

COMPOSITIO MATHEMATICA

CONSTANTIN BĂNICĂ

Une caractérisation de la dimension d'un faisceau analytique cohérent

Compositio Mathematica, tome 25, n° 1 (1972), p. 101-108

http://www.numdam.org/item?id=CM_1972__25_1_101_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTERISATION DE LA DIMENSION D'UN FAISCEAU ANALITIQUE COHERENT

de

Constantin Bănică¹

On donne quelques résultats concernant la profondeur et la dimension d'un faisceau cohérent sur un espace de Stein. On réformule ceux-ci pour des espaces complexes arbitraires en utilisant quelques faisceaux introduits dans [2].

I.

Soient (X, \mathcal{O}) un espace complexe et $\text{Coh } X$ la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur X . Si $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ on note

$$\text{prof } \mathcal{F} = \inf_{x \in X} (\text{prof}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x)$$

et

$$\dim \mathcal{F} = \sup_{x \in X} (\dim_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x) = \dim \text{Supp } \mathcal{F}.$$

On a donc $\text{prof } \mathcal{F} \leq \dim \mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \neq 0$). Dans [1], [3], [4], [7], [12] on a démontré la caractérisation suivante de la profondeur:

THÉORÈME 1. *Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$, $N \geq 0$ un entier, alors on a:*

- (a) $\text{prof}(\mathcal{F}) \geq N+1$ si et seulement si $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \leq N$;
- (b) il existe un ensemble fini $A \subset X$ tel que $\text{prof}(\mathcal{F}/X-A) \geq N+1$ si et seulement si les espaces vectoriels complexes $H_c^q(X, \mathcal{F})$ ont une dimension finie pour $q \leq N$;
- (c) il existe un ensemble discret $A \subset X$ tel que $\text{prof}(\mathcal{F}/X-A) \geq N+1$ si et seulement si les espaces vectoriels complexes $H_c^q(X, \mathcal{F})$ ont une dimension au plus dénombrable pour $q \leq N$.

Dans cette Note on démontre la caractérisation suivante de la dimension:

THÉORÈME 2. *Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ et $N \geq 0$ un entier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

¹ L'auteur désire exprimer sa gratitude à la Fondation Alexander von Humboldt, dont il a été boursier pendant l'année universitaire 1970-1971.

- (i) $\dim \mathcal{F} \leq N$.
- (ii) $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q > N$.
- (iii) les espaces vectoriels complexes $H_c^q(X, \mathcal{F})$ ont une dimension finie pour $q > N$.
- (iv) les espaces vectoriels complexes $H_c^q(X, \mathcal{F})$ ont une dimension au plus dénombrable pour $q > N$.

REMARQUE. L'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) est connue [9], [12]: ici on donne une nouvelle démonstration utilisant le théorème de dualité de [3] et des considérations d'algèbre dans les fibres du faisceau structural. Plus précisément, on utilise le fait suivant [6] (pg. 30–33, th. 2.2 et pr. 2.9): "Soient A un anneau local noethérien, M et N deux A -modules, $q \geq 0$ un entier, alors $\text{Ext}_A^i(N, M) = 0$ pour $i < q$ si et seulement si $\text{prof}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \geq q$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Supp } N$ ".

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Il suffit de prouver (i) \Rightarrow (ii) et (iv) \Rightarrow (i).

(i) \Rightarrow (ii): Soit $(V_r)_{r \geq 1}$ un recouvrement de X par des ouverts de Stein relativement compacts tel que $V_r \subset V_{r+1}$ et que les applications $\Gamma(V_{r+1}, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(V_r, \mathcal{O})$ soient denses. Il en résulte alors que les applications $H_c^q(V_r, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^q(X, \mathcal{F})$ sont injectives pour tout entier q . Il suffit alors de démontrer l'implication pour chaque V_r donc, utilisant des immersions dans des espaces numériques, on peut supposer X variété de Stein. Alors chaque $H_c^q(X, \mathcal{F})$ est isomorphe au dual topologique d'espace de Fréchet $\text{Ext}_0^{n-q}(X, \mathcal{F}, \omega)$, où $n = \dim X$ et ω est le faisceau des germes de formes différentielles du type $(n, 0)$ à coefficients analytiques. Comme $\text{Ext}_0^{n-q}(X; \mathcal{F}, \omega) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt_0^{n-q}(\mathcal{F}, \omega))$, il reste à prouver que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x) = 0$ pour tout $x \in X$ et tout $q > N$. Utilisant le fait d'algèbre rappelé plus haut on doit démontrer que pour chaque $\mathfrak{p} \in \text{Supp } \mathcal{F}_x$, on a $\text{prof}_{(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} \geq n - N$. On a $\dim_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x \leq N$ donc $\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} \leq N$ et la conclusion résulte du fait que

$$\text{prof}_{(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} = \dim(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} = \dim \mathcal{O}_x - \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = n - \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p}.$$

