COMPOSITIO MATHEMATICA

D. CHENIOT

Une démonstration du théorème de Zariski sur les sections hyperplanes d'une hypersurface projective et du théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective plane

Compositio Mathematica, tome 27, nº 2 (1973), p. 141-158
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1973__27_2_141_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 27, Fasc. 2, 1973, pag. 141-158
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE ZARISKI SUR LES SECTIONS HYPERPLANES D'UNE HYPERSURFACE PROJECTIVE ET DU THÉORÈME DE VAN KAMPEN SUR LE GROUPE FONDAMENTAL DU COMPLÉMENTAIRE D'UNE COURBE PROJECTIVE PLANE

D. Cheniot

Introduction

1. Cet article est une démonstration sans théorie de Morse du *théorème de Zariski* sur les sections hyperplanes d'une hypersurface projective (cf. [10]). On peut énoncer celui-ci comme suit:

THÉORÈME (1.1) (Zariski) : *Soit H une hypersurface algébrique de l'espace projectif complexe à n dimensions $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$. Si $n \geqq 3$, alors pour tout hyperplan projectif L d'un ouvert de Zariski non vide Ω de l'espace des hyperplans de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$, l'injection canonique de L–H dans $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})-H$ induit un isomorphisme*:

$$\pi_1(L-H, e) \to \pi_1(\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})-H, e)$$

pour $e \in L-H$.

2. H. Hamm et Lê Dũng Tráng ont donné une démonstration complète de ce théorème dans une version plus forte (cf. [5]), en utilisant la théorie de Morse. Il ne s'agit donc que de faire une démonstration plus accessible à l'intuition géométrique et d'ailleurs plus proche de la ligne indiquée par Zariski. Un autre avantage de cette démonstration est de donner au passage le théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe projective plane énoncé en (5.1.5) ci-dessous (cf. [7 bis] et [1]). Il est satisfaisant d'avoir une méthode de démonstration unique pour ces deux théorèmes qui sont de même nature.

Il existe aussi un travail dans la même direction fait par A. N. Varchenko. Il n'est pas encore publié: il semble que sa méthode est de reprendre la démonstration originelle de Zariski et de la faire marcher à l'aide du lemme d'isotopie qu'il cite dans [8].

3. Le principe de la présente démonstration est le même que dans [1] où est démontré le théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental

du complémentaire d'une courbe algébrique projective plane. C'est grâce au premier théorème d'isotopie de Thom et Mather (cf. [6] et [7]) que l'on peut fibrer en variétés analytiques de codimension 1 un sous-ensemble convenable du complémentaire de l'hypersurface. Mais ici comme dans [1] il y a une difficulté au voisinage de l'axe de projection. Cette difficulté peut être aisément surmontée quand l'axe est de dimension 0 mais dans le cas général, il serait nécessaire de faire une construction difficile de voisinages tubulaires de l'axe ayant des propriétés très fortes. Fort heureusement une idée de F. Pham permet de contourner l'obstacle: elle consiste à procéder à la modification de l'espace le long de l'axe.

4. La possibilité d'appliquer le théorème d'isotopie exige l'utilisation de stratifications possédant les propriétés (a) et (b) de Whitney (cf. [9]). D'après [9] lemme 18.4 et [6] propositions 2.4 et 2.5, il suffit, pour montrer qu'une partition $\mathscr{S}$ d'un sous-ensemble fermé E d'une variété analytique complexe M est une stratification possédant les propriétés (a) et (b) de Whitney, de montrer que:

(a) tout $S \in \mathscr{S}$ est une sous-variété pure de M

(b) $\mathscr{S}$ est localement finie

(c) $\mathscr{S}$ possède la propriété de frontière, c'est-à-dire que pour tout $S \in \mathscr{S}$, $\bar{S}$ est union d'éléments de $\mathscr{S}$

(d) $\mathscr{S}$ vérifie la propriété (b) de Whitney, c'est-à-dire que pour tout $S \in \mathscr{S}$ et $T \in \mathscr{S}$ avec $S \subset \bar{T}$ et tout $y \in S$, il existe une carte (U, Ψ) de M au voisinage de y telle que pour toutes suites (x_n), (y_n), (a_n) avec

$$x_n \in \Psi(U \cap T),\ y_n \in \Psi(U \cap S),\ a_n \in \boldsymbol{C},\ \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \Psi(y),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(y_n - x_n) = u \text{ et } \lim_{n\to\infty} T_{x_n}\Psi(U \cap T) = T_1, \text{ on ait } u \in T_1.$$

5. Le paragraphe 1 est consacré au choix (dont on montre qu'il est 'générique') d'un hyperplan L satisfaisant aux conclusions du théorème de Zariski. Il suffit que L soit transverse à toutes les strates d'une stratification de l'hypersurface vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney. Ensuite est choisi un axe A dans L, transverse à toutes ces strates.

Le paragraphe 2 est consacré à la modification de l'espace le long de l'axe A et à une stratification convenable du modifié Z.

Le paragraphe 3 utilise le théorème d'isotopie de Thom et Mather pour montrer que le modifié moins un nombre fini d'hyperplans est un fibré localement trivial en hyperplans projectifs, respectant la stratification. Puis des homotopies de la fibre respectant la stratification sont construites.

Le paragraphe 4 se sert des résultats du paragraphe précédent pour donner une présentation du groupe fondamental du modifié de l'espace projectif moins le modifié de l'hypersurface.

Le paragraphe 5 consiste en plusieurs allers et retours entre l'espace projectif et son modifié, permettant de démontrer le théorème de Zariski.

6. Nous utilisons les notations suivantes:

$\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ désigne l'espace projectif complexe de dimension $n \cdot \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C})$ désigne la grassmanienne des $r+1$ plans de $\boldsymbol{C}^{n+1}$. H est une hypersurface algébrique de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$.

Nous dirons différentiable pour C^∞.

1. Choix de l'hyperplan générique L

1.1. Proposition (1.1.1): *On peut munir $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ d'une stratification Σ vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney, telle que $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})-H$ soit une strate. Σ est alors finie et l'adhérence de toute strate est un ensemble algébrique de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$.*

Preuve: La démonstration du théorème 19.2 de [9] montre qu'en fait il est aussi valable pour un ensemble analytique dans un espace projectif. On peut donc munir H d'une stratification Σ_1 vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney. Σ_1 étant localement finie et $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ compact, Σ_1 est finie. Pour toute strate S de Σ_1, l'adhérence $\bar{S}$ de S est un ensemble analytique fermé de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$. D'après le théorème de Chow (cf. [2]), c'est donc un ensemble algébrique. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})-H\}$ répond alors aux conditions de la proposition 1.

1.2. Proposition (1.2.1): *L'espace des hyperplans de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$. Il existe un ouvert de Zariski non vide Ω de cet espace tel que tout élément de Ω soit transverse à toutes les strates de Σ.*

Preuve: Comme Σ a un nombre fini de strates et comme l'adhérence de toute strate de Σ est un ensemble algébrique, la proposition est un corollaire immédiat du lemme suivant:

Lemme (1.2.2): *Soit V un ensemble algébrique dans $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$. Il existe un ouvert de Zariski non vide* 0 *de l'espace des hyperplans de $P^n(\boldsymbol{C})$, tel que tout élément de* 0 *soit transverse à la partie non-singulière de V.*

Preuve: Soit r la dimension de V. Soit B le sous-ensemble de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C})$ constitué par les couples (x, T) où x est un point régulier de V et T la variété projective tangente à V en x. Alors $\bar{B}$ est le modifié de V le long de son lieu singulier. D'après le théorème 16.4 de [9], $\bar{B}$ est un ensemble analytique de dimension r. $\bar{B}$ est contenu dans $V \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C})$.

