COMPOSITIO MATHEMATICA

DIETER ERNST

Über die Konvergenz der $(C, 1)$-Mittel von Fourier-Laguerre-Reihen

Compositio Mathematica, tome 21, nº 1 (1969), p. 81-101

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1969__21_1_81_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Über die Konvergenz der $(C, 1)$-Mittel von Fourier-Laguerre-Reihen

von

Dieter Ernst

Summary: The present paper is concerned with the convergence of the $(C, 1)$-means of Fourier-Laguerre series. The Lebesgue functions of the above summation process are represented in a closed form. An application of asymptotic formulae for the Laguerre polynomials gives theorems on the asymptotic behaviour of the Lebesgue functions. These results yield the main part of the paper. As an application it is proved that the $(C, 1)$-means are convergent in $L^p(0, \infty)$-norm, $1 \leqq p < \infty$.

1. Einleitung

Die Laguerre'schen Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ vom Grade n und Index α

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!} \quad (0 \leqq x < \infty;\ \alpha > -1;\ n = 0, 1, \cdots)$$

genügen mit den Abkürzungen

$$(1.1) \qquad \begin{cases} g^{(\alpha)}(x) = x^{\alpha/2} e^{-x/2} \\ \varphi_n^{(\alpha)}(x) = \left\{\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right\}^{\frac{1}{2}} g^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) \end{cases}$$

der folgenden Orthogonalitätsrelation:

$$(1.2) \qquad \int_0^\infty \varphi_m^{(\alpha)}(t) \varphi_n^{(\alpha)}(t) dt = \begin{cases} 0 \text{ für } m \neq n \\ 1 \text{ für } m = n. \end{cases}$$

Es sei

$$(1.3) \qquad L^p(0, \infty) = \left\{F : ||F(\cdot)||_p \equiv \left[\int_0^\infty |F(t)|^p dt\right]^{1/p}\right\} \qquad (1 \leqq p < \infty),$$

und es gelte für eine Funktion f

$$(1.4) \qquad e^{-\rho t} f(t) \in L^p(0, \infty) \qquad (0 < \rho < \tfrac{1}{2}).$$

Definiert man die Fourier-Koeffizienten $S_n^{(\alpha)}[f]$ der Funktion f bezüglich des Systems $\{\varphi_n^{(\alpha)}\}$ durch die Ausdrücke

$$S_n^{(\alpha)}[f] = \int_0^\infty g^{(\alpha)}(t)f(t)\varphi_n^{(\alpha)}(t)dt, \tag{1.5}$$

(die Existenz der $S_n^{(\alpha)}$ folgt aus (1.4) durch Anwendung der Hölder'schen Ungleichung in (1.5)), so hat man damit aufgrund von (1.2) die folgende Fourier-Entwicklung:

$$g^{(\alpha)}(x)f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\alpha)}[f]\varphi_n^{(\alpha)}(x). \tag{1.6}$$

Es sei

$$T^{(\alpha)}[x, r, f] = \sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n^{(\alpha)}[f]\varphi_n^{(\alpha)}(x) \qquad (|r| < 1) \tag{1.7}$$

die Abel-Summe der auf der rechten Seite von (1.6) auftretenden Reihe. Mit (1.5) gilt dann

$$T^{(\alpha)}[x, r, f] = \int_0^\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n \varphi_n^{(\alpha)}(x)\varphi_n^{(\alpha)}(t)\right] g^{(\alpha)}(t)f(t)dt. \tag{1.8}$$

Der Kern aus (1.8) läßt sich in geschlossener Form darstellen; man hat die folgende Identität [7]:

$$\begin{aligned} K(x, t, r) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} r^n \varphi_n^{(\alpha)}(x)\varphi_n^{(\alpha)}(t) \\ &= g^{(\alpha)}(x)g^{(\alpha)}(t)(1-r)^{-1}(xtr)^{-\alpha/2} \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{r(x+t)}{1-r}\right] I_\alpha[2(1-r)^{-1}(xtr)^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dabei ist I_α die modifizierte Besselfunktion der Ordnung α. Unter Benutzung des Integrales von Weber [10] ergeben sich aus (1.9) für $\alpha = 0$ die folgenden Eigenschaften der Funktion $K(x, t, r)$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty K(x, t, r)dx = \frac{2}{1+r} \exp\left[-\frac{t}{2}\frac{1-r}{1+r}\right] \\ \displaystyle\int_0^\infty K(x, t, r)dt = \frac{2}{1+r} \exp\left[-\frac{x}{2}\frac{1-r}{1+r}\right] \end{cases} \tag{1.10}$$

(vgl. Butzer [3]). Für $\alpha \geqq 0$ wurden entsprechende Relationen in [5] angegeben.

Aus (1.10) erhält man die Konvergenz im Mittel von der Ordnung $p(1 \leqq p < \infty)$ der $T^{(0)}[x, r, f]$ gegen $e^{-t/2}f(t)$ (vgl. [3] und [6]):

Es sei $e^{-t/2}f(t) \in L^p(0, \infty)$, $1 \leqq p < \infty$. *Dann gilt*

$$\lim_{r\to 1} ||e^{-(\cdot)\frac{1}{2}}f(\cdot) - T^{(0)}[\cdot, r, f]||_p = 0. \tag{1.11}$$

Die Herleitung einer entsprechenden Aussage für beliebige Werte von α (mit $\alpha \geqq 0$) soll in einer anderen Arbeit erfolgen.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, zurückgehend auf eine Fragestellung von P. L. Butzer [3] ein der Relation (1.11) entsprechendes Ergebnis für die $(C, 1)$-Mittel der Reihe (1.6) zu beweisen. Eine Diskussion dieses Ergebnisses findet sich in der Arbeit [1, b] von R. Askey.

Es wird nun zunächst eine genaue Formulierung des Problems angegeben (vgl. Satz 1 und 2), ferner soll die Beweismethode skizziert werden:

Es sei

$$\sigma_{n,0}^{(\alpha)}[x, f] = \sum_{k=0}^{n} S_k^{(\alpha)}[f]\varphi_k^{(\alpha)}(x) \tag{1.12}$$

die n-te Partialsumme der Reihe (1.6). Für $\sigma_{n,0}^{(\alpha)}$ ergibt sich aufgrund von (1.5) die folgende Integraldarstellung:

$$\begin{cases} \sigma_{n,0}^{(\alpha)}[x, f] = \displaystyle\int_0^\infty g^{(\alpha)}(x)[g^{(\alpha)}(t)]^2 \frac{K_{n,0}(x, t)}{x-t} f(t)dt \\ \dfrac{K_{n,0}(x, t)}{x-t} = \displaystyle\sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma(l+1)}{(l+\alpha+1)} L_l^{(\alpha)}(x)L_l^{(\alpha)}(t). \end{cases} \tag{1.13}$$

Ein geschlossener Ausdruck für $K_{n,0}(x, t)$ wird durch die Formel von Christoffel-Darboux (vgl. (2.1)) gegeben.