(iv) \Rightarrow (i): Comme pour la démonstration précédente on peut supposer X variété de Stein. Il en résulte alors que les duals topologiques des espaces de Fréchet $\text{Ext}_0^{n-q}(X; \mathcal{F}, \omega) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt_0^{n-q}(\mathcal{F}, \omega))$ ont une dimension au plus dénombrable pour $q > N$. En vertu du [3], lemme 2.10, il existe un ensemble discret $A \subset X$ tel que $\mathcal{E}xt_0^{n-q}(\mathcal{F}, \omega)/X - A = 0$ pour $q > N$. Soit $x \notin A$; on a $\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x) = 0$ pour $q > N$. En appliquant de nouveau le fait d'algèbre rappelé, il en résulte donc que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Supp } \mathcal{F}_x$, $\text{prof}(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} \geq n - N$ et donc

$$\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = \dim \mathcal{O}_x - \dim(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} = n - \text{prof}(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} \leq N.$$

Comme

$$\dim_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Supp } \mathcal{F}_x} \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p}, \text{ on obtient } \dim_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x \leq N.$$

Ainsi il est démontré que $\dim(\mathcal{F}/X-A) \leq N$ et comme A est discret et $N \geq 0$ il en résulte $\dim \mathcal{F} \leq N$.

REMARQUE. On peut appliquer aussi le théorème de dualité locale pour les anneaux réguliers [6], pg. 64, et la caractérisation de la dimension de Krull donnée dans [6], pg. 65.

Les théorèmes 1 et 2 montrent que la cohomologie à support compact pour les faisceaux analytiques cohérents sur les espaces de Stein est triviale hors de l'intervalle [prof, dim]. On a les deux corollaires suivants pour les extrémités prof et dim.

COROLLAIRE 1. Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein et $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$. Alors $H_c^{\text{prof } \mathcal{F}}(X, \mathcal{F})$ a une dimension finie (resp. a une dimension au plus dénombrable) si et seulement si l'ensemble $\{x/\text{prof}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x = \text{prof } \mathcal{F}\}$ est fini (resp. discret).

La démonstration résulte du théorème 1.

COROLLAIRE 2. Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein et $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$. Alors $H_c^{\dim \mathcal{F}}(X, \mathcal{F})$ a une dimension au plus dénombrable si et seulement si $\dim \mathcal{F} = 0$ (donc $H_c^{\dim \mathcal{F}}(X, \mathcal{F})$ est en général très gros).

DÉMONSTRATION. Si $\dim \mathcal{F} = 0$, \mathcal{F} a un support discret et $H_c^{\dim \mathcal{F}}(X, \mathcal{F}) = \Gamma_c(X, \mathcal{F})$ a donc une dimension au plus dénombrable. Si $\dim \mathcal{F} \geq 1$ alors on applique le théorème 2 pour $N = \dim \mathcal{F} - 1$.

REMARQUE. On peut construire des faisceaux \mathcal{F} (du type $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$) tels que $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $\text{prof } \mathcal{F} < q < \dim \mathcal{F}$. J'ignore des conditions telles que, pour chaque $q \in [\text{prof } \mathcal{F}, \dim \mathcal{F}]$, $H_c^q(X, \mathcal{F}) \neq 0$. Rappelons qu'un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F} \neq 0$ est de Cohen-Macaulay si $\text{prof } \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}$. Il en résulte alors que pour chaque $x \in \text{Supp } \mathcal{F}$, $\text{prof}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x = \dim_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x$, donc \mathcal{F}_x est un \mathcal{O}_x -module de Cohen-Macaulay. Si X est connexe alors l'affirmation inverse est aussi vraie: en effet, pour chaque entier $q \geq 0$, l'ensemble $\{x; \text{prof } \mathcal{F}_x = \dim \mathcal{F}_x\}$ est ouvert.

