

COMPOSITIO MATHEMATICA

BERND ROSENBERGER

EBERHARD SCHOCK

Über nukleare (F) -Räume mit Basis

Compositio Mathematica, tome 25, n° 2 (1972), p. 207-219

http://www.numdam.org/item?id=CM_1972__25_2_207_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÜBER NUKLEARE (F) -RÄUME MIT BASIS

von

Bernd Rosenberger und Eberhard Schock

Von Dynin und Mitiagin [1], [3] wurde gezeigt, daß in einem nuklearen (F) -Raum jede Basis absolut ist. Wojtyński [8] gelang die Umkehrung dieser Aussage: ist in einem (F) -Raum mit Basis jede Basis absolut, so ist der Raum nuklear. Hier werden nun zunächst analoge Aussagen für φ -nukleare (F) -Räume bewiesen, nämlich daß in einem φ -nuklearen (F) -Raum mit Basis jede Basis φ -absolut ist und daß andererseits ein (F) -Raum mit Basis φ -nuklear ist, wenn in ihm jede Basis φ -absolut ist. Dabei heißt ein topologischer linearer Raum E φ -nuklear, wenn es zu jeder Nullumgebung U der Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ gibt, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\delta_n(V, U)) < \infty$, wobei $\delta_n(V, U)$ die n -ten Durchmesser von V bezüglich U bezeichnen und $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige, streng monoton steigende, subadditive Funktion mit $\varphi(0) = 0$ ist (vgl. [6]). Im Gegensatz zu [8] wurde in [7] gezeigt, daß die Nuklearität eines (F) -Raumes E schon dann nachgewiesen werden kann, wenn man Aussagen über das Verhalten nur einer einzigen Basis hat: nämlich, wenn in E eine Basis existiert, die sowohl p -absolut als auch q -absolut ist mit $p \neq q$, $p \geq 1$, $q \geq 1$. Hier soll nun ferner die Nuklearität eines (F) -Raumes E für den Fall bewiesen werden, daß in E eine p -absolute Basis mit $0 < p < 1$ existiert. Insbesondere ist dann für solche Funktionen $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, die eine echte Teilklasse der Klasse aller nuklearen Räume beschreiben, ein (F) -Raum mit Basis genau dann φ -nuklear, wenn eine Basis φ -absolut ist.

1.

1.1. Eine Folge $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ($\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$) von Elementen e_0, e_1, \dots eines lokalkonvexen Raumes E heißt bekanntlich eine *Basis*, wenn es zu jedem $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Zahlenfolge $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \xi_k e_k.$$

Durch die Zuordnungen $x \mapsto \xi_k$ werden auf E lineare Funktionale f_k mit $f_k(x) = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$, definiert; dabei gilt $f_i(e_k) = \delta_{ik}$.

Eine Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *gleichstetig*, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ gibt, so daß die Ungleichungen

$$|f_k(x)|_{p_U(e_k)} \leq p_V(x), \quad k \in \mathbb{N}$$

für alle $x \in E$ gelten. Die linearen Funktionale f_k sind dann stetig. Dabei seien $\mathfrak{U}(E)$ die Nullumgebungsbasis von absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebungen von E und p_U das Minkowski-Funktional $p_U(x) := \inf \{\rho > 0 : x \in \rho U\}$. Bekanntlich ist in einem (F) -Raum, d.h. in einem vollständigen metrisierbaren lokalkonvexen Raum, jede Basis gleichstetig.

1.2. Für zwei Teilmengen A und B eines lokalkonvexen Raumes E mit $A \subset B$ bezeichnet man mit

$$\delta_n(A, B) = \inf \{ \delta : A \subset \delta B + E_n \},$$

wobei das Infimum über alle Teilräume $E_n \subset E$ mit $\dim E_n \leq n$ gebildet wird, den *n-ten (Kolmogorov-)Durchmesser von A bezüglich B*. Wir nennen E φ -*nuklear* (vgl. [6]), wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$ gibt, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\delta_n(V, U)) < \infty.$$

Dabei sei $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige, streng monoton steigende subadditive Funktion mit $\varphi(0) = 0$, die ohne Einschränkung als konkav [5] angenommen und bei der ohne Einschränkung $\varphi(1) = 1$ gewählt werden soll. Da ein lokalkonvexer Raum E genau dann nuklear ist, wenn für alle $U \in \mathfrak{U}(E)$ ein $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $\sum \delta_n(V, U) < \infty$ existiert [3], folgt aus der Subadditivität von φ , daß jeder φ -nukleare Raum auch nuklear ist.