Die Konvergenz im Mittel von der Ordnung p der $\sigma_{n,0}^{(\alpha)}[x, f]$ gegen die Funktion $g^{(\alpha)}(x)f(x)$ wurde von R. Askey und S. Wainger [1, a] untersucht:

Es sei $g^{(\alpha)}f \in L^p(0, \infty)$, $\frac{4}{3} < p < 4$; $\alpha \geqq 0$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} ||\sigma_{n,0}^{(\alpha)}[\cdot, f]-g^{(\alpha)}(\cdot)f(\cdot)||_p = 0. \tag{1.14}$$

Ein entsprechendes Ergebnis für Hermite-Reihen wird ebenfalls in [1, a] bewiesen.

Für die $(C, 1)$-Mittel der Reihe (1.6)

$$\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, f] = (n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} \sigma_{l,0}^{(\alpha)}[x, f] \tag{1.15}$$

findet man analog zu (1.13) die Integraldarstellung

$$\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, f] = \int_0^\infty g^{(\alpha)}(x)[g^{(\alpha)}(t)]^2 \left[\frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \frac{K_{l,0}(x, t)}{x-t}\right] f(t)dt. \tag{1.16}$$

Entsprechend zu den Beziehungen (1.10) läßt sich im Falle der arithmetischen Mittel der folgende Satz beweisen (siehe Abschn. 3):

SATZ 1: *Es sei* $\alpha \geqq \frac{7}{2}$; $\kappa > 0$. *Dann gilt gleichmäßig bezüglich* x

$$\int_0^\infty \frac{1}{n+1} \left| \sum_{l=0}^{n} \frac{K_{l,0}(x,t)}{x-t} \right| g^{(\alpha)}(x) g^{(\alpha)}(t) \begin{Bmatrix} t^{\alpha/2} e^{-\kappa t} \\ x^{\alpha/2} e^{-\kappa x} \end{Bmatrix} dt = O(1)$$

für $n \to \infty$.

Zum Beweis dieses Satzes wird zunächst im 2. Abschnitt ein geschlossener Ausdruck für die Funktion $(n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} K(x,t)$ hergeleitet. Unter Benutzung einiger Ergebnisse von R. Campbell [4] ergibt sich

$$(1.17) \qquad \sum_{l=0}^{n} K_{l,0}(x,t) = \left[1 + \frac{x+t}{(x-t)^2} + \frac{t \cdot \partial/\partial t - x \cdot \partial/\partial x}{x-t} \right] K_{n,0}(x,t).$$

Bei der Herleitung von (1.10) wurde lediglich eine Integralformel aus der Theorie der Besselfunktionen benötigt. Im Gegensatz dazu erfordert der Beweis des Satzes 1 aufgrund der spezifischen Struktur des Ausdruckes (1.17) einen bedeutend größeren Aufwand; es ist insbesondere eine Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften erforderlich. Eine derartige Diskussion des Ausdruckes (1.17) wurde bereits 1935 von E. Kogbetliantz [8, b] in der folgenden Form durchgeführt:

Es seien $K_{n,\delta}(x,t)$ die Cesàro-Mittel von der Ordnung δ ($\delta \geqq 0$) des Ausdruckes

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_l^{(\alpha)}(x) L_l^{(\alpha)}(t);$$

insbesondere hat man für $\delta = 1$

$$K_{n,1}(x,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} K_{l,0}(x,t).$$

Für diese $K_{n,\delta}(x,t)$ werden in [8, b] die folgenden asymptotischen Beziehungen angegeben:

$$K_{n,\delta}(x,t) = O\left[\frac{(xt)^{-\alpha/2-\frac{1}{4}} \exp(x/2+t/2)}{|\sqrt{x}-\sqrt{t}|^{\delta+1} \sqrt{n^\delta}} \right] \quad (x \neq t;\ \delta \geqq 0,\ \alpha > -1).$$

Entsprechende Abschätzungen für den Ausdruck $\partial/\partial x K_{n,\delta}(x,t)$ sowie für Hermite-Reihen finden sich ebenfalls in [8, b]. Zu diesen Ergebnissen bemerkt jedoch G. Szegö ([9, a], p. 238):

"Kogbetliantz ([8, a]; [8, b]) states erroneously the appraisal $L_n^{(\alpha)}(x) = O(x^{-\alpha/2-\frac{1}{4}} e^{x/2} n^{\alpha/2-\frac{1}{4}})$. Unfortunately the main results of the paper [8, *b*] are based on this erroneous statement".

Somit wird im 3. Abschnitt zunächst das asymptotische Verhalten des Ausdruckes (1.17) genauer untersucht. Die dabei zugrundegelegten asymptotischen Beziehungen für die $L_n^{(\alpha)}(x)$ (vgl. (3.1) und (3.2)) führen zu Fallunterscheidungen bezüglich der Größenordnung von x. Dementsprechend sind in (1.17) Fallunterscheidungen bezüglich x und t zu treffen; die sich auf diese Weise ergebenden verschiedenen asymptotischen Darstellungen für (1.17) werden in Tabellenform zusammengestellt. Sodann werden die gemäß Satz 1 auftretenden Integrale abgeschätzt. Dabei ergibt sich die Bedingung $\alpha \geqq \frac{7}{2}$; ferner werden die konvergenzerzeugenden Funktionen $t^{\alpha/2}e^{-\kappa t}$, $x^{\alpha/2}e^{-\kappa x}$ $(\kappa > 0)$ benötigt. Aufgrund des Auftretens dieser Funktionen sind weiter unten für die Funktion f stärkere Voraussetzungen als in (1.11) und (1.14) erforderlich (vgl. Satz 2).

Im 4. Abschnitt wird zunächst die folgende Ungleichung bewiesen:

Es sei $e^{-t\rho}f(t) \in L^p(0, \infty)$, $1 \leqq p < \infty$; $0 < \rho < \frac{1}{2}$; $\alpha \geqq \frac{7}{2}$. *Dann existiert ein* $M > 0$ *so, daß für* $n \to \infty$

$$(1.18) \qquad ||\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f]||_p \leqq M||e^{-(\cdot)\rho}f(\cdot)||_p;\ M = O(1)$$

gilt.