En fait $\bar{B}$ est un ensemble algébrique de dimension r. En effet, soit V_k une composante irréductible de V et B_k construit à partir de V_k comme B à partir de V. $\bar{B}$ est union des $\bar{B}_k$. Soit $f_i = 0$, $1 \leqq i \leqq s$ un système

d'équations de V_k. A une permutation des indices près, l'ensemble des points où la matrice

$$F = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right), \quad 1 \leqq i \leqq {}^{n-r}, \quad 0 \leqq j \leqq n,$$

est de rang $n-r$ est un ouvert de Zariski non vide U de V_k. Pour $x \in U$, les coordonnées grassmaniennes de la variété projective tangente à V_k en x sont, au signe près, les mineurs d'ordre $n-r$ de F, donc des polynômes homogènes en les coordonnées homogènes de x. Les relations algébriques ainsi obtenues ont encore un sens pour $x \in V_k$ et, conjointement avec les équations de V_k définissent un ensemble algébrique de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C})$ qui a même trace que $\bar{B}_k$ sur $U \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C})$. Comme $U \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C})$ est un ouvert de Zariski non vide de $V_k \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C})$, la fermeture de Zariski de cette trace coïncide avec son adhérence pour la topologie ordinaire, donc est égale à $\bar{B}_k$.

Soit maintenant A le sous-ensemble de $V \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ constitué par les triplets (x, T, H) où $(x, T) \in \bar{B}$ et $T \subset H$, $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ étant canoniquement identifié à l'espace des hyperplans de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$. L'ensemble A est algébrique de dimension au plus $r+(n-1-r) = n-1$. Comme $V \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C})$ est compact, la projection canonique $p : V \times \boldsymbol{G}^{n,r}(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ est propre et $p(A)$ est un ensemble algébrique de dimension au plus $n-1$. Son complémentaire 0 est donc un ouvert de Zariski non vide de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$. Tout élément de 0 est en particulier dans le complémentaire de $p(A \cap (B \times \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})))$, donc est transverse à la partie non singulière de V, ce qui démontre le lemme.

1.3. L sera désormais un élément fixé de Ω. Nous choisissons maintenant un $n-2$ plan A inclus dans L, qui pourra servir d'axe de projection.

PROPOSITION (1.3.1): *Il existe un $n-2$ plan A de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ contenu dans L et transverse à toutes les strates de Σ.*

PREUVE: L étant transverse à toutes les strates de Σ, les traces de ces strates sur L sont des sous-variétés analytiques dont les adhérences sont évidemment algébriques. Le lemme (1.2.2.) donne alors qu'il existe un $(n-2)$ plan A de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$, contenu dans L et transverse dans L à toutes les traces des strates de Σ.

En fait A est transverse à toutes les strates de Σ. En effet soit $S \in \Sigma$ et $x \in A \cap S$. La transversalité de L à S donne: $\dim (T_x L \cap T_x S) = \dim T_x S - 1$ et la transversalité de A à $L \cap S$ dans L donne $\dim (T_x A \cap T_x S) = \dim (T_x L \cap T_x S) - 1 = \dim T_x S - 2$. Donc

$$\dim (T_x A + T_x S) = \dim T_x A + \dim T_x S - \dim (T_x S \cap T_x A) = n.$$

PROPOSITION (1.3.2): *Tous les hyperplans issus de A, sauf un nombre fini $L_1, \cdots, L_m$ sont transverses à toutes les strates de Σ.*

PREUVE: Lorsqu'on identifie l'ensemble des hyperplans de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ à $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$, les hyperplans issus de A constituent une droite projective. Comme $L \in \Omega$ et $A \subset L$, cette droite n'est pas contenue dans l'ensemble algébrique $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) - \Omega$, donc rencontre cet ensemble en un nombre fini de points.

2. Construction et stratification du modifié Z de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ le long de A

2.1. Nous montrons d'abord que Z est une sous-variété analytique de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ et en donnons quelques propriétés élémentaires. Nous fixons aussi quelques notations.

Fixons une base de $\boldsymbol{C}^{n+1}$ de manière à ce que les équations homogènes de A soient $x_n = 0$, $x_{n+1} = 0$. Fixons également une base quelconque de $\boldsymbol{C}^2$. Soit p l'application projective de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) - A$ dans $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ qui à tout point M de coordonnées homogènes $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ fait correspondre le point $p(M)$ de coorodonnées homogènes (x_n, x_{n+1}). Le graphe de p s'injecte canoniquement dans $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$. Son adhérence est Z.

Z est défini par l'équation homogène en $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ et en (y_1, y_2): $x_n y_2 - x_{n+1} y_1 = 0$. C'est un ensemble algébrique non singulier de dimension n. C'est donc une sous-variété analytique complexe fermée de dimension n.

$$\text{Si } pr_1 : \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \text{ et } pr_2 : \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$$

sont les projections canoniques, nous posons:

$$\varphi = pr_1|Z \quad \tilde{p} = pr_2|Z.$$

La restriction de φ à $\varphi^{-1}(\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) - A)$ est un isomorphisme de variétés analytiques de $\varphi^{-1}(\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) - A)$ sur $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) - A$. Pour $x \in \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) - A$, on a $\varphi^{-1}(x) = (x, p(x))$. Pour tout $a \in A$, on a $\varphi^{-1}(a) = \{a\} \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$. L'image réciproque $\varphi^{-1}(A) = A \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ est une sous-variété de Z de dimension $n-1$.

L'application $\tilde{p}$ est une submersion analytique. Pour tout $b \in \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$, $\tilde{p}^{-1}(b) = L_b \times \{b\}$ où L_b est l'hyperplan de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ issu de A vérifiant $p(L_b - A) = \{b\}$. Nous posons:

$$\tilde{L}_b = L_b \times \{b\}$$

Pour tout hyperplan K de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$, issu de A, on a

$$\tilde{K} = \overline{\varphi^{-1}(K - A)}$$

et $\varphi|\tilde{K}$ est l'isomorphisme canonique de $\tilde{K}$ sur K.

Soit e_0 un point de $\tilde{L} \cap \varphi^{-1}(A)$ non situé sur $\varphi^{-1}(H)$. Le point $\varphi(e_0)$ appartient à $A-H$. Le point e_0 servira de point-base.

Soit α la droite $\{\varphi(e_0)\} \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$. On a $\alpha \cap \varphi^{-1}(H) = \emptyset$. Elle servira à relever les lacets de $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$.