Zum Beweis des Hauptergebnisses dieses Abschnittes, Satz 1.8. benötigen wir die folgenden Lemmata (vgl. auch [3]).

1.3. LEMMA. Sei U_∞ die Einheitskugel in dem Banachraum \mathfrak{L}^∞ der beschränkten Zahlenfolgen. Sei $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\delta_0 \geq \delta_1 \geq \dots > 0$. Ferner sei

$$B := \{ \{ \xi_k \}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{L}^\infty : \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{-1} |\xi_k| \leq 1 \}.$$

Dann gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$(n+1)^{-1} \delta_n \leq \delta_n(B, U_\infty) \leq \delta_n.$$

BEWEIS. (i) Wir beweisen zunächst die rechte Ungleichung. Dazu betrachten wir in \mathfrak{L}^∞ die linearen Teilräume

$$E_n := \{ \{ \xi_k \}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Y}^\infty : \xi_k = 0 \text{ für } k \geq n \}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gelten wegen

$$\delta_n^{-1} \sup_{k \geq n} |\xi_k| \leq \delta_n^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k^{-1} |\xi_k| \leq 1$$

die Beziehungen $B \subset \delta_n U_\infty + E_n$, so daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\delta_n(B, U_\infty) \leq \delta_n.$$

(ii) Wegen

$$(n+1)^{-1} \delta_n \sum_{k=0}^n \delta_k^{-1} |\xi_k| \leq (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^n |\xi_k| \leq \sup_{k \leq n} |\xi_k| \leq 1$$

erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$: $U_\infty \cap E_{n+1} \subset \delta_n^{-1}(n+1)B$, so daß

$$(n+1)^{-1} \delta_n \leq \delta_n(B, U_\infty)$$

(vgl. [4]).

1.4. LEMMA. Seien $\alpha_k \geq 0$. Sei

$$A := \{ \{ \xi_k \} \in \mathcal{Y}^\infty : \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{-1} |\xi_k| \leq 1 \text{ mit } \xi_k = 0 \text{ für } \alpha_k = 0 \}$$

(wobei $0/0$ durch 0 zu ersetzen ist). Ferner gelte

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(A, U_\infty)) \leq 1.$$

Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha_k) \leq 1.$$

BEWEIS. Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(A, U_\infty)) \leq 1$ gilt $\delta_k(A, U_\infty) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Damit ist die Menge A kompakt in \mathcal{Y}^∞ , so daß $\alpha_k \rightarrow 0$. Sei nun $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Permutation der natürlichen Zahlen, so daß die Folge $\{\alpha_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fällt. Aus Lemma 1.3. erhalten wir dann mit $\delta_n := \alpha_{k_n}$ auch $\delta_n \leq (n+1)\delta_n(A, U_\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\delta_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(A, U_\infty)) \leq 1.$$

1.5. LEMMA. Sei E ein lokalkonvexer Raum. E ist genau dann φ -nuklear, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathcal{U}(E)$ und zu jedem $p > 0$ eine Nullumgebung $V_p \in \mathcal{U}(E)$ gibt, so daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)^p \delta_k(V_p, U)) \leq 1.$$

BEWEIS. Wir beweisen nur die eine Richtung der Aussage. Da E φ -

nuklear ist, gibt es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ und zu jedem $p > 0$ eine Nullumgebung $W_p \in \mathfrak{U}(E)$ mit $W_p \subset U$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\delta_k(W_p, U)) \leq 2^{-(p+1)}.$$

Zu W_p findet man eine Nullumgebung $V_p \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V_p \subset W_p$ und $\delta_n(V_p, W_p) \leq (n+1)^{-p}$, denn E ist als φ -nuklearer Raum auch nuklear. Somit erhalten wir

$$\delta_{2k}(V_p, U) \leq \delta_k(V_p, W_p) \delta_k(W_p, U) \leq (k+1)^{-p} \delta_k(W_p, U), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)^p \delta_k(V_p, U)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((2k+1)^p \delta_{2k}(V_p, U)) + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((2k+2)^p \delta_{2k+1}(V_p, U)) \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(2^p (k+1)^p \delta_{2k}(V_p, U)) \leq 2^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)^p \delta_{2k}(V_p, U)) \\ &\leq 2^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(\delta_k(W_p, U)) \leq 1. \end{aligned}$$