Aus dieser Beziehung ergibt sich dann unter Benutzung der Aussage, daß die Funktionen $e^{-\rho x}h(x)$ $(\rho > 0, h(x)$ Polynom) dicht in $L^p(0, \infty)$, $1 \leqq p < \infty$ sind [2], der folgende

Satz 2: *Es sei* $e^{-t\rho}f(t) \in L^p(0, \infty)$, $1 \leqq p < \infty$; $0 < \rho < \frac{1}{2}$; $\alpha \geqq \frac{7}{2}$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} ||\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f] - g^{(\alpha)}(\cdot)f(\cdot)||_p = 0.$$

2. Eine Identität für Laguerre-Polynome

Die Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha > -1;\ 0 \leqq x < \infty;\ n = 0, 1, \cdots)$ genügen den folgenden Beziehungen (vgl. [9, a]:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{k+1} L_k^{(\alpha)}(x)L_k^{(\alpha)}(t) = \frac{K_{n,0}(x, t)}{x-t} \text{ mit} \\ K_{n,0}(x, t) = a_{n+1}[L_n^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(t) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(t)]; \\ a_{n+1} = \dfrac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \text{ (Formel von Christoffel-Darboux).} \end{cases}$$

$$(2.2) \quad (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

$$x\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{2.3}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x)-L_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \tag{2.5}$$

Setzt man

$$K_{n,1}(x, t) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n} K_{l,0}(x, t), \tag{2.6}$$

so gilt (vgl. [4]) das folgende

LEMMA 1. *Die Funktion $K_{n,1}(x, t)$ besitzt die Darstellung*

$$K_{n,1}(x, t) = \frac{1}{n+1}\left[1+\frac{x+t}{(x-t)^2}+\frac{t\cdot\partial/\partial t-x\cdot\partial/\partial x}{x-t}\right]K_{n,0}(x, t).$$

Setzt man für die in (2.6) auftretenden Größen $K_{l,0}(x, t)$ die in (2.1) gegebenen Darstellungen ein, so erhält man durch Umordnen der Summe

$$\begin{aligned}(n+1)K_{n,1}(x, t) &= -a_{n+1}L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(t)+a_1L_0^{(\alpha)}(x)L_1^{(\alpha)}(t)\\ &\quad+\sum_{l=1}^{n}L_l^{(\alpha)}(x)[a_{1+l}L_{l+1}^{\alpha}(t)-a_lL_{l-1}^{(\alpha)}(t)]\\ &= a_{n+1}L_n^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(t)-a_1L_1^{(\alpha)}(x)L_0^{(\alpha)}(t)\\ &\quad-\sum_{l=1}^{n}L_l^{(\alpha)}(t)[a_{l+1}L_{l+1}^{(\alpha)}(x)-a_lL_{l-1}^{(\alpha)}(x)].\end{aligned}$$

Führt man die aus (2.2) und (2.3) folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}L_{l+1}^{(\alpha)}(x) &= \frac{-x+2l+\alpha+1}{l+1}L_l^{(\alpha)}(x)-\frac{l+\alpha}{l+1}L_{l-1}^{(\alpha)}(x)\\ L_{l-1}^{(\alpha)}(x) &= \frac{l}{l+\alpha}L_l^{(\alpha)}(x)-\frac{x}{l+\alpha}L_l'^{(\alpha)}(x)\quad\left(L_l'^{(\alpha)}(x)=\frac{d}{dx}L_l^{(\alpha)}(x)\right)\end{aligned} \tag{2.7}$$

(und entsprechend für t) jeweils in die eckigen Klammern ein und addiert dann die obigen beiden Ausdrücke für $K_{n,1}(x, t)$, so ergibt sich mit (2.1)

$$(n+1)K_{n,1}(x, t) = \sum_{l=1}^{n}\frac{a_{l+1}}{l+1}[tL_l^{(\alpha)}(x)L_l'^{(\alpha)}(t)-xL_l'^{(\alpha)}(x)L_l^{(\alpha)}(t)]+K_{n,0}(x, t). \tag{2.8}$$

Schreibt man die erste Relation aus (2.7) in der Form

$$(2.9)\quad (-x+2l+\alpha+1)L_l^{(\alpha)}(x) = (l+1)L_{l+1}^{(\alpha)}(x)+(l+\alpha)L_{l-1}^{(\alpha)}(x),$$

und ersetzt x durch t, so erhält man durch Differentiation

$$(2.10)\quad (-t+2l+\alpha+1)L_l'^{(\alpha)}(t) = (l+1)L_{l+1}'^{(\alpha)}(t)+(l+\alpha)L_{l-1}'^{(\alpha)}(t)+L_l^{(\alpha)}(t).$$

Multipliziert man (2.9) mit $(l+1)^{-1}a_{l+1}L_l'^{(\alpha(}(t)$ und (2.10) mit $(l+1)^{-1}a_{l+1}L_l^{(\alpha)}(x)$, so findet man durch Subtraktion der so entstehenden Beziehungen den Ausdruck

$$(x-t)\frac{a_{l+1}}{l+1}L_l^{(\alpha)}(x)L_l'^{(\alpha)}(t) = \frac{\partial}{\partial t}K_{l,0}(x, t)-\frac{\partial}{\partial t}K_{l-1,0}(x, t) + \frac{a_{l+1}}{l+1}L_l^{(\alpha)}(x)L_l^{(\alpha)}(t).$$

Durch Vertauschung von x und t in (2.9) und (2.10) hat man analog

$$(x-t)\frac{a_{l+1}}{l+1}L_l'^{(\alpha)}(x)L_l^{(\alpha)}(t) = \frac{\partial}{\partial x}K_{l,0}(x, t)-\frac{\partial}{\partial x}K_{l-1,0}(x, t) + \frac{a_{l+1}}{l+1}L_l^{(\alpha)}(x)L_l^{(\alpha)}(t).$$

Unter Benutzung von (2.1) folgt mit den letzten beiden Relationen aus (2.8) die Behauptung.

Damit ist Lemma 1 bewiesen. Eine für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $K_{n,1}(x, t)$ geeignetere Darstellung enthält das folgende

Lemma 2. *Es gilt*

$$K_{n,1}(x, t) = \frac{1}{n+1}\left[\frac{x+t}{(x-t)^2}K_{n,0}(x, t)+\frac{t\Phi_n(x, t)+x\Psi_n(x, t)}{x-t}\right]$$

mit

$$\begin{aligned} K_{n,0}(x, t) &= a_{n+1}[L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(t)],\\ \Phi_n(x, t) &= a_{n+1}[L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha+1)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(t)],\\ \Psi_n(x, t) &= a_{n+1}[L_{n+1}^{(\alpha+1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(t)]. \end{aligned}$$

Aus (2.1) folgt nämlich mit (2.4)

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{-1}K_{n,0}(x, t) &= [L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)]L_{n+1}^{(\alpha)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(t)\\ (2.11)\qquad &= L_{n+1}^{(\alpha)}(x)[L_{n+1}^{(\alpha)}(t)-L_n^{(\alpha)}(t)]-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(t)\\ &= L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha-1)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(t). \end{aligned}$$

Diese Umformung wurde bereits von G. Szegö [9, b] zur Unter-

suchung des Konvergenzverhaltens von Reihen Laguerre'scher Polynome benutzt. Die Darstellungen für $\Phi_n(x, t)$ und $\Psi_n(x, t)$ ergeben sich analog unter Benutzung von (2.4) und (2.5).