2.2. Notons $\varphi^{-1}(\Sigma)$ l'ensemble des $\varphi^{-1}(S)$ pour $S \in \Sigma$. Nous entendons raffiner $\varphi^{-1}(\Sigma)$ en une stratification vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney où $\varphi^{-1}(A)$ et α soient unions de strates. Plus précisément:

PROPOSITION (2.2.1): *Il existe un raffinement $\tilde{\Sigma}$ de $\varphi^{-1}(\Sigma)$ qui est une stratification de Z vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney et où $\varphi^{-1}(H)$, $\varphi^{-1}(A)$, α sont unions de strates. $\tilde{\Sigma}$ peut en outre être construite de telle sorte que pour tout hyperplan K de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ issu de A, autre que $L_1, \cdots, L_m$, $\tilde{K}$ soit transverse dans Z à toutes les strates de $\tilde{\Sigma}$.*

PREUVE: Pour toute strate S de Σ, $S \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ est transverse à Z dans $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$. En effet, la transversalité en un point x commun à $S \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ et $\varphi^{-1}(\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})-A)$ provient de ce que φ est submersive au-dessus de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})-A$, et que $T_x\varphi = pr_1|T_xZ$. Si maintenant $x \in A \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ et $x \in S \times \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$, elle provient de la transversalité de A et S dans $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$. Nous obtenons alors que $\varphi^{-1}(\Sigma)$ est une stratification vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney de Z grâce au lemme suivant:

LEMME (2.2.2): *Soit Σ une stratification vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney d'un sous-ensemble fermé E d'une variété analytique complexe M et soit P une sous-variété fermée de M transverse à toutes les strates de Σ, et N une autre variété analytique complexe. Considérons les partitions Σ_1, Σ_2, Σ_3 de $E \times N$, $E \cap P$, $E \cup P$ respectivement, ainsi définies:*

Σ_1 est l'ensemble des $S \times N$ pour $S \in \Sigma$

Σ_2 est l'ensemble des $S \cap P$ pour $S \in \Sigma$

Σ_3 est l'union de Σ_2, de $\{P-E\}$ et de l'ensemble des $S-P$ pour $S \in \Sigma$. Alors Σ_1, Σ_2, Σ_3 sont des stratifications vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney.

Avant de démontrer ce lemme, nous terminons la démonstration de la proposition (2.2.1).

La sous-variété $\varphi^{-1}(A)$ de Z est transverse dans Z à toutes les strates de $\varphi^{-1}(\Sigma)$. En effet, si $S \in \Sigma$ et $(h, b) \in \varphi^{-1}(S) \cap \varphi^{-1}(A)$, on a:

$$T_{(h,b)}Z = T_hL_b \times T_b\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$$

et

$$\begin{aligned} T_{(h,b)}\varphi^{-1}(S) &= (T_hS \times T_b\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})) \cap (T_hL_b \times T_b\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})) \\ &= (T_hS \cap T_hL_b) \times T_b\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}). \end{aligned}$$

Notre assertion revient donc à dire que $T_hL_b = T_hS \cap T_hL_b + T_hA$. Or,

on n'a pas $T_h S \subset T_h L_b$ car alors on aurait $T_h S + T_h A \subset T_h L_b$ et S ne serait pas transverse à A. Donc $\dim T_h S = \dim (T_h S \cap T_h L_b) + 1$. Comme $\dim T_h S = \dim (T_h S \cap T_h A) + 2$, on obtient:

$$\begin{aligned}\dim (T_h S \cap T_h L_b + T_h A) &= \dim (T_h S \cap T_h L_b) + \dim T_h A \\ &\qquad - \dim (T_h S \cap T_h A) \\ &= 1 + \dim A\end{aligned}$$

d'où le résultat de transversalité.

Il résulte maintenant du lemme (2.2.2) que

$$\tilde{\Sigma}_1 = \{\varphi^{-1}(S) - \varphi^{-1}(A) | S \in \Sigma\} \cup \{\varphi^{-1}(S) \cap \varphi^{-1}(A) | S \in \Sigma\}$$

est une stratification de Z vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney et raffinant $\varphi^{-1}(\Sigma)$. On peut remarquer que $\varphi^{-1}(H)$ et $\varphi^{-1}(A)$ sont unions de strates. Comme $\alpha \cap \varphi^{-1}(H) = \emptyset$, on voit de manière évidente qu'en subdivisant la strate $\varphi^{-1}(A-H)$ en α et $\varphi^{-1}(A-H) - \alpha$ on obtient une nouvelle stratification $\tilde{\Sigma}$ de Z ayant les propriétés voulues.

Soit enfin K un hyperplan de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ issu de A, autre que $L_1, \cdots, L_m$. Soit $S \in \Sigma$ et $c \in \varphi^{-1}(S-A) \cap \tilde{K}$. Que $\tilde{K}$ est transverse à $\varphi^{-1}(S-A)$ en c, provient de ce que φ étant un isomorphisme au-dessus de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) - A$, $T_c\varphi$ est un isomorphisme de $T_c Z$ sur $T_{\varphi(c)}\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ qui transporte $T_c\varphi^{-1}(S-A)$ sur $T_{\varphi(c)}(S-A)$ et $T_c\tilde{K}$ sur $T_{\varphi(c)}K$. Alors K étant transverse à S en $\varphi(c)$, on a $T_{\varphi(c)}K + T_{\varphi(c)}(S-A) = T_{\varphi(c)}\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$, et donc $T_c\varphi^{-1}(S-A) + T_c\tilde{K} = T_c Z$.

Pour voir ensuite que $\tilde{K}$ est transverse à $\varphi^{-1}(S \cap A)$ en $c = (h, b)$, on constate que $T_c\varphi^{-1}(S \cap A) = T_h(S \cap A) \times T_b\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ et $T_c\tilde{K} = T_h K \times \{0\}$. Donc $T_c\varphi^{-1}(S \cap A) + T_c\tilde{K} = T_h K \times T_b\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ et le résultat découle de $\dim T_h K = n-1$ et $\dim T_b\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) = 1$. Enfin la transversalité de $\tilde{K}$ à α en $c = (h, b)$ provient de $T_c\tilde{K} = T_h K \times \{0\}$ et $T_c\alpha = \{0\} \times T_b\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$.

La proposition (2.2.1) est ainsi démontrée.

Preuve du lemme (2.2.2): Pour $S \in \Sigma$, $S \times N$ est évidemment une sous-variété de $M \times N$; P étant transverse à S, $S \cap P$ est une sous-variété de M; enfin P et E étant fermés $S-P$ et $P-E$ sont des sous-variétés de M. D'autre part le caractère localement fini de Σ entraîne de manière évidente celui de Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Alors, d'après l'introduction, section 4, il suffit de montrer que pour toute strate S, $\bar{S}$ est une union de strates (propriété de frontière) et de vérifier la propriété (b) de Whitney. Tout au long de la démonstration S et T seront deux strates de Σ, avec $S \subset \bar{T}$.

Propriété de frontière: Pour Σ_1 elle provient de ce que $\overline{T \times N} = \bar{T} \times N$. Pour Σ_2, P étant transverse à S, d'après [6] corollaire 10.4, on a $S \cap P \subset \subset \overline{T \cap P}$, donc $\bar{T} \cap P \subset \overline{T \cap P}$ et P étant fermé $\bar{T} \cap P = \overline{T \cap P}$, d'où

le résultat. Pour Σ_3 on peut raisonner séparément sur chaque composante de M, donc supposer M connexe. Nous distinguons deux cas. Si dim P = dim M alors $P = M$ car P est fermée et le résultat est trivial sauf pour $P-E$; mais Σ étant stricte et localement finie, E est, en raison de la propriété de frontière, réunion localement finie d'ensembles analytiques, donc est un ensemble analytique; donc, ou bien $E = M = P$ c'est-à-dire $\overline{M-E} = \emptyset$, ou bien $\overline{M-E} = M = P$ qui est union de strates. Si, par contre, dim $P \neq$ dim M, alors $P \neq M$ et, pour tout $x \in P$, $\dim_x P < \dim_x M$ et comme P et T sont transverses pour tout $x \in P \cap T$, $\dim_x P \cap T < \dim_x T$, donc $\overline{T-P} = \overline{T}$ et $\overline{T}$ est union de strates de Σ_3; pour ce qui est de $P-E$, ou bien $E = M$ et $P-E = \emptyset$, ou bien dim $E <$ dim M et P étant transverse à toutes les strates de Σ, $\dim_x (P \cap E) < \dim_x P$ pour tout $x \in P \cap E$, donc $\overline{P-E} = P$ qui est union de strates de Σ_3.