Wir beweisen nun den folgenden wichtigen

1.6. SATZ. *Sei E ein φ -nuklearer (F) -Raum mit Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und Koeffizientenfunktionalen $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Dann gibt es zu jeder stetigen Halbnorm p_i eine stetige Halbnorm p_j , so daß für alle $x \in E$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)| p_i(e_k)) \leq \max \{1, p_j(x)\}.$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis in Anlehnung an [3] durch. Da in einem (F) -Raum jede Basis gleichstetig ist, gibt es zu jeder stetigen Halbnorm p_i eine stetige Halbnorm p_m mit $p_i(x) \leq p_m(x)$ und $|f_k(x)| p_i(e_k) \leq p_m(x)$, $k \in \mathbb{N}$, für alle $x \in E$. Sei nun

$$V_i := \{x \in E : \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k(x)| p_i(e_k) \leq 1\},$$

dann gilt wegen $|f_k(x)| p_i(e_k) \leq p_m(x)$, $k \in \mathbb{N}$, schließlich $U_m \subset V_i$, wobei $U_m := \{x \in E : p_m(x) \leq 1\}$ die zu p_m gehörende abgeschlossene absolut-konvexe Nullumgebung in E ist. Da E φ -nuklear ist, findet man nach Lemma 1.5. zu U_m eine Nullumgebung $U_n \subset U_m$, d.h. $p_n(x) \geq p_m(x)$ für $x \in E$, mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1) \delta_k(U_n, U_m)) \leq 1.$$

Da die Basis $\{e_k\}$ gleichstetig ist, findet man zur stetigen Halbnorm p_n wiederum eine stetige Halbnorm p_j mit $p_j(x) \geq p_n(x)$ und $|f_k(x)|p_n(e_k) \leq p_j(x)$, $k \in \mathbb{N}$, für $x \in E$. Sei nun

$$q_j(f_k) := \sup \{|f_k(x)| : p_j(x) \leq 1, x \in E\},$$

dann gilt für $p_n(e_k) > 0$

$$|f_k(x)| \leq \frac{p_j(x)}{p_n(e_k)} \quad \text{und} \quad q_j(f_k) \leq \frac{1}{p_n(e_k)}.$$

Wir setzen ferner

$$A_j := \left\{ x \in E : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f_k(x)|}{q_j(f_k)} \leq 1; f_k(x) = 0 \text{ für } q_j(f_k) = 0 \right\},$$

dann gilt wegen

$$p_n(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|p_n(e_k) = \sum_{p_n(e_k) > 0} |f_k(x)|p_n(e_k) \leq \sum_{p_n(e_k) > 0} \frac{|f_k(x)|}{q_j(f_k)} \leq 1$$

auch $A_j \subset U_n$. Somit erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$ $\delta_k(A_j, V_i) \leq \delta_k(U_n, U_m)$, so daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi((k+1)\delta_k(A_j, V_i)) \leq 1.$$

Mit $\alpha_k := q_j(f_k)p_i(e_k)$ und

$$A := \left\{ \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in l^{\infty} : \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{-1} |\xi_k| \leq 1; \xi_k = 0 \text{ für } p_i(e_k) = 0 \right\}$$

gelten dann die Beziehungen $\delta_k(A, U_{\infty}) = \delta_k(A_j, V_i)$, $k \in \mathbb{N}$, wobei U_{∞} die Einheitskugel in l^{∞} ist. Nach Lemma 1.4. gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(q_j(f_k)p_i(e_k)) \leq 1.$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)|p_i(e_k)) &= \sum_{p_i(e_k) > 0} \varphi(|f_k(x)|p_i(e_k)) \leq \sum_{p_i(e_k) > 0} \varphi(q_j(f_k)p_j(x)p_i(e_k)) \\ &\leq \max \{1, p_j(x)\} \sum_{p_i(e_k) > 0} \varphi(q_j(f_k)p_i(e_k)) \leq \max \{1, p_j(x)\} \end{aligned}$$

für alle $x \in E$. Dabei beachte man, daß aus $p_i(e_k) > 0$ stets $p_n(e_k) > 0$ und damit $q_j(f_k) < \infty$ für solche natürlichen Zahlen k gilt.

1.7. DEFINITION. Eine Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eines lokalkonvexen Raumes E heißt φ -absolut, wenn für jede Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)|p_V(e_k)) \leq 1 = \varphi(1)$$

für alle $x \in V$ existiert.