COROLLAIRE 3. Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein et $\mathcal{F} \neq 0$ un faisceau analytique cohérent. On a alors:

- (a) \mathcal{F} est de Cohen-Macaulay si et seulement si il existe un entier $N \geq 0$ tel que $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \neq N$.
- (b) il existe un ensemble fini $A \subset X$ tel que $\mathcal{F}|_{X-A}$ est de Cohen-Macaulay si et seulement si il existe un entier $N \geq 0$ tel que les espaces vectoriels complexes $H_c^q(X, \mathcal{F})$ ont une dimension finie pour $q \neq N$.

(c) *une affirmation analogue quand on remplace l'ensemble fini A par un ensemble discret.*

On applique les théorèmes 1 et 2. Le corollaire 3 donne en particulier une caractérisation pour les espaces parfaits (donc les fibres du faisceau structural sont de Cohen-Macaulay) et de Stein. Démontrons encore deux corollaires concernant la dimension projective et le grade. Soient (X, \mathcal{O}) un espace complexe et $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$. On note $\text{dp}\mathcal{F} = \sup_{x \in X} \text{dp}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x$ et $\text{grad } \mathcal{F} = \inf_{x \in X} \text{grad}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x$, où $\text{grad}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x) =$ le plus petit entier $q \geq 0$ tel que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^q(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x) \neq 0$ [10]. Il en résulte que $\text{grad } \mathcal{F} =$ le plus petit entier $q \geq 0$ tel que $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^q(\mathcal{F}, \mathcal{O}) \neq 0$ (pour $\mathcal{F} = 0$ on considère $\text{grad } F = \infty$).

COROLLAIRE 4. *Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ tel que $\text{dp}\mathcal{F} < \infty$ et $N \geq 0$ un entier. Si $\text{dp}\mathcal{F} \leq N$ alors $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q < \text{prof}(\mathcal{O}) - N$; si en plus $\text{prof } \mathcal{O} = \text{prof } \mathcal{O}_x$ pour tout $x \in X$ la réciproque est aussi vraie.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in \text{Supp } \mathcal{F}$ on a $\text{dp}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x + \text{prof}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x = \text{prof } \mathcal{O}_x$ [10], pg. 10, pr. 6. Alors $\text{dp}\mathcal{F} \leq N$ implique $\text{prof}(\mathcal{F}) \geq \text{prof}(\mathcal{O}) - N$; si $\text{prof } \mathcal{O} = \text{prof } \mathcal{O}_x$ pour tout $x \in X$ l'inverse est aussi vrai. On applique alors le théorème 1.

COROLLAIRE 5. *Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ et $N \geq 0$ un entier. Si $\text{grad } \mathcal{F} \geq N+1$ alors $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \geq \dim X - n$; si en plus (X, \mathcal{O}) est parfait et connexe la réciproque est aussi vraie.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \text{Supp } \mathcal{F}$; on a $\text{grad } \mathcal{F}_x + \dim \mathcal{F}_x \leq \dim \mathcal{O}_x$ et si \mathcal{O}_x est de Cohen-Macaulay on a l'égalité [10], lemme 4, pg. 21. Si $\text{grad } \mathcal{F} \geq N+1$ on obtient donc $\dim \mathcal{F} \leq \dim X - N - 1$ et on applique le théorème 2 (pour l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) on peut supposer N entier arbitraire). Si X est connexe et parfait et $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \geq \dim X - N$, il en résulte que $\dim \mathcal{F} \leq \dim X - N - 1$ et on déduit alors que $\text{grad}(\mathcal{F}) = \inf_{x \in X} \text{grad}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x) \geq N+1$. Dans les corollaires 4 et 5 on peut aussi considérer le cas où intervient un ensemble fini ou discret (comme pour le corollaire 3).

II.

On sait que les propriétés des algèbres et des modules de Stein déterminent les propriétés des espaces de Stein et des faisceaux analytiques cohérents [5]. On interprète ici ce fait pour $\dim, \text{prof}, \text{grad} \dots$

PROPOSITION 1. *Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Coh } X$, $A = \Gamma(X, \mathcal{O})$ et $F = \Gamma(X, \mathcal{F}), G = \Gamma(X, \mathcal{G})$. Alors on a un isomorphisme canonique:*

$$\text{Ext}_\mathcal{O}^q(X; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \text{Ext}_A^q(F, G) \text{ pour } q \text{ entier.}$$

La démonstration utilise les deux lemmes suivants:

LEMMA 1. Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ et \mathcal{G} un \mathcal{O} -Module. Alors l'application canonique

$$\text{Hom}_\mathcal{O}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma(X, \mathcal{O})}(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G}))$$

est un isomorphisme.

