tilde{M}_2$ envoie la classe fondamentale de $\tilde{M}_2(f)$ sur une classe fondamentale de $\overline{M}_2(f)$, l'homomorphisme de Gysin associé à $\pi | \Omega : \Omega \to V$ envoie la classe duale à $\tilde{M}_2(f)$ dans Ω sur la classe duale à $\overline{M}_2(f)$ dans V.

Dans ce qui suit, on écrira π pour $\pi|\Omega$, γ pour $\gamma|\Omega$ et $T(W)'$ pour $T(W')|\Omega$. Si $\xi = (E \to X)$ est un fibré vectoriel, où X est normal, A un fermé de X, $s : A \to E|A$ une section non nulle et $U \in H^*(E, E_\circ)$ une classe de Thom pour ξ, où $E_\circ$ désigne le complémentaire de la section nulle dans E, on peut poser $\chi(\xi) = \bar{S}^*(U) \in H^*(X, A)$ où $S : X \to E$ est une section qui étend s, et $\bar{S} : (X, A) \to (E, E_\circ)$ est induite par S. $\chi(\xi)$ est la classe d'Euler associée à ξ muni de la section non nulle s nur A.

$\tilde{M}_2(f)$ est l'ensemble des zéros de la section transverse à la section nulle $S(f) : \Omega \to \mathrm{HOM}\,(\gamma, T(W)')$, qui ne s'annulle pas sur $\partial\Omega$; la classe duale à $\tilde{M}_2(f)$ dans Ω est alors égale à $\chi(\mathrm{HOM}\,(\gamma, T(W)')) \in H^p(\Omega, \partial\Omega)$. γ étant muni d'une trivialisation sur $\partial\Omega$, $S(f)$ fournit une section non nulle de $T(W)'|\partial\Omega$; ainsi on peut considérer $\chi(T(W)') \in H^p(\Omega, \partial\Omega)$. Si on écrit formellement:

$$c(T(W)') = \prod_{i=1,\cdots,p} (1+s_i), \quad c(\gamma) = 1+t,$$

on a:
(pour les détails, voir [2])

$$c(\mathrm{HOM}\,(\gamma, T(W)')) = \prod_{i=1,\cdots,p} (1-t+s_i);$$

le terme de degré maximum est égal à

$$\sum_{i=0,\cdots,p} (-1)^i \cdot t^i \cdot \sigma_{p-i}(s_1, \cdots, s_p),$$

où σ_j désigne le j-ème polynôme symétrique élémentaire. On en déduit que

$$\chi(\mathrm{HOM}\,(\gamma, T(W)')) = \chi(T(W)') + \sum_{i=1,\cdots,p} (-1)^i \cdot \chi(\gamma)^i \cup c_{p-i}(T(W)')$$

où '$\cup$' est le produit cup: $H^*(\Omega, \partial\Omega) \otimes H^*(\Omega) \to H^*(\Omega, \partial\Omega)$. D'autre part, le fibré normal à $P(T(V))$ dans $F_2(V)$ s'identifie naturellement à $\gamma|P(T(V))$, d'où on en déduit que, si $i : P(T(V)) \to F_2(V)$ désigne l'inclusion, $i_!(1) = \chi(\gamma) \in H^*(\Omega, \partial\Omega)$ et, en utilisant la formule $i_!(i^*(x)) = i_!(1) \cdot x$ on a:

$$i_!\Big(\sum_1^p (-1)^i \cdot \chi(i^*(\gamma))^{i-1} \cdot c_{p-i}(i^*(T(W)'))\Big) = \chi(\mathrm{HOM}\,(\gamma, T(W)')) - \chi(T(W)')$$

Ainsi la classe duale à $\tilde{M}_2(f)$ dans Ω est égale à:

$$\chi(T(W)') - i_!\Big(\sum_1^p (-1)^{i-1} \cdot \chi(i^*(\gamma))^{i-1} \cdot c_{p-i}(i^*(T(W)'))\Big).$$

Nous devons évaluer $\pi_!$ sur cette expression. Or $\pi_! \cdot i_! = P_!$ se calcule en remarquent que $P_!((-1)^i \cdot \chi(\gamma)^i) = \bar{c}_{i-n+1}(T(V))$, où $\bar{c}_j$ désigne la

j-ème classe de Chern duale (cf. [4], chap. II); cela donne:

$$P_!\Big(\sum_1^p (-1)^{i-1}\cdot \chi(i^*(\gamma))^{i-1}\cdot c_{p-i}(i^*(T(W)'))\Big)$$
$$= \sum_1^p \bar{c}_{i-n}(T(V))\cdot c_{p-i}(f^*(T(W))) = c_{p-n}(f^*(T(W))-T(V)).$$

Soit $\Omega' = \sigma(\Omega)$, variété de bord $\partial\Omega' = \sigma(\partial\Omega)$; Ω' est un voisinage de Δ_V dans $V\times V$. Soit $f' : V \to W$ une application homotope à f telle que $f\times f' : V\times V \to W\times W$ soit transverse à Δ_W sur Ω'.