Es soll noch das Verhalten des Ausdruckes $(x-t)^{-1}K_{n,1}(x, t)$ für $x = t$ untersucht werden. Mit der Abkürzung

$$\Lambda_n(x, t) = [(x+t)+(x-t)(t \cdot \partial/\partial t - x \cdot \partial/\partial x)]K_{n,0}(x, t) \tag{2.12}$$

findet man

$$K_{n,0}(x, t)|_{x=t} = 0$$

$$\Lambda_n(x, t)|_{x=t} = \frac{\partial}{\partial t}\Lambda_n(x, t)|_{x=t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda_n(x, t)|_{x=t} = 0.$$

Daraus folgt sofort

LEMMA 3. *Es gilt*

$$\frac{K_{n,1}(x, t)}{x-t} = \frac{-1}{n+1}\left[\frac{\partial}{\partial t}K_{n,0}(x, t)|_{t=\tau_1} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Lambda_n(x, t)|_{t=\tau_2}\right]$$

mit

$$\tau_{1,2} = x + \vartheta_{1,2}(x, t) \cdot (t-x); \quad 0 < \vartheta_{1,2} < 1.$$

Dabei wird gemäß (2.11) und (2.12)

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^{-1}\,\partial/\partial t\, K_{n,0}(x, t) &= L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_n^{(\alpha+1)}(t) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(t) \\
a_{n+1}^{-1}\,\partial^3/\partial t^3\,\Lambda_n(x, t) &= -3[L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_{n-1}^{(\alpha+1)}(t) - L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_{n-1}^{(\alpha+2)}(t)] \\
&\quad + (4x-5t)[L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_{n-2}^{(\alpha+3)}(t) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_{n-2}^{(\alpha+2)}(t)] \\
&\quad + 3x[L_n^{(\alpha)}(x)L_{n-2}^{(\alpha+2)}(t) - L_n^{(\alpha+1)}(x)L_{n-1}^{(\alpha+1)}(t)] \\
&\quad + t(x-t)[L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_{n-3}^{(\alpha+3)}(t) - L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_{n-3}^{(\alpha+4)}(t)] \\
&\quad - x(x-t)[L_n^{(\alpha+1)}(x)L_{n-2}^{(\alpha+2)}(t) - L_n^{(\alpha)}(x)L_{n-2}^{(\alpha+3)}(t)].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

3. Der Beweis von Satz 1

Es werden die folgenden asymptotischen Beziehungen für die Laguerre'schen Polynome benötigt [9, a]:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} O(n^\alpha) & \text{für } 0 \leqq x \leqq c/n \\ x^{-\alpha/2-\frac{1}{4}}O(n^{\alpha/2-\frac{1}{4}}) & \text{für } c/n \leqq x \leqq \omega \end{cases} \tag{3.1}$$

(ω, c fest, positiv; $\alpha > -1$).

$$\operatorname*{Max}_{\omega \leqq x} |e^{-x/2}x^\lambda L_n^{(\alpha)}(x)| = O(n^q); \; q = \operatorname{Max}(\lambda - \tfrac{1}{3}; \alpha/2 - \tfrac{1}{4}). \tag{3.2}$$

Die Größe λ in (3.2) wird im Folgenden durchweg den Wert $\alpha/2+\frac{1}{12}$ besitzen, so daß also

$$\operatorname*{Max}_{\omega \leqq x} |e^{-x/2} x^{\alpha/2+1/12} L_n^{(\alpha)}(x)| = O(n^{\alpha/2-\frac{1}{4}})$$

gilt.

Mit Hilfe der Stirling'schen Formel ergibt sich für die in (2.1) eingeführte Größe a_{n+1} das asymptotische Verhalten

$$a_{n+1} = O(n^{1-\alpha}). \tag{3.3}$$

Es sollen die folgenden Abkürzungen eingeführt werden:

$$A_n(x, t) = g^{(\alpha)}(x) g^{(\alpha)}(t) |(x-t)^{-1} K_{n,1}(x, t)|, \tag{3.4}$$

$$p_\kappa(x) = x^{\alpha/2} e^{-\kappa x}. \tag{3.5}$$

Damit hat man zunächst den

Hilfssatz 1: *Es sei* $0 \leqq x \leqq (c+1)/n$; $c > 0$; $\kappa > 0$; $\alpha \geqq 0$. *Dann gilt*

$$\int_0^\infty \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t) dt = O(1).$$

Zerlegt man das Integrationsintervall in geeignete Teilintervalle, so erhält man mit Hilfe von (3.1)-(3.3) für $A_n(x, t)$ die in der folgenden Tabelle zusammengestellten asymptotischen Ausdrücke:

	t	$A_n(x, t)$ $(0 \leqq x \leqq (c+1)/n)$
1	$0 \leqq t \leqq (c+2)/n$	$O(n)$
2	$(c+2)/n \leqq t \leqq \omega$ $(\omega > 0$, fest$)$	$t^{-5/4} O(n^{-1/4}) + t^{-7/4} O(n^{-3/4}) + t^{-9/4} O(n^{-5/4})$
3	$\omega \leqq t$	$t^{-1-1/12} O(n^{-1/4}) + t^{-3/2-1/12} O(n^{-3/4}) + t^{-2-1/12} O(n^{-5/4})$

Es sei zunächst

$$0 \leqq x \leqq (c+1)/n;\ 0 \leqq t \leqq (c+2)/n. \tag{3.6}$$

Da in diesem Bereich die Stelle $x = t$ auftritt, wählt man für $(x-t)^{-1} K_{n,1}(x, t)$ die in Lemma 3 gegebene Darstellung. Für $\tau = x+\vartheta(t-x)$ $(0 < \vartheta < 1)$ hat man mit (3.6) $\tau = O(n^{-1})$. Gemäß (3.1) wird weiter unter Benutzung von (3.3)