Dann besteht für alle $x \in E$ die Identität

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)e_k,$$

wobei die Reihe absolut- φ -summierbar ist (vgl. [5]). Für $\varphi_p : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $\varphi_p(t) := t^p$, $0 < p \leq 1$, erhalten wir eine p -absolute Basis. Natürlich ist jede φ -absolute Basis auch 1-absolut (= absolut).

1.8. Mit Definition 1.7. lautet dann Satz 1.6.

SATZ. *In einem φ -nuklearen (F)-Raum E mit Basis ist jede Basis φ -absolut.*

KOROLLAR. *In einem nuklearen (F)-Raum E mit Basis ist jede Basis p -absolut, $0 < p \leq 1$.*

2.

2.1. Sei P eine Menge nichtnegativer Zahlenfolgen $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, so daß
 (i) zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in P$ existiert mit $\rho_k > 0$,
 (ii) für alle $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in P$ stets eine Folge $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in P$ existiert mit $\sigma_n \geq \max\{\rho_n, \tau_n\}$.

In [2] wird der Folgenraum

$$A_\varphi(P) = \{ \{ \xi_k \}_{k \in \mathbb{N}} = : \xi : q_\rho(\xi) := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\xi_k| \rho_k) < \infty ; \{ \rho_k \} \in P \}$$

mit der durch die Nullumgebungsbasis

$$\{ U_{\rho, \varepsilon} := q_\rho^{-1}([0, \varepsilon]) : \{ \rho_k \}_{k \in \mathbb{N}} = \rho \in P, \varepsilon > 0 \}$$

erzeugten Topologie betrachtet. $A(P)$ bezeichne den Raum $A_{\text{id}}(P)$. Dieser Folgenraum $A_\varphi(P)$ ist genau dann lokalkonvex, wenn er zu $A(P)$ isomorph ist. $A_\varphi(P)$ ist genau dann φ -nuklear, wenn es zu jeder Folge $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in P$ eine Folge $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in P$ gibt, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\sigma_n^{-1} \rho_n) < \infty$, wobei $0/0 = 0$ zu setzen ist; wenn es zu jeder Folge $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in P$ eine Folge $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in P$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\sigma_n^{-1} \rho_n) < \infty$ gibt, dann ist $A_\varphi(P)$ auch lokalkonvex. Ist also $A_\varphi(P)$ insbesondere φ -nuklear, so ist $A_\varphi(P)$ lokalkonvex (vgl. [2] und [6]).

2.2. (F)-Räume, in denen es eine φ -absolute Basis gibt, lassen sich nun sehr einfach darstellen. Es gilt nämlich der

SATZ. Jeder (F)-Raum E mit einer φ -absoluten Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ kann mit einem Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$ identifiziert werden.

BEWEIS. Wir setzen in E das Fundamentalsystem $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen Halbnormen von E ohne Einschränkung als monoton wachsend voraus, d.h. für $m \leq n$ gelte $p_m(x) \leq p_n(x)$ für alle $x \in E$. Sei nun $P := \{\{p_n(e_k)\}_{n, k \in \mathbb{N}}\}$. Dazu erzeugen wir den Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$. Sei $K: E \rightarrow \Lambda_\varphi(P)$ die durch $x \mapsto \{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ definierte lineare Abbildung. Da die Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ φ -absolut ist, existiert zu jeder stetigen Halbnorm p_i eine stetige Halbnorm p_j mit

$$q_i(\{f_k(x)\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)|p_i(e_k)) \leq 1$$

für $x \in U_j = \{x \in E : p_j(x) \leq 1\}$, so daß $KU_j \subset V_{i,1}$, wobei $V_{i,1} = \{\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} : q_i(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\xi_k|p_i(e_k)) \leq 1\}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Stetigkeit von φ ein $\alpha > 0$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|f_k(x)|\alpha p_i(e_k)) \leq \varepsilon \text{ für } x \in U_j,$$

so daß $K(\alpha U_j) \subset V_{i,\varepsilon} = \{\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} : q_i(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\xi_k|p_i(e_k)) \leq \varepsilon\}$. K ist also stetig. Da ferner alle Folgen $\{\xi_k e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \Lambda_\varphi(P)$ in E absolut- φ -summierbar und damit absolut-summierbar sind (vgl. [5]), kann man $x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e_k$ setzen, und es gilt $Kx = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. K ist also eine Abbildung auf $\Lambda_\varphi(P)$. Wegen

$$p_i(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|p_i(e_k) \leq \varphi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(|\xi_k|p_i(e_k))\right) = \varphi^{-1}(q_i(\xi))$$

gilt für die Abbildung $K^{-1}: \Lambda_\varphi(P) \rightarrow E$ mit $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \mapsto x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e_k$ dann $K^{-1}(V_{i,1}) \subset U_i$, d.h. K^{-1} ist ebenfalls stetig.