La démonstration résulte immédiatement du fait que pour tout $x \in X$, l'application canonique $\Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O})} \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ est un isomorphisme (conséquence des théorèmes A et B). Dans [5], pg. 383, ce fait est prouvé pour $\mathcal{G} \in \text{Coh } X$ mais la démonstration ne l'utilise pas.

LEMMA 2. Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein et \mathcal{J} un \mathcal{O} -Module injectif. Alors $\Gamma(X, \mathcal{J})$ est un $\Gamma(X, \mathcal{O})$ -module injectif.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver que pour tout idéal \mathfrak{a} de $\Gamma(X, \mathcal{O})$ et pour tout $\Gamma(X, \mathcal{O})$ -morphisme $\varphi: \mathfrak{a} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J})$, il existe un $\Gamma(X, \mathcal{O})$ -morphisme $\psi: \Gamma(X, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{O}) \\ & & \downarrow \varphi & \swarrow \psi & \\ & & \Gamma(X, \mathcal{J}) & & \end{array}$$

soit commutatif.

Soit $\mathcal{A} = \mathfrak{a}\mathcal{O}$ le faisceau d'idéaux engendré par \mathfrak{a} . Pour tout $x \in X$, \mathcal{O}_x et un $\Gamma(X, \mathcal{O})$ -module plat (conséquence des théorèmes A et B), donc $\mathcal{A}_x = \mathfrak{a}\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_x \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O})} \mathfrak{a}$. Il en résulte alors que φ donne un morphisme $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{J}$ donc il existe $\psi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{J}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ & & \downarrow \Phi & \swarrow \psi & \\ & & \mathcal{J} & & \end{array}$$

soit commutatif.

Le morphisme $\psi = \Gamma(X, \psi)$ répond à la question.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit \mathcal{J}' une résolution injective pour \mathcal{G} . $\text{Ext}_\mathcal{O}^i(X, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ sont les groupes d'homologie du complexe $\text{Hom}_\mathcal{O}(\mathcal{F}, \mathcal{J}')$. Comme \mathcal{G} est cohérent, en vertu du théorème B, $\Gamma(X, \mathcal{J}')$ est une résolution pour $\Gamma(X, \mathcal{G})$ et conformément au lemme précédent même injective. Il en résulte que $\text{Ext}_A^i(F, G)$ sont les groupes d'homologie du complexe $\text{Hom}_A(F, \Gamma(X, \mathcal{J}'))$. La démonstration s'achève en appliquant le lemme 1. On rappelle que si (X, \mathcal{O}) est un espace de Stein,

l'algèbre $\Gamma(X, \mathcal{O})$ s'appelle de Stein; un A -module F s'appelle de Stein s'il existe un $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ tel que $F = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

COROLLAIRE 6. *Soient A une algèbre de Stein et F, G deux A -modules de Stein. Alors, pour tout entier q , $\text{Ext}_A^q(F, G)$ est un module de Stein.*

DÉMONSTRATION. Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Coh } X$ tels que $A = \Gamma(X, \mathcal{O})$, $F = \Gamma(X, \mathcal{F})$ et $G = \Gamma(X, \mathcal{G})$. On a $\text{Ext}_0^q(X; \mathcal{F}, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt_0^q(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$ et on applique la proposition.

Dans [5], pg. 402, le résultat du corollaire est prouvé dans l'hypothèse supplémentaire $\dim A < \infty$ et F de type fini absolu, en travaillant avec des résolutions projectives.

COROLLAIRE 7. *Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ et $N \geq 0$ un entier. Alors $\text{prof } \mathcal{F} \geq N+1$ si et seulement si $\text{Ext}_A^q(\Gamma(X, \mathcal{G}), \Gamma(X, \mathcal{F})) = 0$ pour $q \geq N$ et pour tout $\mathcal{G} \in \text{Coh } X$ tel que $\text{Supp } \Gamma(X, \mathcal{G})$ soit fini.*

Comme $\text{Supp } \Gamma(X, \mathcal{G})$ (in $\text{Spec } (\Gamma(X, \mathcal{O}))$) est fini si et seulement si $\text{Supp } \mathcal{G}$ est finie, la conclusion résulte en passant dans les fibres du faisceau structural et en utilisant la proposition 1.