(3.7)

$$\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial t}K_{n,0}(x,t)|_{t=\tau} = \frac{a_{n+1}}{n+1}\left[-L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(\tau)+L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)L_n^{(\alpha+1)}(\tau)\right]$$

$$= \frac{a_{n+1}}{n+1}O(n^{2\alpha}) = O(n^{\alpha}).$$

Analog findet man aus (2.13)

$$\frac{1}{n+1}\frac{\partial^3}{\partial t^3}A_n(x,t)|_{t=\tau} = O(n^{\alpha+1}). \tag{3.8}$$

Wegen $\alpha \geqq 0$ wird weiter mit (3.6)

$$g^{(\alpha)}(x) = O(n^{-\alpha/2});\ g^{(\alpha)}(t) = O(n^{-\alpha/2}). \tag{3.9}$$

Zusammenfassend ergibt sich aus (3.7)-(3.9) gemäß Lemma 3

$$A_n(x,t) = O(n). \tag{3.10}$$

Es sei weiterhin

$$0 \leqq x \leqq (c+1)/n;\ (c+2)/n \leqq t \leqq \omega. \tag{3.11}$$

Mit der in Lemma 2 gegebenen Darstellung von $(x-t)^{-1}K_{n,1}(x,t)$ erhält man aus (3.1) und (3.3) den folgenden asymptotischen Ausdruck:

$$\begin{aligned} A_n(x,t) = {} & g^{(\alpha)}(x)g^{(\alpha)}(t)O(n^{\alpha/2})t^{\alpha/2} \\ & \cdot\left\{\frac{x+t}{(t-x)^3}\left[O(n^{-3/4})t^{1/4}+O(n^{-5/4})t^{-1/4}\right]\right. \\ & + \frac{t}{(t-x)^2}\left[O(n^{-3/4})t^{-3/4}+O(n^{-1/4})t^{-1/4}\right] \\ & \left. + \frac{x}{(t-x)^2}\left[O(n^{1/4})t^{1/4}+O(n^{-1/4})t^{-1/4}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Aus (3.11) folgt $(t-x)^{-1} = O(t^{-1})$ und weiter

$$A_n(x,t) = O(n^{-1/4})t^{-5/4}+O(n^{-3/4})t^{-7/4}+O(n^{-5/4})t^{-9/4}. \tag{3.12}$$

Analog läßt sich der Fall

$$0 \leqq x \leqq (c+1)/n;\ \omega \leqq t \tag{3.13}$$

behandeln. Ausgehend von (3.1) und (3.2) findet man mit

$(t-x)^{-1} = O(t^{-1})$ aus der in Lemma 2 gegebenen Darstellung die Beziehung

$$A_n(x, t) = O(n^{-1/4})t^{-1-1/12} + O(n^{-3/4})t^{-3/2-1/12} + O(n^{-5/4})t^{-2-1/12}. \tag{3.14}$$

Zusammenfassend ergibt sich mit (3.10), (3.12), (3.14) die eingangs aufgestellte Tabelle.

1. Aus der ersten Zeile dieser Tabelle folgt sofort wegen $p_\kappa(x) = O(1)$, $p_\kappa(t) = O(1)$

$$\int_0^{(c+2)/n} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(n) \int_0^{(c+2)/n} dt = O(1). \tag{3.15}$$

2. In der zweiten Zeile hat man aufgrund der Beziehung

$$\int_{(c+2)/n}^{\omega} t^{-s}dt = O(n^{-1+s}) \qquad (s = \tfrac{5}{4}; \tfrac{7}{4}; \tfrac{9}{4})$$

und $p_\kappa(x) = O(1)$, $p_\kappa(t) = O(1)$

$$\int_{(c+2)/n}^{\omega} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1). \tag{3.16}$$

3. Mit $\int_\omega^\infty t^{-s}dt = O(1)$ $(s > 1)$, $p_\kappa(x) = O(1)$, $p_\kappa(t) = O(1)$ ergibt sich sofort

$$\int_\omega^\infty \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(n^{-1/4}). \tag{3.17}$$

Gemäß (3.15)-(3.17) ist der Hilfssatz 1 bewiesen. Weiterhin hat man den folgenden

Hilfssatz 2. *Es sei*

$$(c+1)/n \leqq x \leqq (c+1)/\sqrt{n};\ c > 0;\ \kappa > 0;\ \alpha \geqq \tfrac{7}{2}.$$

Dann gilt

$$\int_0^\infty \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1).$$

Es läßt sich zunächst analog zum Beweis des Hilfssatzes 1 die folgende Tabelle von asymptotischen Ausdrücken aufstellen:

	t	$A_n(x, t)$ $\quad ((c+1)/n \leqq x \leqq (c+1)/\sqrt{n})$
1	$0 \leqq t \leqq 1/n$	$(x-t)^{-1}[O(n^{1/4})x^{1/4}+O(n^{-1/4})x^{-1/4}$ $+O(n^{-3/4})x^{-3/4}]$
2	$1/n \leqq t \leqq x$	$O(n^{-1/2})[x^{1/4}t^{-3/4}+x^{-1/4}t^{-1/4}]$ $+O(1)[x^{-1/4}t^{-5/4}+x^{1/4}t^{-7/4}]$ $+O(n^{1/2})[x^{3/4}t^{-7/4}+x^{1/4}t^{-5/4}+x^{-1/4}t^{-3/4}]$
3	$x \leqq t \leqq x+1/n$	$g^{(\alpha)}(t)x^{-\alpha/2}[O(n^{-1/2})x^{-1/2}+O(1)x^{-3/2}$ $+O(n^{1/2})x^{-1}]$
4	$x+1/n \leqq t \leqq (c+2)/\sqrt{n}$	$(t-x)^{-3}(x+t)O(n^{-1})[1+x^{-1/4}n^{-1/8}]$ $+(t-x)^{-2}O(n^{-1/2})[tx^{-1/2}+n^{-1/4}]$
5	$(c+2)/\sqrt{n} \leqq t \leqq \omega'$ $(\omega' > 0$, fest$)$	$(t-x)^{-3}tO(n^{-1})[x^{-1/4}t^{1/4}+x^{1/4}t^{-1/4}]$ $+(t-x)^{-2}tO(n^{-1/2})[x^{1/4}t^{-3/4}+x^{-1/4}t^{-1/4}$ $+x^{3/4}t^{-5/4}]$
6	$\omega' \leqq t$	$O(n^{-3/4})[t^{-3/2-1/12}+t^{-2-1/12}]$ $+O(n^{-1/4})[t^{-3/2-1/12}+t^{-2-1/12}+t^{-1-1/12}]$

Die Zerlegung des Integrationsintervalles erfolgt dabei nach zwei Gesichtspunkten, nämlich nach dem Gültigkeitsbereich der asymptotischen Beziehungen (3.1), (3.2) und im Hinblick auf die Abschätzung der entsprechenden Integrale. In der zweiten bzw. dritten Zeile wurde für $(x-t)^{-1}K_{n,1}(x, t)$ die in Lemma 3 gegebene Darstellung benutzt; die dann bei den asymptotischen Entwicklungen von $A_n(x, t)$ auftretenden Größen τ^{-s} $(s > 0)$ lassen sich gemäß $1/\tau \leqq 1/t$ bzw. $1/\tau \leqq 1/x$ durch t^{-s} bzw. x^{-s} ausdrücken.