2.3. Faßt man die Ergebnisse von Satz 1.8. und Satz 2.2. zusammen, so erhält man den

SATZ. Jeder φ -nukleare (F)-Raum E mit Basis kann mit einem φ -nuklearen Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$ identifiziert werden.

KOROLLAR. Jeder φ -nukleare (F)-Raum E mit Basis ist isomorph zu einem φ -nuklearen Folgenraum $\Lambda(P)$.

BEWEIS. Da $\Lambda_\varphi(P)$ φ -nuklear ist, ist $\Lambda_\varphi(P)$ lokalkonvex und damit isomorph zu $\Lambda_{\text{id}}(P)$.

3.

3.1. In diesem Abschnitt beweisen wir zunächst die Umkehrung des Satzes 1.8. Anschließend zeigen wir, daß für gewisse Funktionen $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ein (F) -Raum mit Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ schon dann φ -nuklear ist, wenn die Basis $\{e_k\}$ φ -absolut ist. Zum Beweis der Umkehrung von Satz 1.8. benötigen wir den folgenden Satz (vgl. [2], Zusatz zu Satz 9).

SATZ. Sei $P = \{\{\rho_{nk}\}_{n, k \in \mathbb{N}}\}$ ein monoton wachsendes (abzählbares) System von Folgen, d.h. für $m \leq n$ gelte $\rho_{mk} \leq \rho_{nk}$, $k \in \mathbb{N}$. Der Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$ sei nuklear und lokalkonvex. Dann gibt es zu jeder Folge $\{\rho_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in P$ eine Folge $\{\rho_{mk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in P$, so daß

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N_m}}^{\infty} \varphi(\rho_{nk} \rho_{mk}^{-1}) < \infty,$$

wobei $N_m := \{k \in \mathbb{N} : \rho_{mk} = 0\}$.

BEWEIS. Wir setzen ohne Einschränkung voraus, daß $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \varphi(t) = \infty$. Angenommen, es gibt ein $\rho_{n_0} = \{\rho_{n_0 k}\}_{k \in \mathbb{N}} \in P$, so daß für alle $\rho_m = \{\rho_{mk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in P$ die Reihe

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N_m}}^{\infty} \varphi(\rho_{n_0 k} \rho_{mk}^{-1})$$

divergiert. Setzt man $\rho_0 = \rho_{n_0}$, dann kann man annehmen, da P ein monoton wachsendes System von Folgen ist und da $\Lambda_\varphi(P)$ nuklear ist, daß

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N_m}}^{\infty} \varphi(\rho_{0k} \rho_{mk}^{-1}) = \infty$$

für alle $m > 0$, $m \in \mathbb{N}$, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_{mk} \rho_{tk}^{-1} < \infty$$

für alle $m, l \in \mathbb{N}$ mit $m < l$. Sei nun $I := \{k \in \mathbb{N} : \rho_{0k} > 0\}$; k_0 sei das minimale Element von I . Dann wählen wir eine monoton wachsende Folge $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ aus I mit

$$\sum_{\substack{j=k_{i-1} \\ j \in I}}^{k_i-1} \varphi(\rho_{0j} \rho_{ij}^{-1}) > \frac{1}{i}.$$

Wir definieren uns nun eine Folge $\xi := \{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ und zeigen daß $\xi \in \Lambda(P)$, aber $\xi \notin \Lambda_\varphi(P)$. Sei nämlich $\xi_j = 0$ für $j \notin I$ und $\xi_j = (\rho_{ij})^{-1}$ für $k_{i-1} \leq j < k_i$ und $j \in I$. Dann haben wir für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i| \rho_{mi} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=k_i-1}^{k_i-1} \rho_{mj} \rho_{ij}^{-1} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k_m-1} |\xi_i| \rho_{mi} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=k_i-1}^{k_i-1} \rho_{mj} \rho_{m+1,j}^{-1} < \infty, \end{aligned}$$

und die Folge $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ gehört zu $\Lambda(P)$. Andererseits aber gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(|\xi_i| \rho_{0i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=k_i-1}^{k_i-1} \varphi(\rho_{0j} \rho_{ij}^{-1}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i};$$

also gehört die Folge $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ nicht zu $\Lambda_\varphi(P)$. $\Lambda_\varphi(P)$ ist somit nach 2.1. nicht lokalkonvex. Aus dem Widerspruch folgt die Behauptung des Satzes.