On peut supposer que $\Omega' = (f\times f')^{-1}(U)$, où U est une variété à bord, dont l'intérieur contient Δ_W. L'application qui à $(z, u) \in U$ associe $e_z^{-1}(u) \in T_z(W)$ définit une section $s : U \to p^{*\prime}_1(T(W))$, où $p_1' : W\times W \to W$ est la projection sur le premier facteur. Le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} T(W') \arrow[r] & (p_1')^*(T(W)) \\ \partial\Omega' \arrow[u, "S(f)\cdot\sigma^{-1}"] \arrow[r, "f\times f'"] & U \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

où la première flèche horizontale est naturelle. Il s'en suit que la classe duale à $Z = (f\times f')^{-1}(\Delta_W)$ dans Ω' est égale à $\chi(p_1^* f^*(T(W))) \in H^p(\Omega', \partial\Omega')$. Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_2|Z"] \arrow[d, "p_1|Z"'] & V \arrow[d, "f'"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

où p_1 et $p_2 : V\times V \to V$ sont les projections respectivement sur le premier et le deuxième facteur. Z est le 'pull-back' de f' par f, et de ce fait $f^*\cdot f'_! = (p_1|Z)_!\cdot(p_2|Z)^*$. Ainsi on a: $f^*(f'_!(1)) = f^*(f_!(1)) = (p_1|Z)_!$ $(p_2|Z)^*(1) = (p_1|Z)_!(1) = (p_1|\Omega')_!(\chi(p_1^*(f^*(T(W))))) = \pi_!(\chi(T(W)'))$. La dernière égalité résulte du fait que $\pi = p_1\cdot(\sigma|\Omega)$ et que $(\sigma|\Omega)_!(1) = 1$.

La classe duale à $\overline{M}_2(f)$ dans V a finalement pour expression:

$$\pi_!\Big(\chi(T(W)')-i_!\Big(\sum_1^p (-1)^{i-1}\cdot \chi_\backslash i^*(\gamma))^{i-1}\cdot c_{p-i}(i^*(T(W)'))\Big)\Big)$$
$$= f^*(f_!(1))-c_{p-n}(f^*(T(W))-T(V)). \,||$$

2.7. Théorème: *Soit $f: V \to W$ une application différentiable qui vérifie les hypothèses de 2.5, dont le fibré normal est orienté. Si n-p est impair, la classe duale aux points doubles est une classe entière, qui vaut:*

$$f^*(f_!(1)) - W_{p-n}(f^*(T(W))-T(V))$$

où $f_!$ *est l'homomorphisme de Gysin en cohomologie entière associé à* f, *et* W_{p-n} *est la* (*p-n*)*-ième classe de Stiefel-Whitney entière, qui existe vu les hypothèses.*

DÉMONSTRATION: Soit $\eta = (E \to W)$ un fibré vectoriel tel que $T(W) \oplus \eta \simeq O^N$, fibré trivial de rang N, où N a même parité que p. En remplaçant f par le morphisme strict naturel de $f^*(E)$ dans E, on se ramène au cas où V et W sont orientées, n est impair et p pair. On vérifie que le fibré $T(\Omega) \oplus O^1$ s'identifie à $\gamma \oplus \mathrm{HOM}(\gamma, T(V)') \oplus T(V)''$, où $T(V)' = \sigma^*(p_1^*(T(V)))$ et $T(V)'' = \sigma^*(p_2^*(T(V)))$; on en déduit que $w_1(T(\Omega)) = 0$. D'autre part, le fibré normal à $\tilde{M}_2(f)$ s'identifie à $\mathrm{HOM}(\gamma, T(W)')| \tilde{M}_2(f)$, dont le w_1 s'annule de nouveau; ainsi $\tilde{M}_2(f)$ est orientable, et en fait les orientations de V et W en induisent une pour $\tilde{M}_2(f)$.

L'élément $\chi(\mathrm{HOM}(\gamma, T(W)') - \chi(T(W)' \in H^p(\Omega, \partial\Omega)$, où l'on considère la cohomologie entière, est d'ordre deux, ce qui se voit en se ramenant au classifiant. Ainsi $\pi_!$ appliqué à cette classe de cohomologie est aussi d'ordre deux; puisque $W_{p-n}(f^*(T(W)) - T(V))$ est une classe entière d'ordre deux, dont la réduction modulo deux est égale à $W_{p-n}(f^*(T(W)) - T(V))$, on a que $\pi_!(\chi(\mathrm{HOM}(\gamma, T(W)') - \chi(T(W)')) = W_{p-n}(f^*(T(W)) - T(V))$. D'autre part, $\pi_!(\chi(T(W)') = f^*(f_!(1))$, ce qui se montre de la même manière que la formule analogue en cohomologie modulo deux. Finalement il vient:

$$\pi_!(\chi(\mathrm{HOM}(\gamma, T(W)'))) = f^*(f_!(1)) - W_{p-n}(f^*(T(W)) - T(V)). \qquad ||$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. DYER: *Cohomology theories.* W. A. Benjamin Inc. (1969).

[2] M. KERVAIRE: Relative characteristic classes. *American Journal of Mathematics, Vol. LXXIX, Nr 3.* (1957) 517–558.

[3] S. LANG: *Introduction aux variétés différentiables.* Paris (1967).

[4] F. RONGA: Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux. *Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 47, 1.* (1972) 15–35.

[5] H. WHITNEY: On the topology of differentiable manifolds: Lectures in topology. *The University of Michigan Conference of 1940.* 101–141.

(Oblatum: 18–VII–1972)

Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4, Rue du Lièvre
Genève,
Switzerland