Propriété (b) de Whitney: La propriété se lisant sur des cartes de M et N, on peut supposer $M = \boldsymbol{C}^p$ et $N = \boldsymbol{C}^r$. (x_n) et (y_n) seront des suites dans $\boldsymbol{C}^p$, (u_n) et (v_n) dans $\boldsymbol{C}^r$, (a_n) dans $\boldsymbol{C}$. Pour Σ_1, supposons

$$x_n \in T,\ y_n \in S \text{ et } \lim_{n\to\infty} (x_n, u_n) = \lim_{n\to\infty} (y_n, v_n) = (y, v),$$

avec $(y, v) \in S \times \boldsymbol{C}^r$. Supposons d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} a_n(y_n - x_n, v_n - u_n) = l \text{ et } \lim_{n\to\infty} T_{(x_n, u_n)}(T \times \boldsymbol{C}^r) = T_1 \times \boldsymbol{C}^r.$$

Alors $l = (l_1, l_2)$,

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} a_n(y_n - x_n),\ T_1 = \lim_{n\to\infty} T_{x_n}$$

et, d'après la propriété (b) de Whitney pour Σ, $l_1 \in T_1$. Donc $l \in T_1 \times \boldsymbol{C}^r$. Pour Σ_2, supposons $x_n \in T \cap P$, $y_n \in S \cap P$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y \text{ avec } y \in S \cap P,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n(y_n - x_n) = l \text{ et } \lim_{n\to\infty} T_{x_n}(T \cap P) = T_1.$$

Les grassmaniennes étant compactes, on peut extraire une suite (x_{n_i}) de (x_n), telle que

$$\lim_{i\to\infty} T_{x_{n_i}} T = T_2.$$

Alors $T_1 = T_2 \cap T_y P$. D'après la propriété (b) de Whitney pour Σ, $l \in T_2$; d'autre part, comme $x_n \in P$ et $y_n \in P$, $l \in T_y P$, d'où le résultat. Pour Σ_3, il n'y a de problème maintenant que pour $S \cap P$ et $P-E$. Supposons $x_n \in P-E$, $y_n \in S \cap P$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y \text{ avec } y \in S \cap P,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(y_n - x_n) = l \text{ et } \lim_{n\to\infty} T_{x_n}(P-E) = T_1 .$$

Alors $T_1 = T_y P$ et x_n et y_n appartenant à P, $l \in T_y P$.

Cela achève la démonstration.

3. Fibration de Z moins un nombre fini d'hyperplans homotopie de la fibre

3.1. Soit L_∞ un hyperplan de $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ issu de A et distinct de

$$L_1, \cdots, L_m, \mathrm{L}.$$

Nous fixons les notations suivantes:

$$\lambda = \tilde{p}(\tilde{L});\ \lambda_1 = \tilde{p}(\tilde{L}_1); \cdots; \lambda_m = \tilde{p}(\tilde{L}_m);\ \lambda_\infty = \tilde{p}(\tilde{L}_\infty).$$

$$\mathscr{P} = \mathrm{Z} - (\tilde{L}_1 \cup \cdots \cup \tilde{L}_m \cup \tilde{L}_\infty).$$

$$\mathscr{B} = \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) - \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \lambda_\infty\};\ \mathscr{H} = \mathscr{P} - \varphi^{-1}(H);\ \mathscr{C} = \tilde{L} - \varphi^{-1}(H).$$

$$A_1 = \alpha \cap \tilde{L}_1; \cdots; A_m = \alpha \cap \tilde{L}_m;\ A_\infty = \alpha \cap \tilde{L}_\infty .$$

$$\mathscr{A} = \alpha - \{A_1, \cdots, A_m, A_\infty\},\ \pi = \tilde{p}|\mathscr{H}$$

On a $e_0 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{H}$, $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$,

Definition (3.1.1): Nous dirons qu'un fibré localement trivial $f : E \to B$ est compatible avec une partition P de E ou que la fibration respecte P si pour tout $x \in B$, il existe un voisinage ouvert U de x dans B, un espace topologique F, une partition P_F de F en correspondance biunivoque avec P, et un homéomorphisme $\psi : f^{-1}(U) \to U \times F$ tel que pour tout $y \in f^{-1}(U)$, $pr_1(\psi(y)) = f(y)$ et si $y \in S$, $S \in P$, alors $\psi(y) \in U \times S_F$, où S_F est le correspondant de S dans P_F. Nous dirons que la trivialisation locale respecte P.

Proposition (3.1.2): *$\mathscr{P}$ est un fibré topologique localement trivial compatible avec $\tilde{\Sigma}|\mathscr{P}$, de base $\mathscr{B}$ et de projection $\tilde{p}|\mathscr{P}$.*

$\tilde{\Sigma}|\mathscr{P}$ est la stratification de $\mathscr{P}$ possédant les propriétés (a) et (b) de Whitney obtenue en prenant les traces sur l'ouvert $\mathscr{P}$ des strates de $\tilde{\Sigma}$.

Preuve: L'application $\tilde{p}|\mathscr{P}$ est propre et elle est submersive sur chaque strate de $\tilde{\Sigma}|\mathscr{P}$ d'après la proposition (2.2.1), et $\tilde{\Sigma}|\mathscr{P}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de Whitney. Donc, d'après [6] proposition 11.1 (1er théorème d'isotopie de Thom-Mather), $\mathscr{P}$ est un fibré localement trivial de base $\mathscr{B}$ et de projection $\tilde{p}|\mathscr{P}$. En fait la démonstration de [6] proposition 11.1 et le corollaire 10.3 de [6], montrent que la fibration respecte $\tilde{\Sigma}|\mathscr{P}$.

On a le corollaire immédiat:

Corollaire (3.1.3): *$\mathscr{H}$ est un fibré localement trivial de base $\mathscr{B}$ et de projection π, la fibration respectant*

$$\tilde{\Sigma}|\mathscr{H} = \{\alpha, \varphi^{-1}(A-H) - \alpha, \mathscr{H} - \varphi^{-1}(A-H)\}.$$

3.2. Dans cette section, nous démontrons une proposition qui permettra de donner une caractérisation convenable des relations dans $\pi_1(\mathscr{H}, e_0)$. C'est une proposition du type des théorèmes classiques de relèvement d'homotopie. Mais ces théorèmes ne se généralisent pas aux relèvements respectant certaines partitions. Cependant, dans le cas particulier présent, on a:

PROPOSITION (3.2.1): *Pour tout lacet η de base e_0 dans $\mathscr{A}$, il existe une homotopie $J_\eta : \mathscr{C} \times [0, 1] \to \mathscr{H}$ de l'injection canonique de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{H}$, qui relève $\pi \circ \eta$, qui respecte $\varphi^{-1}(A)$ et où e_0 parcourt η.*

C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathscr{C}$, tout $y \in \mathscr{C} \cap \varphi^{-1}(A)$ et tout $t \in [0, 1]$, on a:

$$J_\eta(x, 0) = x;\ \pi(J_\eta(x, t)) = \pi(\eta(t));\ J_\eta(y, t) \in \varphi^{-1}(A);\ J_\eta(e_0, t) = \eta(t).$$

PREUVE: Pour imposer que e_0 parcoure η, il suffit d'imposer que J_η respecte en plus α. En fait, nous faisons en sorte que J_η respecte $\tilde{\Sigma}|\mathscr{H}$.