COROLLAIRE 8. *Soient (X, \mathcal{O}) un espace de Stein et $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$. Alors*

$$\text{grad}_0 \mathcal{F} = \text{grad}_{\Gamma(X, \mathcal{O})} \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

$\text{grad}_{\Gamma(X, \mathcal{O})} \Gamma(X, \mathcal{F})$ est le plus petit entier $q \geq 0$ tel que

$$\text{Ext}_{\Gamma(X, \mathcal{O})}^q(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{O})) \neq 0 \text{ et on applique la proposition.}$$

III.

On peut reformuler les résultats du I pour des espaces complexes arbitraires, en utilisant quelques faisceaux introduits dans [2].

Soient (X, \mathcal{O}) un espace complexe et $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$. Pour chaque ouvert de Stein U , relativement compact, on a une immersion fermée $U \rightarrow \mathbb{C}^n$ (où l'entier n dépend de U) et donc $H_c^q(U, \mathcal{F}) \cong H_c^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{F}^*)$, où \mathcal{F}^* est l'image de \mathcal{F} , est isomorphe au dual topologique de l'espace de Fréchet $\text{Ext}_{\mathcal{O}_c^n}^{n-q}(\mathbb{C}^n; \mathcal{F}^*, \omega_{\mathbb{C}^n})$. On regarde sur $H_c^q(U, \mathcal{F})$ la topologie de dual et l'association $U \rightarrow (H_c^q(U, \mathcal{F}))'$ donne un préfaisceau et le faisceau associé sera noté $\mathcal{D}^q(\mathcal{F})$ [2]. On démontre que $\mathcal{D}^q(\mathcal{F})$ est cohérent et $\Gamma(U, \mathcal{D}^q(\mathcal{F})) = H_c^q(U, \mathcal{F})'$, pour tout ouvert de Stein. Il en résulte alors que les théorèmes 1 et 2 disent que $\mathcal{D}^q(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \notin [\text{prof } \mathcal{F}, \dim \mathcal{F}]$ et $\mathcal{D}^{\text{prof } (\mathcal{F})}(\mathcal{F}) \neq 0$, $\mathcal{D}^{\dim \mathcal{F}}(\mathcal{F}) \neq 0$ (et aussi donnent quelques informations concernant $\text{Supp } \mathcal{D}^q(\mathcal{F})$ pour $q = \text{prof } (\mathcal{F}), \dim (\mathcal{F})$).

Le corollaire 3(a) peut s'exprimer ainsi: \mathcal{F} est de Cohen-Macaulay

si et seulement si il existe un entier N tel que $\mathcal{D}^q(\mathcal{F}) = 0$ pour $q \neq N$ (et affirmations analogues pour (b) et (c)). Si (X, \mathcal{O}) est parfait et $n = \dim X$, $\mathcal{D}^q(\mathcal{O}) = 0$ pour $q \neq n$ (et inverse) et $\mathcal{D}^n(\mathcal{O})$ jouera un rôle particulier: on peut montrer que $\mathcal{D}^n(\mathcal{O})$ est un faisceau inversible si et seulement si les anneaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont de Gorenstein, etc. . . .

Démonstrons encore:

PROPOSITION 2. *Soient (X, \mathcal{O}) un espace complexe, $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ et $\mathcal{D}^q(\mathcal{F})$ les faisceaux analytiques cohérents définis dans [2]. Alors $\dim \mathcal{D}^q(\mathcal{F}) \leq q$ pour tout q et $\dim \mathcal{D}^q(\mathcal{F}) = q$ pour $q = \dim \mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Le problème est local, on peut supposer que X est un espace de Stein tel qu'il existe une immersion fermée $i: X \rightarrow \mathbb{C}^n$. Si $\mathcal{F}^* = i_*(\mathcal{F})$ on a $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}^*$, $i_*(\mathcal{D}^q(\mathcal{F})) = \mathcal{D}^q(\mathcal{F}^*)$ et donc aussi $\dim \mathcal{D}^q(\mathcal{F}) = \dim \mathcal{D}^q(\mathcal{F}^*)$. On peut donc supposer que X est une variété de Stein et alors $\mathcal{D}^q(\mathcal{F}) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^{n-q}(F, \omega)$ ($n = \dim X$). Soit $x \in X$, on doit démontrer que $\dim \mathcal{D}^q(\mathcal{F})_x = \dim \text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(F_x, \mathcal{O}_x) \leq q$ et si pour x , $\dim \mathcal{F}_x = \dim \mathcal{F}$, alors

$$\dim \mathcal{D}^{\dim \mathcal{F}}(\mathcal{F})_x = \dim \text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-\dim \mathcal{F}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x) = \dim \mathcal{F}.$$