3.2. Als Folgerung aus diesem Satz erhalten wir nun das

LEMMA. *Sei E ein nuklearer (F) -Raum mit φ -absoluter Basis. Dann ist E φ -nuklear.*

BEWEIS. Nach Satz 2.2. ist E topologisch isomorph zu dem nuklearen lokalkonvexen Folgenraum $\Lambda_\varphi(P)$. Da das Fundamentalsystem $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen Halbnormen von E ohne Einschränkung als monoton wachsend vorausgesetzt werden kann, sind die Voraussetzungen von Satz 3.1. erfüllt. $\Lambda_\varphi(P)$ ist also nach 2.1. φ -nuklear, d.h. E ist ein φ -nuklearer (F) -Raum.

Verwendet man nun ein Ergebnis von W. Wojtyński [8], daß ein (F) -Raum E mit Basis nuklear ist, wenn alle Basen in E absolut sind, dann erhalten wir den folgenden

3.3. SATZ. *Sind in einem (F) -Raum E mit Basis alle Basen absolut und gibt es eine φ -absolute Basis, dann ist E φ -nuklear.*

KOROLLAR. *Sei E ein (F) -Raum mit Basis. E ist genau dann φ -nuklear, wenn alle Basen in E φ -absolut sind.*

3.4. Lemma 3.2. ergibt nun die Frage: Kann man in Lemma 3.2. die Voraussetzung der Nuklearität fallenlassen? Dies führt zu dem folgenden

PROBLEM. *Sei $\lim_{t \rightarrow 0} (\varphi(t))^{-1} t = 0$. Sei E ein (F) -Raum mit φ -absoluter Basis. Ist E dann nuklear (und damit φ -nuklear)?*

Das Problem läßt sich positiv lösen für $\varphi_p(t) = t^p$, $0 < p < 1$. Dann gilt nämlich

3.5. SATZ. *Sei E ein (F) -Raum mit p -absoluter Basis, $0 < p < 1$. Dann ist E nuklear.*

BEWEIS. Da die Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ p -absolut ist, gibt es zu jeder stetigen Halbnorm p_U eine stetige Halbnorm p_V , so daß für alle $x \in E$

$$q_U(x) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^p p_U(e_k)^p \right)^{1/p} \leq p_V(x).$$

Außerdem gilt wegen

$$p_U(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| p_U(e_k) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^p p_U(e_k)^p \right)^{1/p} = q_U(x),$$

daß die Topologie des lokalkonvexen Raumes E auch durch das System der Quasinormen q_U erzeugt werden kann. Zu p_U betrachten wir nun die Nullumgebung $U_q := \{x \in E : q_U(x) \leq 1\}$. Ferner sei $W := \{x \in E : \tilde{q}_W(x) := \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| p_V(e_k) \leq 1\}$, wobei p_V die oben gewählte stetige Halbnorm ist. Wir ordnen nun jeder zu $x \in E$ gehörigen Restklasse aus $E(W) = E/\tilde{q}_W^{-1}(0)$ bzw. $E(U_q) = E/q_U^{-1}(0)$ die Folge $\{f_k(x) p_V(e_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{f_k(x) p_U(e_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ zu, dann kann man $E(W)$ bzw. $E(U_q)$ mit einem linearen Teilraum von \mathfrak{l}^1 bzw. \mathfrak{l}^p identifizieren. Der kanonischen Abbildung von $E(W)$ auf $E(U_q)$ entspricht dann die durch die Matrix $\{p_V(e_k)^{-1} p_U(e_k) \delta_{ki}\}$ erzeugte Abbildung von \mathfrak{l}^1 in \mathfrak{l}^p . Aus der Stetigkeit dieser Abbildung und aus der Hölderschen Ungleichung

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_U(e_k)}{p_V(e_k)} \right)^p |\xi_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_U(e_k)}{p_V(e_k)} \right)^r \right)^{1/r} \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|$$

für alle $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{l}^1$ mit $1/p = 1/r + 1$ erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_U(e_k)}{p_V(e_k)} \right)^r < \infty$$

mit $r = p/(1-p)$. Damit haben wir zu jeder Nullumgebung U_q eine Nullumgebung W gefunden, so daß die kanonische Abbildung $E(W) \rightarrow E(U_q)$ vom Typus \mathfrak{l}^r , $r = p/(1-p)$, ist. Daher ist E nuklear (vgl. [4]).