1. Für die erste Zeile der Tabelle hat man wegen $\alpha \geqq \frac{7}{2}$

$$(x-t)^{-1}p_\kappa(t) = (x-t)^{-1}\, tO(1) = O(1),$$
$$(x-t)^{-1}p_\kappa(x) = (x-t)^{-1}xO(1) = O(1),$$

und somit also gemäß $(c+1)/n \leqq x \leqq (c+1)/\sqrt{n}$

$$\begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t) = O(n^{\frac{1}{8}}).$$

Folglich gilt

$$\int_0^{1/n} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1). \tag{3.18}$$

2. Wegen

$$\int_{1/n}^{x} t^{-s} dt = \begin{cases} O(x^{1-s}) & \text{für } 0 < s < 1 \\ O(n^{s-1}) & \text{für } 1 < s \end{cases}$$

ergibt sich für $\alpha \geqq \frac{7}{2}$ mit $x \leqq (c+1)/\sqrt{n}$ zunächst

$$\int_{1/n}^{x} p_\kappa(x) A_n(x, t) dt = p_\kappa(x) O(n^{\frac{7}{8}}) = O(1). \tag{3.19}$$

Gemäß $p_\kappa(t) = O(1) \cdot p_\kappa(x)$ gilt damit aber auch für $\alpha \geqq \frac{7}{2}$

$$\int_{1/n}^{x} p_\kappa(t) A_n(x, t) dt = O(1). \tag{3.20}$$

3. Mit

$$\int_{x}^{x+1/n} g^{(\alpha)}(t) dt \leqq (x+1/n)^{\alpha/2} \cdot 1/n = O(x^{\alpha/2+1})$$

folgt wegen $\alpha \geqq \frac{7}{2}$ sowie $x \leqq (c+1)/\sqrt{n}$

(3.21)

$$\int_{x}^{x+1/n} p_\kappa(x) A_n(x, t) dt = p_\kappa(x) [O(n^{-\frac{1}{2}}) x^{\frac{1}{2}} + O(1) x^{-\frac{1}{2}} + O(n^{\frac{1}{2}})] = O(1)$$

und weiter gemäß $p_\kappa(t) = O(1) p_\kappa(x)$

$$\int_{x}^{x+1/n} p_\kappa(t) A_n(x, t) dt = O(1). \tag{3.22}$$

4. Durch Ausintegrieren ergibt sich

$$\int_{x+1/n}^{(c+2)/\sqrt{n}} (t-x)^{-3}(x+t) dt = O(n) + xO(n^2)$$

$$\int_{x+1/n}^{(c+2)/\sqrt{n}} (t-x)^{-2} t dt = O(\ln n) + xO(n).$$

Damit findet man wegen $p_\kappa(x) = O(n^{-\alpha/4})$, $p_\kappa(t) = O(n^{-\alpha/4})$ und $\alpha \geqq \frac{7}{2}$

$$\int_{x+1/n}^{(c+2)/\sqrt{n}} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t) dt = O(1). \tag{3.23}$$

5. Wegen $\alpha \geqq \frac{7}{2}$ gilt $p_\kappa(t) t^s = O(1)$ $(s = \frac{1}{4};\ -\frac{1}{4};\ -\frac{3}{4})$; mit $x \leqq (c+1)/\sqrt{n} \leqq (c+2)/\sqrt{n} \leqq t \leqq \omega'$ wird weiter

$$p_\kappa(t) A_n(x, t) = (t-x)^{-3} t O(n^{-\frac{3}{4}}) + (t-x)^{-2} t O(n^{-\frac{1}{8}})$$

$$p_\kappa(x) A_n(x, t) = (t-x)^{-3} t O(n^{-1}) + (t-x)^{-2} t O(n^{-\frac{1}{4}}).$$

Daraus erhält man gemäß

$$\int_{(c+2)/\sqrt{n}}^{\omega'} (t-x)^{-3} t dt = O(n^{\frac{1}{2}}) + xO(n)$$

$$\int_{(c+2)/\sqrt{n}}^{\omega'} (t-x)^{-2} t dt = O(\ln n) + xO(n^{\frac{1}{2}}):$$

$$\int_{(c+2)/\sqrt{n}}^{\omega'} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t) dt = O(1). \tag{3.24}$$

6. In der sechsten Zeile gilt wegen $\alpha \geqq \frac{7}{2}$ $p_\kappa(t) = O(1)$ und $p_\kappa(x) = O(1)$; zusammen mit

$$\int_{\omega'}^{\infty} t^{-s} dt = O(1) \qquad (s = 1+\tfrac{1}{12};\ \tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{12};\ 2+\tfrac{1}{12})$$

wird also

$$\int_{\omega'}^{\infty} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t) dt = O(1). \tag{3.25}$$

Zusammenfassend ist mit (3.18)-(3.25) der Hilfssatz 2 bewiesen. Man hat weiterhin den

Hilfssatz 3: *Es sei* $(c+1)/\sqrt{n} \leqq x \leqq \omega$; $c > 0$; $\kappa > 0$; $\alpha \geqq 2$. *Dann gilt*

$$\int_{0}^{\infty} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t) dt = O(1).$$

Wie oben findet man mit (3.1)-(3.3) die folgende Liste von asymptotischen Ausdrücken für $A_n(x, t)$:

	t	$A_n(x, t)((c+1)/\sqrt{n} \leqq x \leqq \omega)$
1	$0 \leqq t \leqq 1/n$	$(x-t)^{-1}\lfloor x^{1/4}O(n^{1/4}) + x^{-1/4}O(n^{-1/4}) + x^{-3/4}O(n^{-3/4})\rfloor$
2	$1/n \leqq t \leqq x-c/\sqrt{n}$	$(x-t)^{-3}O(n^{-1}) + (x-t)^{-2}O(n^{-1/2})\lfloor 1+t^{-1}(xt)^{3/4}\rfloor$
3	$x-c/\sqrt{n} \leqq t \leqq x+d/\sqrt{n}$ $(d > 0)$	$x^{-1/2}O(n^{-1/2}) + x^{-3/2}O(1) + x^{-1}O(n^{1/2})$
4	$x+d/\sqrt{n} \leqq t \leqq \omega'$ $(\omega' > \omega)$	$O(n^{-1})[(t-x)^{-3} + (t-x)^{-2}x^{-1/4}]$ $+O(n^{-1/2})[(t-x)^{-2} + (t-x)^{-1}(xt)^{-1/4}]$
5	$\omega' \leqq t$	$O(n^{-1})[x^{-1/4}t^{-3/2-1/12} + t^{-2-1/12}]$ $+O(n^{-1/2})[t^{-3/2-1/12} + t^{-2-1/12} + x^{-1/4}t^{-1-1/12}]$

1. Der Beweis der Beziehung

$$\int_0^{1/n} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1) \tag{3.26}$$

verläuft völlig analog zu Nr. 1 aus Hilfssatz 2.