Soit $O = t_0, t_1, \cdots, t_k = 1$ une subdivision de $[0, 1]$ telle que pour tout i, $O \leqq i \leqq k-1$, $\pi \circ \eta([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, où U_i est un ouvert de $\mathscr{B}$ au-dessus duquel il y a une trivialisation $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ respectant $\tilde{\Sigma}|\mathscr{H}$. Définissons $f_0 : \mathscr{C} \times \{0\} \to \mathscr{H}$ par $f_0(x, O) = x$. Supposons qu'on ait prolongé f_0 en une fonction $f_i : \mathscr{C} \times [O, t_i]$ avec $\pi(f_i(x, t)) = \pi(\eta(t))$ pour $(x, t) \in \mathscr{C} \times [O, t_i]$ et $f_i(x, t) \in S$ pour $S \in \tilde{\Sigma}|\mathscr{H}$, $x \in S \cap \mathscr{C}$, $t \in [O, t_i]$. Nous avons $f_i(\mathscr{C} \times \{t_i\}) \subset \pi^{-1}(U_i)$ et $\psi_i(f_i(x, t_i)) = ((\pi \circ \eta)(t_i), h_i(x))$ pour $x \in \mathscr{C}$ avec $h_i : \mathscr{C} \to F$ continue.

Nous prolongeons maintenant f_i en $f_{i+1} : \mathscr{C} \times [O, t_{i+1}] \to \mathscr{H}$ en posant $f_{i+1}(x, t) = \psi_i^{-1}((\pi \circ \eta)(t), h_i(x))$ pour $(x, t) \in \mathscr{C} \times [t_i, t_{i+1}]$. Alors, par construction $f_{i+1}(x, t) \in S$ pour $S \in \tilde{\Sigma}|\mathscr{H}$, $x \in \mathscr{C} \cap S$, $t \in [O, t_{i+1}]$ et aussi $\pi(f_{i+1}(x, t)) = \pi(\eta(t))$ pour $(x, t) \in \mathscr{C} \times [O, t_{i+1}]$.

Nous obtenons ainsi de proche en proche $f_k = J_\eta$.

4. Détermination du groupe fondamental de Z-φ^{-1}(H)

La méthode suit de près celle de [1] §§ (1.2) et (1.3).

4.1. On a la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés:

$$\pi_2(\mathscr{B}, e_0) \to \pi_1(\mathscr{C}, e_0) \to \pi_1(\mathscr{H}, e_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, e_0) \to 1.$$

Or $\mathscr{B}$ a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles qui est un graphe. Donc $\pi_2(\mathscr{B}, e_0) = 1$. On a alors la petite suite exacte:

$$1 \to \pi_1(\mathscr{C}, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathscr{H}, e_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathscr{B}, \pi(e_0)) \to 1$$

où i_* est induit par l'injection canonique de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{H}$ et π_* induit par π.

D'autre part $\pi|\mathscr{A}$ est un homéomorphisme de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{B}$ donc induit un

isomorphisme de $\pi_1(\mathscr{A}, e_0)$ sur $\pi_1(\mathscr{B}, e_0)$. On en déduit la nouvelle suite exacte:

$$1 \to \pi_1(\mathscr{C}, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathscr{H}, e_0) \xrightarrow{r} \pi_1(\mathscr{A}, e_0) \to 1$$

avec une section naturelle de r : l'homomorphisme induit par l'injection canonique de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{H}$. Cette section est injective et permet d'identifier $\pi_1(\mathscr{A}, e_0)$ à un sous-groupe de $\pi_1(\mathscr{H}, e_0)$. D'autre part i_* permet d'identifier $\pi_1(\mathscr{C}, e_0)$ à un sous-groupe distingué de $\pi_1(\mathscr{H}, e_0)$.

Soient $h_1, \cdots, h_m$ des générateurs du groupe libre $\pi_1(\mathscr{A}, e_0)$.

Supposons donnée une présentation (qui existe toujours) de $\pi_1(\mathscr{C}, e_0)$ par générateurs et relations.

Alors comme dans [1] on obtient:

PROPOSITION (4.1.1.): *Une présentation de $\pi_1(\mathscr{H}, e_0)$ est donnée par les générateurs de $\pi_1(\mathscr{C}, e_0)$ et $h_1, \cdots, h_m$ et par les relations de $\pi_1(\mathscr{C}, e_0)$ et les relations*:

$$gh_j = h_j(g \cdot h_j) \text{ pour } l \leqq j \leqq m \text{ et } g \in \pi_1(\mathscr{C}, e_0)$$

où l'action

$$(h_j, g) \to g \cdot h_j$$

est définie comme suit:

Soient $\eta_1, \cdots, \eta_m$ des représentants qu'on suppose fixés de $h_1, \cdots, h_m$ respectivement. Soit γ un représentant quelconque de g. L'élément $g \cdot h_j$ est la classe d'homotopie dans $\mathscr{C}$ du lacet $\gamma \cdot \eta_j$ défini par:

$$(\gamma \cdot \eta_j)(t) = J_{\eta_j}(\gamma(t), 1)$$

pour $t \in [0, 1]$, J_{η_j} étant défini dans la proposition (3.2.1). La classe $g \cdot h_j$ ne dépend pas du choix de γ, car si $K : [0, 1]^2 \to \mathscr{C}$ est une homotopie de γ sur γ_1, $(x, t) \mapsto J_{\eta_j}(K(x, t), 1)$ est une homotopie de $\gamma \cdot \eta_j$ sur $\gamma_1 \cdot \eta_j$ dans $\mathscr{C}$.

4.2. Nous démontrons maintenant la:

PROPOSITION (4.2.1): *Une présentation de $\pi_1(Z-\varphi^{-1}(H), e_0)$ est donnée par les générateurs et relations de $\pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_0)$ et les relations*

$$g = g \cdot h_j \textit{ pour } 1 \leqq j \leqq m \textit{ et } g \in \pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_0)$$

PREUVE: L'ensemble $Z-\varphi^{-1}(H)$ est obtenu à partir de $\mathscr{H}$ par l'introduction de $(\tilde{L}_1 \cup \cdots \cup \tilde{L}_m \cup \tilde{L}_\infty) \cap (Z-\varphi^{-1}(H))$ qui est une sous-variété fermée de codimension réelle 2 de $Z-\varphi^{-1}(H)$. D'après [5] X. 2.3 l'injection canonique de $\mathscr{H}$ dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ induit donc un homomorphisme $\pi_1(\mathscr{H}, e_0) \to \pi_1(Z-\varphi^{-1}(H), e_0)$ qui est surjectif. Par suite $\pi_1(Z-\varphi^{-1}(H))$ est obtenu par la seule introduction de nouvelles relations.

Comme nouvelles relations on a les relations évidentes $h_i = 1$ pour $l \leqq i \leqq m$ puisque α est simplement connexe et inclus dans $Z-\varphi^{-1}(H)$. Nous allons montrer que ce sont les seules.

Pour cela, il suffit de montrer que tout lacet μ de base e_0 contenu dans $\mathscr{H}$ et homotope dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ au lacet constant en e_0 est homotope dans $\mathscr{H}$ à un certain lacet dont la trivialité dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ est conséquence des relations $h_i = 1$. La relation exprimant que μ est homotope à un point sera alors conséquence des relations $h_i = 1$.