KOROLLAR (1). Sei E ein (F) -Raum mit Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. E ist genau dann nuklear, wenn die Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ p -absolut ist für ein (jedes) $p \in (0, 1)$.

Als Verschärfung von Satz 3.3. Korollar erhalten wir

KOROLLAR (2). Sei $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine Funktion mit $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) t^{-p} > 0$ für ein $p \in (0, 1)$. E sei ein (F) -Raum mit Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. E ist genau dann φ -nuklear, wenn die Basis $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ φ -absolut ist.

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.8., Lemma 3.2., Satz 3.5. und der Tatsache, daß jede φ -absolute Basis, wobei $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) t^{-p} > 0$ für ein $p \in (0, 1)$, auch p -absolut ist.

3.6. Ungelöst bleibt das Problem 3.4. also für diejenigen Funktionen $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, für die $\lim_{t \rightarrow 0} t(\varphi(t))^{-1} = 0$ und $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) t^{-p} = 0$ für jedes $p \in (0, 1)$. Ein Beispiel für eine solche Funktion liefert

$\varphi(t) := t(1 - \log t)$ für $0 < t < t_0$, t_0 geeignet gewählt. Dies führt zu dem Problem, diejenigen stetigen, streng monoton steigenden Funktionen $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(0) = 0$ zu charakterisieren, für die die Nuklearität eines lokalkonvexen Raumes E aus der folgenden Voraussetzung folgt: Zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ gebe es eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\delta_n(V, U)) < \infty.$$

3.7. Ein lokalkonvexer Raum E mit der Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}(E)$ heiße im folgenden $N(f)$ -Raum genau dann, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ gibt mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\delta_n(V, U)) < \infty,$$

wobei $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig und streng monoton steigend mit $f(0) = 0$ ist. Topologische Produkte, Quotientenrume nach abgeschlossenen Teilräumen und – fur verallgemeinerte Hilberträume – Teilräume von $N(f)$ -Räumen sind wieder $N(f)$ -Räume. Da aus $\sum_{n=0}^{\infty} f(\delta_n(V, U)) < \infty$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(V, U) = 0$, ist jeder $N(f)$ -Raum ein Schwartz-Raum, aber es gibt Schwartz-Räume, die fur kein f ein $N(f)$ -Raum sind, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei $|c_0|$ die Menge aller positiven monotonen Nullfolgen und

$$A(|c_0|) = \{ \{ \xi_k \}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| \gamma_k < \infty, \{ \gamma_k \} \in |c_0| \}.$$

Mit $\beta_n = \sqrt{\gamma_n}$, $n \in \mathbb{N}$, erhalten wir $U_\beta \subset U_\gamma$ und $\delta_k(U_\beta, U_\gamma) = \sqrt{\gamma_k} \rightarrow 0$, wobei $U_\beta := \{ \{ \xi_k \}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| \beta_k \leq 1 \}$. $A(|c_0|)$ ist also ein Schwartz-Raum. Sei nun $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig, streng monoton steigend mit $f(0) = 0$. Die Nullfolge $\alpha_k := f^{-1}(1/(k+1))$, $k \in \mathbb{N}$, ist positiv und monoton. Fur die beschrankte Teilmenge

$$B = \{ \{ \xi_k \}_{k \in \mathbb{N}} \in A(|c_0|) : \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| \leq 1 \}$$

von $A(|c_0|)$ aber gilt $\delta_k(B, U_\alpha) = \alpha_k = f^{-1}(1/(k+1))$, $k \in \mathbb{N}$. Also ist $f(\delta_k(B, U_\alpha)) = (k+1)^{-1}$ nicht summierbar und $A(|c_0|)$ kein $N(f)$ -Raum.

Der folgende, uns von B. S. Mitjagin mitgeteilte Satz zeigt, daß nicht jeder $N(f)$ -Raum nuklear ist.

SATZ 1. Sei $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig, streng monoton mit $f(0) = 0$. Es gelte: Fur alle $p > 0$ gebe es positive Zahlen c_p und ε_p , so daß fur alle $t \in (0, \varepsilon_p)$ gilt

$$f(t) \leq c_p t^p.$$

Dann gibt es einen nicht nuklearen $N(f)$ -Raum.