2. In dieser Zeile findet man durch Ausführung der Integration

$$\int_{1/n}^{x-c/\sqrt{n}} (x-t)^{-s}dt = O(n^{(s-1)/2}) \qquad (s = 2; 3)$$

und weiter unter Benutzung der Zerlegung

$$\frac{(xt)^{\frac{3}{4}}}{t(x-t)^2} = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}t^{\frac{1}{4}}} + \frac{t^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{4}}(x-t)} + \frac{t^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}(x-t)^2}$$

$$\int_{1/n}^{x-c/\sqrt{n}} t^{-1}(x-t)^{-2}(xt)^{\frac{3}{4}}dt = x^{-\frac{1}{2}}O(\ln n)+O(n^{\frac{1}{2}}),$$

so daß also mit $p_\kappa(t) = O(1)$, $p_\kappa(x) = O(1)$

$$\int_{1/n}^{x-c/\sqrt{n}} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1)+x^{-\frac{1}{2}}O(n^{-\frac{1}{2}} \ln n) = O(1) \tag{3.27}$$

gilt.

3. Mit $p_\kappa(t) = O(1) \cdot p_\kappa(x)$ folgt sofort

$$\int_{1/n}^{x-c/\sqrt{n}} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1)[x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}]p_\kappa(x) = O(1). \tag{3.28}$$

4. Man findet leicht die folgenden Abschätzungen:

$$\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\omega'} (t-x)^{-s}dt = O(n^{(s-1)/2}) \qquad (s = 2; 3),$$

$$\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\omega'} t^{-\frac{1}{4}}(t-x)^{-1}dt = x^{-\frac{1}{4}}O(\ln n),$$

und damit wegen $p_\kappa(t) = O(1)$, $p_\kappa(x) = O(1)$

$$\begin{aligned}\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\omega'} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt &= O(1)x^{-\frac{1}{2}}O(n^{-\frac{1}{2}} \ln n) \\ &\quad +x^{-\frac{1}{4}}O(n^{-\frac{1}{2}}) = O(1).\end{aligned} \tag{3.29}$$

5. Analog zu den Abschätzungen aus Nr. 6 in Hilfssatz 2 findet man

$$\int_{\omega'}^{\infty} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1). \tag{3.30}$$

Mit (3.26)-(3.30) ist der Hilfssatz 3 bewiesen. Abschließend hat man den

HILFSSATZ 4. *Es sei* $0 < \omega \leqq x$; $\kappa > 0$; $\alpha \geqq \frac{7}{2}$. *Dann gilt*

$$\int_0^\infty \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1).$$

Es ergeben sich die folgenden asymptotischen Relationen für $A_n(x, t)$:

	t	$A_n(x, t)$ $(0 < \omega \leqq x)$
1	$0 \leqq t \leqq 1/n$	$O(n^{-1/4})$
2	$1/n \leqq t \leqq \omega''$ $(0 < \omega'' \leqq \omega - c)$ $(c > 0)$	$O(n^{-1})\dfrac{x(x+t)t^{-1/4}}{(x-t)^3}[x^{-1-1/12}+x^{-1/2-1/12}]$ $+O(n^{-1/2})\dfrac{xt^{-1/4}}{(x-t)^2}[x^{-1-1/12}+x^{-1/2-1/12}+x^{-1/12}]$
3	$\omega'' \leqq t \leqq x - c/\sqrt{n}$	$O(n^{-1})x^{-1/12}\dfrac{x(x+t)}{(x-t)^3}+O(n^{-1/2})x^{-1/12}\dfrac{x}{(x-t)^2}$
4	$x - c/\sqrt{n} \leqq t \leqq x + d/\sqrt{n}$	$O(n^{1/2})[x^{3/2-1/12}+x^{1-1/12}+x^{1/2-1/12}]$
5	$x + d/\sqrt{n} \leqq t$	$O(n^{-1})\dfrac{t^{3/2-1/12}}{(t-x)^3}+O(n^{-1/2})\dfrac{t^{1-1/12}}{(t-x)^2}$

1. Mit $p_\kappa(t) = O(1)$, $p_\kappa(x) = O(1)$ ergibt sich sofort

$$\int_0^{1/n} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1). \tag{3.31}$$

2. Aus den Identitäten

$$\frac{x(x+t)}{(x-t)^3} = \frac{1}{x-t} + \frac{3t}{(x-t)^2} + \frac{2t^2}{(x-t)^3}; \quad \frac{x}{(x-t)^2} = \frac{1}{x-t} + \frac{t}{(x-t)^2}$$

ergeben sich die folgenden Abschätzungen:

$$\int_{1/n}^{\omega''} t^{-\frac{1}{4}}(x-t)^{-3}x(x+t)dt = O(1)+O(n^{\frac{1}{4}}) \ln x,$$

$$\int_{1/n}^{\omega''} t^{-\frac{1}{4}}(x-t)^{-2}x\,dt = O(1)+O(n^{\frac{1}{4}}) \ln x.$$

Wegen $p_\kappa(t) = O(1)$, $p_\kappa(x) = O(1)$ folgt somit

$$(3.32)\qquad \int_{1/n}^{\omega''} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = [O(n^{-\frac{1}{2}})+O(n^{-\frac{1}{4}}) \ln x] \cdot [x^{-1-1/12}+x^{-1/2-1/12}+x^{-1/12}] = O(1).$$

3. Unter Benutzung der Identitäten aus Nr. 2 findet man zusammen mit $t^s p_\kappa(t) = O(1)$, $x^s p_\kappa(x) = O(1)$ $(s = 0; 1; 2)$

$$\int_{\omega''}^{x-c/\sqrt{n}} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} \frac{x(x+t)}{(x-t)^3}\, dt = O(1) \ln x+O(n),$$

$$\int_{\omega''}^{x-c/\sqrt{n}} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} \frac{x}{(x-t)^2}\, dt = O(1) \ln x+O(n^{\frac{1}{2}}),$$

d.h. also

$$(3.33)\qquad \int_{\omega''}^{x-c/\sqrt{n}} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(1)+x^{-1/12}O(1) \ln x = O(1).$$