Soit $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x))$, on a donc $\text{Ext}_{(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}}^{n-q}((\mathcal{F}_x)_{\mathfrak{p}}, (\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}) = (\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x))_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Comme $(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}$ est régulier (et donc sa dimension injective est finie et égale à celle de Krull) il en résulte alors que $\dim(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} \leq n - q$, donc $\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = n - \dim(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} \leq q$, donc la première affirmation est prouvée. Il reste à montrer que

$$\dim(\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-\dim \mathcal{F}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x)) \geq \dim \mathcal{F}_x = \dim \mathcal{F}.$$

Soit $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(\mathcal{F}_x)$ tel que $\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = \dim \mathcal{F}_x$; il en résulte alors que $\text{Supp}(\mathcal{F}_x)_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{p}(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}\}$. L'anneau $(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}$ est régulier et

$$\text{prof}(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} = \dim(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}} = n - \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = n - \dim \mathcal{F}$$

et donc

$$\text{Ext}_{(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}}^{n-\dim \mathcal{F}}((\mathcal{F}_x)_{\mathfrak{p}}, (\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}) = (\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-\dim \mathcal{F}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x))_{\mathfrak{p}} \neq 0$$

(ici, le fait que $(\mathcal{F}_x)_{\mathfrak{p}}$ a le support réduit au seul idéal maximal de $(\mathcal{O}_x)_{\mathfrak{p}}$ est essentiel). Donc $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-\dim \mathcal{F}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x))$ et la démonstration est achevée.

REMARQUES. 1. La proposition est l'analogie d'un fait d'algèbre [6], pg. 65.

2. On peut maintenant préciser le corollaire 2 en disant que $H_c^{\dim \mathcal{F}}(X, \mathcal{F})$ est isomorphe au dual topologique d'un module de Stein de dimension $\dim \mathcal{F}$.

3. Le référent m'a signalé que le théorème de dualité annoncé dans [2] donne une démonstration plus directe des théorèmes 1 et 2, sans considérations d'algèbre dans les fibres du faisceau structural.

BIBLIOGRAPHIE

A. ANDREOTTI ET H. GRAUERT

[1] Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull. Soc. Math. France 90, 193–259 (1962).

A. ANDREOTTI AND A. KAS

[2] Serre duality on complex analytic spaces. Rend. Acc. Naz. Lincei. (Avril 1971).

C. BĂNICĂ ET O. SRĂNĂȘILĂ

[3] Sur la profondeur d'un faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein. Séminaire d'espaces analytiques. Bucarest sept. 1969 et C. R. Acad. Sc. Paris 269, 636–639 (1969).

[4] Some results on the extension of analytic entities defined out of a compact. Annali della Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. XXV, Fasc. II, (1971).

O. FORSTER

[5] Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln. Math. Z. 97, 376–405 (1967).

A. GROTHENDIECK

[6] Cohomologie locale des faisceaux cohérents (SGA2), North-Holland Publishing Company-Amsterdam, (1968).

R. HARVEY

[7] The theory of hyperfunctions on totally real subsets of a complex manifold with applications to extension problem. Amer. Journal of Math. XCI, 4, October (1969).

M. JURCHESCU

[8] On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module. Bull. Soc. Math. France 93, 129–153 (1965).

H. J. REIFFEN

[9] Riemannsche Hebbbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompakten Trägern. Math. Ann. 164 (1966), 272–279.

P. SAMUEL

[10] Séminaire d'algèbre commutative 1966/1967.

J. P. SERRE

[11] Algèbre locale, Multiplicités. Lecture Notes in Math., 11, Springer-Berlin (1965).

Y. T. SIU

[12] Analytic sheaf cohomology with compact supports. Comp. Math. 21 (1969), 52–58.

(Oblatum 00-V-1971)

Mathematisches Institut der
Universität Regensburg

et

Institut de Mathématiques de l'Académie
R.S.R. Bucarest