BEWEIS: Wir konstruieren einen nicht nuklearen Potenzreihenraum von unendlichem Typus. Sei

$$A(P) = \{ \{ \xi_k \}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n| \rho^{\alpha_n} < \infty, 0 < \rho < \infty \}$$

so gilt bekanntlich für die n -ten Durchmesser der Nullumgebungen

$$U_\rho = \{ \{ \xi_n \}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n| \rho^{\alpha_n} \leq 1 \}$$

die Gleichung $\delta_n(U_{2\rho}, U_\rho) = (\frac{1}{2})^{\alpha_n}$; sei $\beta_n = (\frac{1}{2})^{\alpha_n}$. Wir haben also eine Folge $\{\beta_n\}$ zu konstruieren, für die gilt $\sum_{n=0}^{\infty} f(\beta_n) < \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^k = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $\varphi = f^{-1}$ und $\gamma_n = f(\beta_n)$. Sei ferner \mathbb{N}_k , $k \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von \mathbb{N} in abzählbar viele disjunkte abzählbare Teilmengen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ können wir nach Voraussetzung eine Folge $\gamma^{(k)}$ bestimmen mit $\gamma_n^{(k)} = 0$ für $n \notin \mathbb{N}_k$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\gamma_n^{(k)})^k = \infty.$$

Sei $\gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)}$. Dann ist, weil \mathbb{N} disjunkt zerlegt ist,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \gamma_n^{(k)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}_k} \gamma_n^{(k)} \leq 1,$$

aber für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(\gamma_n)^j = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}_k} \varphi(\gamma_n^{(k)})^j = \infty.$$

Die Folge $\{(\log \beta_n)/(\log \frac{1}{2})\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\beta_n = \varphi(\gamma_n)$ hat keinen endlichen Häufungspunkt, sie läßt sich somit in eine monoton wachsende Folge $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ umordnen. Der durch die Folge $\{\alpha_n\}$ charakterisierte Potenzreihenraum von unendlichem Typus ist somit zwar ein $N(f)$ -Raum, aber nicht nuklear.

Umgekehrt gilt der

SATZ 2. Sei $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig und streng monoton steigend mit $f(0) = 0$. Es gelte: Für alle $p > 0$ gibt es positive Zahlen c_p und ε_p , so daß für alle $t \in [0, \varepsilon_p]$ gilt

$$t^p \leq c_p f(t).$$

Dann gibt es einen nuklearen Raum E , der kein $N(f)$ -Raum ist.

BEWEIS. Wir zeigen, daß der Raum (s) der schnell fallenden Zahlenfolgen kein $N(f)$ -Raum ist. Wegen

$$\delta_n(U_\sigma, U_\rho) = \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{\log(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^k} \quad \text{mit } k = \log \frac{\sigma}{\rho}$$

und $t^p \leq c_p f(t)$ gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right) \geq \frac{1}{c_p} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^{kp}} = \infty \quad \text{für alle } p \leq \frac{1}{k}.$$

Also ist für alle ρ, σ mit $\rho \leq \sigma$

$$\sum f(\delta_n(U_\sigma, U_\rho)) = \infty$$

und (s) kein $N(f)$ -Raum.

LITERATUR

A. S. DYNIN and B. S. MITIAGIN

[1] Criterion for nuclearity in terms of approximate dimension. Bull. Acad. Polon. Sci. 8, 535–540 (1960).

C. FENSKE und E. SCHOCK

[2] Nuklearität und lokale Konvexität von Folgenräumen. Math. Nachr. 45, 327–335 (1970).

B. S. MITIAGIN

[3] Approximate dimension and bases in nuclear spaces. Russ. Math. Surveys 16, 59–127 (1961).

A. PIETSCH

[4] Nukleare lokalkonvexe Räume. 2. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1969.

B. ROSENBERGER

[5] F -Normideale von Operatoren in normierten Räumen. Ber. Ges. Math. Datenv. Bonn 44 (1971).

[6] φ -nukleare Räume, Math. Nachr. 52, 147–160 (1972).

E. SCHOCK

[7] (F)-Räume mit p -absoluter Basis. Ber. Ges. Math. Datenv. Bonn 10, 23–28 (1969).

W. WOJTIŃSKI

[8] On conditional bases in non-nuclear Fréchet spaces, Studia Math. 35, 77–96 (1970).

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn
D-5300 Bonn, Wegelerstraße 6

(Oblatum 20–VII–1971 & 29–XII–1971)