Soit donc K une homotopie dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ de μ vers le lacet constant en e_0. Nous dirons que K est en *position générale* si l'image réciproque de $\tilde{L}_1 \cup \cdots \cup \tilde{L}_m \cup \tilde{L}_\infty$ par K est composée d'un nombre fini de points contenus dans $[0, 1]^2$. Nous avons le:

LEMME (4.2.2): *Soit μ un lacet de base e_0 dans $\mathscr{H}$. S'il existe une homotopie dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ de μ sur le lacet constant en e_0, alors il existe une telle homotopie qui est en position générale.*

PREUVE: C'est un corollaire de [4] IV 4.5 que dans une variété différentiable un lacet est homotope (avec point fixe) à un lacet différentiable, et que si deux lacets différentiables sont homotopes, il existe un homotopie différentiable (toujours avec un point fixe!) entre eux. Soit donc μ_1 un lacet différentiable de base e_0 homotope dans $\mathscr{H}$ à μ et soit K une homotopie différentiable dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ de μ_1 vers le lacet constant en e_0. K est définie dans $\boldsymbol{R}^2$ avec $K(x, t) = \mu_1(x)$ pour $t \leqq 0$, $K(x, t) = e_0$ pour $t \geqq 1$ et $K(x, t) = e_0$ pour $x \leqq 0$ et $x \geqq 1$.

D'après le théorème de Sard (cf. [3] 16.23), les valeurs critiques de $\tilde{p} \circ K$ forment un ensemble de mesure nulle dans $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$. Par conséquent tout ouvert de $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ contient des points qui ne sont pas valeur critique de $\tilde{p} \circ K$.

D'autre part $\tilde{p} : Z \to \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ est propre et submersive, donc d'après le théorème d'Ehresmann c'est une fibration différentiable localement triviale. Pour chaque λ_i, $1 \leqq i \leqq m$ et $i = \infty$, soit U_i un voisinage ouvert de λ_i dans $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$, tel qu'il existe une trivialisation différentiable $\psi_i : \tilde{p}^{-1}(\overline{U}_i) \to \overline{U}_i \times F$ de Z au-dessus de $\overline{U}_i$.

Soit maintenant δ la distance usuelle sur $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ et d_i la distance sur $\overline{U}_i \times F$ définie par $d_i((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sup\,(d(y_1, y_2), \delta(x_1, x_2))$ où d est une distance définissant la topologie de F. Le compact $\psi_i(K([0, 1]^2) \cap \tilde{p}^{-1}(\overline{U}_i))$ ne rencontre pas le fermé $\psi_i(\varphi^{-1}(H) \cap \tilde{p}^{-1}(\overline{U}_i))$. Leur distance pour d_i est donc a_i avec $a_i > 0$. Soit V_i un disque ouvert (pour δ) centré en λ_i, contenu dans U_i, de diamètre inférieur à a_i et tel que $\tilde{p}^{-1}(V_i)$ ne rencontre pas le compact $\mu_1([0, 1])$. On peut supposer de plus les V_i disjoints.

Chaque V_i contient un point ξ_i qui n'est pas valeur critique de $\tilde{p} \circ K$.

D'après [3] 16.26.8 il existe un difféomorphisme h de $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ sur lui-même tel que $h(\xi_i) = \lambda_i$ pour tout i et tel que $h(x) = x$ pour $x \notin V_1 \cup \cdots \cup V_m \cup V_\infty$. Nous définissons $k : Z \to Z$ par $k(x) = \psi_i^{-1}(h(\tilde{p}(x)), q_i(x))$ pour $x \in \tilde{p}^{-1}(V_i)$ et par $k(x) = x$ en dehors de $\tilde{p}^{-1}(V_i)$, avec q_i défini par $\psi_i(x) = (\tilde{p}(x), q_i(x))$. Alors k est un difféomorphisme et $\tilde{p} \circ k = h \circ \tilde{p}$.

Nous posons enfin $K_1 = k \circ K$. Par construction K_1 et K coïncident en dehors de $[0, 1]^2$ et $K_1([0, 1]^2)$ ne rencontre pas $\varphi^{-1}(H)$, donc K_1 est une homotopie différentiable dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ de μ_1 vers le lacet constant en e_0. D'autre part h étant un difféomorphisme $\tilde{p} \circ K_1 = h \circ \tilde{p} \circ K$ et $\tilde{p} \circ K$ ont mêmes points critiques. Donc pour tout i, $1 \leqq i \leqq m$ et $i = \infty$, λ_i n'est pas valeur critique de $\tilde{p} \circ K_1$ sans quoi ξ_i serait valeur critique de $\tilde{p} \circ K$. Alors $(\tilde{p} \circ K_1)^{-1}(\lambda_i)$ est une sous-variété fermée de $\boldsymbol{R}^2$ de dimension 0, dont l'intersection avec le compact $[0, 1]^2$ est formée d'un nombre fini de points. Cela montre que $K_1 | [0, 1]^2$ est en position générale, et il suffit de la juxtaposer avec l'homotopie de μ vers μ_1 dans $\mathscr{H}$ pour achever la démonstration du lemme (4.2.2).

Nous supposons maintenant que K est en position générale. Nous allons procéder à un 'découpage' de K pour démontrer la proposition (4.2.1). Soient $k_1, \cdots, k_p$ les points de $[0, 1]^2$ tels que $K(k_i) \in \tilde{L}_1 \cup \cdots \cup \tilde{L}_m \cup \tilde{L}_\infty$. Nous allons extraire p disques ouverts $D_1, \cdots, D_p$ respectivement centrés en $k_1, \cdots, k_p$ et d'adhérences mutuellement disjointes.

Nous pouvons choisir les D_i suffisamment petits pour que si ξ_i est un lacet contenu dans $Fr\, D_i$ d'origine c_i alors $K \circ \xi_i$ est homotope comme application (sans point fixe) dans $\mathscr{H}$ à un lacet contenu dans $\mathscr{A}$. Cela résulte du:

LEMME (4.2.3): *Si M un point de $\tilde{L}_i - \varphi^{-1}(H)$ pour i fixé, $1 \leqq i \leqq m$ ou $i = \infty$. Il existe un voisinage V de M dans $Z - \varphi^{-1}(H)$ tel que tout lacet de $V - \tilde{L}_i$ soit contenu dans $\mathscr{H}$ et homotope comme application (sans point fixe) dans $\mathscr{H}$ à un lacet de $\mathscr{A}$.*

PREUVE: Si nous considérons la stratification vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney de Z en les deux strates α et $Z - \alpha$, $\tilde{p} : Z \to \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ est submersive sur chacune des strates et propre. D'après le premier théorème d'isotopie de Thom et Mather (cf. [6] proposition 11.1), $\tilde{p}$ est une fibration localement triviale respectant cette stratification. Soit donc U un voisinage ouvert de λ_i, avec $\overline{U}$ ne contenant pas λ_j pour $j \neq i$ et tel qu'il existe une trivialisation $\psi : \tilde{p}^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U} \times F$ de Z au-dessus de $\overline{U}$ respectant α. Soit a défini par $\psi(A_i) = (\lambda_i, a)$. Comme ψ respecte α on a $\psi(\alpha \cap \tilde{p}^{-1}(\overline{U})) = \overline{U} \times \{a\}$. Posons $H_1 = \psi(\varphi^{-1}(H) \cap \tilde{p}^{-1}(\overline{U}))$. H_1 est compact. On a $\psi(\tilde{L}_i) = \{\lambda_i\} \times F$. On est donc ramené à montrer l'assertion suivante:

Soit N un point de $(\{\lambda_i\}\times F)-H_1$. Il existe un voisinage W de N dans $(\overline{U}\times F)-H_1$ tel que tout lacet contenu dans $W-(\{\lambda_i\}\times F)$ soit homotope comme application dans $(\overline{U}-\{\lambda_i\})\times F-H_1$ à un lacet contenu dans $\overline{U}\times\{a\}$.

Posons $N=(\lambda_i, b)$, $H_1\cap(\{\lambda_i\}\times F)=\{\lambda_i\}\times H_F$. Il existe un chemin d'origine b et d'extrémité a dans $F-H_F$. En effet ψ^{-1} envoie le couple $(\{\lambda_i\}\times F, \{\lambda_i\}\times H_F)$ sur $(\tilde{L}_i, \tilde{L}_i\cap\varphi^{-1}(H))$ qui est à son tour envoyé par φ sur le couple $(L_i, L_i\cap H)$ et $L_i-L_i\cap H$ est connexe par arcs puisque $L_i\cap H$ est une hypersurface algébrique de L_i. Soit donc κ un chemin joignant b à a dans $F-H_F$.

Il existe un voisinage ouvert contractile U_0 de b et un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de H_F rencontrant ni U_0 ni $\kappa([0, 1])$. La projection sur le premier facteur de $H_1\cap(\overline{U}\times(F-\mathscr{U})$ est un compact ne contenant pas λ_i. Soit V_0 un voisinage ouvert de λ_i contenu dans $\overline{U}$ et ne rencontrant pas cette projection. Alors on a $(V_0\times F)\cap H_1=(V_0\times\mathscr{U})\cap H_1$ et $V_0\times(F-\mathscr{U})$ ne rencontre pas H_1.

Nous prenons pour W l'ensemble $V_0\times U_0$ qui ne rencontre pas $H_1\cdot U_0$ étant contractile, $(V_0-\{\lambda_i\})\times\{b\}$ est rétracte par déformation de $W-(\{\lambda_i\}\times F)$. Par conséquent tout lacet μ contenu dans ce dernier ensemble est homotope comme application dans $(\overline{U}-\{\lambda_i\})\times F-H_1$ à un lacet μ_1 contenu dans $(V_0-\{\lambda_i\})\times\{b\}$.

Alors $J:[0, 1]^2\to(\overline{U}-\{\lambda_i\})\times F-H_1$ définie par $J(x,y)=(pr_1(\mu_1(x)), \kappa(y))$ est une homotopie comme application de μ_1 vers un lacet contenu dans $\overline{U}\times\{a\}$, ce qui démontre le lemme (4.2.3).

Nous reprenons la démonstration de la proposition (4.2.1). Les D_i étant maintenant convenablement choisis, $K\circ\xi_i$ est homotope dans $\mathscr{H}$ à un lacet de base $K(c_i)$ de la forme $\kappa_i\mu_i\kappa_i^{-1}$ où μ_i est contenu dans $\mathscr{A}$. La trivialité de μ_i dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ est conséquence des relations $h_i=1$.

On voit, en réalisant un homéomorphisme du disque à p trous $\mathscr{D}=[0, 1]^2-(D_1\cup\cdots\cup D_p)$ qu'on peut trouver p lacets $\zeta_1,\cdots,\zeta_p$ dont les classes d'homotopie engendrent $\pi_i(\mathscr{D}, 0)$ et qui sont de la forme $\zeta_i=\rho_i\xi_i\rho_i^{-1}$ où ξ_i est un lacet contenu dans $Fr\ D_i$ et ρ_i un chemin de $\mathscr{D}$ d'origine O et d'extrémité située sur $Fr\ D_i$. En paramétrant le bord de $[0, 1]^2$ par l'abscisse curviligne comptée dans le sens direct, on obtient un lacet de base O, homotope à un composé des ζ_i et de leurs inverses. Posons $\sigma_i=(K\circ\rho_i)\kappa_i$. Alors μ est homotope dans $\mathscr{H}$ à un composé des $\sigma_i\mu_i\sigma_i^{-1}$ et de leurs inverses. La trivialité de μ dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ est donc conséquence de la trivialité des μ_i qui elle-même est conséquence des relations $h_j=1$.

La proposition (4.2.1) est ainsi démontrée.

5. Comparaison des groupes fondamentaux de $Z-\varphi^{-1}(H)$, $P^n(C)-H$, $\hat{L}-\varphi^{-1}(H)$, $L-H$

5.1. PROPOSITION (5.1.1): *Soit $e_1 \in Z-\varphi^{-1}(H)$. L'application*

$$\varphi_1 : \pi_1(Z-\varphi^{-1}(H), e_1) \to \pi_1(P^n(C)-H, \varphi(e_1))$$

induite par la restriction de φ à $Z-\varphi^{-1}(H)$ est un isomorphisme.

PREUVE: Il suffit de le démontrer pour $e_1 \in Z-\varphi^{-1}(A \cup H)$. Alors on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z-\varphi^{-1}(A \cup H), e_1) & \xrightarrow{i_1} & \pi_1(Z-\varphi^{-1}(H), e_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ \pi_1(P^n(C)-(A \cup H), \varphi(e_1)) & \xrightarrow{i_2} & \pi_1(P^n(C)-H, \varphi(e_1)) \end{array}$$

où φ_2 est induit par la restriction de φ à $Z-\varphi^{-1}(A \cup H)$ et les flèches horizontales induites par les injections canoniques. La restriction de φ à $Z-\varphi^{-1}(A)$ est un homéomorphisme sur $P^n(C)-A$, donc φ_2 est un isomorphisme. $A-H$ est une sous-variété fermée de codimension réelle 4 de $P^n(C)-H$, donc i_2 est un isomorphisme (cf. [4] X.2.3).

$\varphi^{-1}(A)-\varphi^{-1}(H)$ étant une sous-variété fermée de $Z-\varphi^{-1}(H)$ de codimension réelle 2, i_1 est surjectif. La commutativité du diagramme entraîne que i_1 est injectif et par suite que φ_1 est bijectif.

PROPOSITION (5.1.2): *Soite $e_1 \in \tilde{L}-\varphi^{-1}(H)$. L'application*

$$\varphi_3 : \pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_1) \to \pi_1(L-H, \varphi(e_1))$$

induite par la restriction de φ à $\tilde{L}-\varphi^{-1}(H)$ est un isomorphisme.

PREUVE: En effet la restriction de φ à $\tilde{L}$ est un homéomorphisme sur L.

PROPOSITION (5.1.3): *Soit $e \in L-H$. L'homomorphisme*:

$$j : \pi_1(L-H, e) \to \pi_1(P^n(C)-H, e)$$

induit par l'injection canonique est surjectif.

PREUVE: Il suffit de le démontrer pour $\varphi(e_0)$. La proposition (4.2.1) donne alors que l'injection canonique de $\tilde{L}-\varphi^{-1}(H)$ dans $Z-\varphi^{-1}(H)$ induit un homomorphisme surjectif $i_3 : \pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_0) \to \pi_1(Z-\varphi^{-1}(H), e_0)$. Et on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_0) & \xrightarrow{i_3} & \pi_1(Z-\varphi^{-1}(H), e_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ \pi_1(L-H, \varphi(e_0)) & \xrightarrow{j} & \pi_1(P^n(C)-H, \varphi(e_0)) \end{array}$$

La surjectivité de $\varphi_1 \circ i_3$ implique alors celle de j.

Jusqu'ici nous ne nous sommes pas servis de l'hypothèse $n \geqq 3$ sur $\boldsymbol{P}^n(C)$, mais seulement de $n \geqq 2$ (en faisant intervenir A). La proposition (5.1.3) et le choix de L dans (1.3) donnent alors:

PROPOSITION (5.1.4): *Soit $r \geqq 2$ et $M \subset \boldsymbol{P}^r(C)$ une hypersurface algébrique. Si M est munie d'une stratification vérifiant les conditions* (a) *et* (b) *de Whitney et si P est un hyperplan transverse* à *toutes les strates, l'homomorphisme de π_1 $(P-M, e)$ dans $\pi_1(\boldsymbol{P}^r(C)-M, e)$ induit par l'injection canonique avec $e \in P-M$, est surjectif.*

Un autre corollaire de la proposition (4.2.1) est le:

THÉORÈME (VAN KAMPEN) (5.1.5): *Soit H une courbe algébrique réduite de degré n dans $\boldsymbol{P}^2(C)$. Soit A un point de $\boldsymbol{P}^2(C)-H$. Soient $L_1, \cdots, L_m, L_\infty$ des droites issues de A parmi lesquelles toutes celles qui sont tangentes à H ou qui passent par des points singuliers de H. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \lambda_\infty$ les éléments de $\boldsymbol{P}^1(C)$ représentant les directions de $L_1, \cdots, L_m, L_\infty$ respectivement. Soit L une droite passant par A de direction λ distincte de $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \lambda_\infty$.*

L'espace $L-H$ est une droite projective complexe moins n points. On donne de manière naturelle une présentation de $\pi_1(L-H, A)$ par n générateurs $g_1, \cdots, g_n$ et le relation $g_1, \cdots g_n = 1$.

Soient $\eta_1, \cdots, \eta_m$ des lacets dont les classes d'homotopie engendrent le groupe libre à m générateurs $\pi_1(\boldsymbol{P}^1(C)-\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \lambda_\infty\}, \lambda)$. Pour chaque η_j, $1 \leqq j \leqq m$, on peut procéder à une homotopie de l'injection canonique de $L-H$ dans $\boldsymbol{P}^2(C)-H$, homotopie qui relève η_j et où A reste fixe. Pour chaque i, $1 \leqq i \leqq n$, cette homotopie donne une transformation de g_i en $\Phi_{ij}(g_1, \cdots, g_n)$.

Le groupe $\pi_1(\boldsymbol{P}^2(C)-H, A)$ est alors présenté par les générateurs $g_1, \cdots, g_n$ et les relations $g_1 \cdots g_n = 1$ et $g_i = \Phi_{ij}(g_1, \cdots, g_n)$ pour $1 < i \leqq n$ et $1 \leqq j \leqq m$.

PREUVE. Si S est l'ensemble des points singuliers de H, $\{S, H-S, \boldsymbol{P}^2(C)-H\}$ est une stratification de $\boldsymbol{P}^2(C)$ satisfaisant aux conditions de la proposition (1.1.1) (cf. [9] théorème 22.1) et L est transverse à toutes les strates de cette stratification. Le théorème est alors conséquence immédiate des propositions (4.2.1), (5.1.1) et (5.1.2).

5.2. PROPOSITION (5.2.1). *Si $n \geqq 3$, l'application i_3 de $\pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_0)$ dans $\pi_1(Z-\varphi^{-1}(H), e_0)$ induite par l'injection canonique est un isomorphisme.*

PREUVE. D'après le lemme (2.2.2), $\Sigma|L$ est une stratification vérifiant les propriétés (a) et (b) de Whitney et l'hypersurface algébrique $L \cap H$ de L

est union de strates. A étant transverse à toutes les strates de Σ, est transverse dans L à toutes les strates de $\Sigma|L$. La condition $n \geqq 3$ sur $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ permet d'appliquer la proposition (5.1.4) qui donne: l'homomorphisme de $\pi_1(A-H, \varphi(e_0))$ dans $\pi_1(L-H, \varphi(e_0))$ induit par l'injection canonique est surjectif. La restriction de φ à $\tilde{L}$ étant un homéomorphisme sur L, on en déduit que l'application $j_1 : \pi_1(\varphi^{-1}(A-H) \cap \tilde{L}, e_0) \to \pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_0)$ induite par l'injection canonique est un homomorphisme surjectif.

Soit maintenant $g \in \pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_0)$. Soit γ un représentant de g. Nous allons montrer que la relation $g = g \cdot h_j$ de la proposition (4.2.1) définie en (4.1) est déjà vraie dans $\pi_1(\tilde{L}-\varphi^{-1}(H), e_0)$ ce qui donnera le résultat. D'après la surjectivité de j_1, il existe une homotopie K_1: $[0, 1]^2 \to \tilde{L}-\varphi^{-1}(H)$ de γ vers un lacet γ_1 de base e_0 dans $\varphi^{-1}(A-H) \cap \tilde{L}$. Alors K_2: $[0, 1]^2 \to \tilde{L}-\varphi^{-1}(H)$ définie par $K_2(x, t) = J_{\eta_j}(K_1(x, t), 1)$ est une homotopie de $\gamma \cdot \eta_j$ vers $\gamma_1 \cdot \eta_j$. Et puisque J_{η_j} respecte $\varphi^{-1}(A)$, K_3 définie par $K_3(x, t) = J_{\eta_j}(K_1(x, 1), t)$ est une homotopie de γ_1 vers $\gamma_1 \cdot \eta_j$ dans $\varphi^{-1}(A-H)$, mais sans point fixe.

Cependant comme le point base e_0 décrit le lacet η_j dans $\alpha \subset \varphi^{-1}(A-H)$, et comme α est simplement connexe, il vient que γ_1 est homotope à $\gamma_1 \cdot \eta_j$ (avec point fixe) dans $\varphi^{-1}(A-H)$. Par suite $\varphi \circ \gamma_1$ est homotope à $\varphi \circ (\gamma_1 \cdot \eta_j)$ dans $A-H$, avec point base $\varphi(e_0)$. La restriction de φ à $\tilde{L}$ étant un homéomorphisme sur L, il vient que γ_1 est homotope à $\gamma_1 \cdot \eta_j$ dans $\tilde{L} \cap \varphi^{-1}(A-H)$. Nous avons donc montré que γ est homotope à $\gamma \cdot \eta_j$ dans $\tilde{L}-\varphi^{-1}(H)$, ce qui prouve (5.2.1).

5.3. Le théorème de Zariski est conséquence immédiate des propositions (1.2.1), (5.1.1), (5.1.2) et (5.2.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Cheniot: *Le théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe algébrique plane.* Séminaire Norguet. Université de Paris VII 1971–72.

[2] W. L. Chow: On compact complex analytic varieties, *Amer. Jour. of Maths 71* (1949) 893–914.

[3] J. Dieudonne: *Eléments d'analyse*; *Tome 3*, Gauthier - Villars, Paris.

[4] C. Godbillon: *Topologie algébrique*; Hermann 1971.

[5] H. Hamm et Lê Dũng Tráng: *Un théorème de Zariski du type de Lefschetz: A paraître dans Topology.*

[6] J. Mather: *Notes on topological stability.* Harvard University 1970.

[7] R. Thom: Ensembles et morphismes stratifiés. *Bull. Amer. Math. Soc. 75*, no 2 (1969).

[7 Bis] E. van Kampen: On the fundamental group of an algebraic curve. *American Journal of Mathematics, 55*, 1933 255–260.

[8] A. N. Varchenko: Un théorème sur l'équisingularité des familles de variétés algébriques (en Russe), *Ouspekhi Mathematitcheskhi Naouk tome XXVI, fascicule 1* (1971) 217–218.

[9] H. WHITNEY: Tangents to an analytic variety. *Ann. Math.* 81 no 3 (1965) 496–549.
[10] O. ZARISKI: On the Poincaré group of a projective hypersurface. *Ann. Math.* *38*, no 1 (1937) 131–141.

(Oblatum: 14–IX–1972 & 11–IV–1973)

Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06 – Nice – France