4. Es gilt $p_\kappa(t) = O(1) \cdot p_\kappa(x)$, $x^s p_\kappa(x) = O(1)$ $(s = \frac{3}{2}-\frac{1}{12}; 1-\frac{1}{12}; \frac{1}{2}-\frac{1}{12})$; damit findet man sofort

$$(3.34)\qquad \int_{x-c/\sqrt{n}}^{x+d/\sqrt{n}} \begin{Bmatrix} p_\kappa(t) \\ p_\kappa(x) \end{Bmatrix} A_n(x, t)dt = O(n^{\frac{1}{2}}) \cdot \frac{d+c}{n^{\frac{1}{2}}} = O(1).$$

5. Gemäß $p_\kappa(t)A_n(x, t) = O(n^{-1})(t-x)^{-3}+O(n^{-\frac{1}{2}})(t-x)^{-2}$ hat man aufgrund von

$$\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\infty} (t-x)^{-s}dt = O(n^{(s-1)/2}) \qquad (s = 2; 3)$$

zunächst

$$(3.35)\qquad \int_{x+d/\sqrt{n}}^{\infty} p_\kappa(t)A_n(x, t)dt = O(1).$$

Weiterhin findet man durch dreimalige partielle Integration

$$\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\infty} (t-x)^{-3}t^{3/2-1/12}dt = x^{3/2-1/12}O(n)+x^{1/2-1/12}O(n^{1/2}) +x^{-1/2-1/12}O(\ln n)+O(1)\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\infty} t^{-3/2-1/12}|\ln (t-x)|dt.$$

Mit $|\ln (t-x)| = O(\ln n)+O(\ln t)$ und $x^s p_\kappa(x) = O(1)$ $(s = \frac{3}{2}-\frac{1}{12}; \frac{1}{2}-\frac{1}{12}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}-\frac{1}{12})$ hat man daraus

$$p_\kappa(x)\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\infty} (t-x)^{-3}t^{3/2-1/12}dt = O(n)$$

und analog

$$p_\kappa(x)\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\infty}(t-x)^{-2}t^{1-1/12}dt = O(n^{\frac{1}{2}}).$$

Folglich gilt also

$$\int_{x+d/\sqrt{n}}^{\infty} p_\kappa(x)A_n(x, t)dt = O(1). \tag{3.36}$$

Insgesamt ist mit (3.31)-(3.36) der Hilfssatz 4 bewiesen.

Die Hilfssätze 1 bis 4 umfassen die folgenden x-Intervalle: $0 \leqq x \leqq (c+1)/n$, $(c > 0)$; $(c+1)/n \leqq x \leqq (c+1)/\sqrt{n}$; $(c+1)/\sqrt{n} \leqq x < \omega$, $(\omega > 0$, fest); $\omega \leqq x$. Somit liefern sie zusammen den Beweis des Satzes 1.

4. Der Beweis von Satz 2

Aus Satz 1 ergibt sich das folgende

LEMMA 4. *Es sei* $e^{-t\rho}f(t) \in L^p(0, \infty)$, $1 \leqq p < \infty$; $0 < \rho < \frac{1}{2}$; $\alpha \geqq \frac{7}{2}$. *Dann existiert ein* $M > 0$ *so, daß*

$$||\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot; f]||_p \leqq M||e^{-(\cdot)\rho}f(\cdot)||_p;\ M = O(1)$$

gilt.

Setzt man

$$\begin{cases} M_1 = \sup\limits_{\substack{1\leqq x\leqq\infty\\ n=0,1,\cdots}}\left[\int_0^\infty p_\kappa(t)A_n(x, t)dt\right] \\ M_2 = \sup\limits_{\substack{1\leqq t\leqq\infty\\ n=0,1,\cdots}}\left[\int_0^\infty p_\kappa(t)A_n(x, t)dx\right], \end{cases} \tag{4.1}$$

so lautet das Ergebnis von Satz 1 in anderer Formulierung folgendermaßen: $M_1 = O(1)$; $M_2 = O(1)$ (für $\kappa > 0$).

Aus (2.6) ergibt sich für $\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, f]$ die folgende Darstellung:

$$\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, f] = \int_0^\infty (x-t)^{-1}K_{n,1}(x, t)g^{(\alpha)}(x)[g^{(\alpha)}(t)]^2 f(t)dt. \tag{4.2}$$

Daraus folgt gemäß (3.4)

$$|\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, f]| \leqq \int_0^\infty A_n(x, t)g^{(\alpha)}(t)|f(t)|dt. \tag{4.3}$$

Mit $\rho = \frac{1}{2}-\kappa$ gilt $g^{(\alpha)}(t) = p_\kappa(t)e^{-t\rho}$ und weiter $(1/p+1/p' = 1)$:

$$|A_n(x, t)g^{(\alpha)}(t)f(t)| = |A_n(x, t)p_\kappa(t)|^{1/p}|A_n(x, t)p_\kappa(t)|^{1/p'}\cdot |e^{-t\rho}f(t)|.$$

Unter Benutzung der Hölder'schen Ungleichung erhält man damit aus (4.1) und (4.3) (wegen $0 < \rho < \frac{1}{2}$ wird auch $0 < \kappa < \frac{1}{2}$):

$$|\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, f]|^p \leqq M_1^{p/p'} \int_0^\infty p_\kappa(t) A_n(x, t) |e^{-t\rho} f(t)|^p dt.$$

Weiter wird nun

$$\begin{aligned} ||\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f]||_p^p &= \int_0^\infty |\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, f]|^p dx \\ &\leqq M_1^{p/p'} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty p_\kappa(t) A_n(x, t) |e^{-t\rho} f(t)|^p dt \right] dx. \end{aligned}$$

Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen ergibt zusammen mit der zweiten Relation aus (4.1)

$$||\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f]||_p^p \leqq M_1^{p/p'} M_2 \int_0^\infty |e^{-t\rho} f(t)|^p dt.$$

Setzt man noch $M = \operatorname{Max}(M_1, M_2)$, so folgt aus dieser Beziehung die Aussage von Lemma 4:

$$||\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f]||_p \leqq M ||e^{-(\cdot)\rho} f(\cdot)||_p. \tag{4.4}$$

Bezeichnet nun $h_m(t)$ ein Polynom vom Grade m, so ist die Menge der Funktionen $\{e^{-t\rho} h_m(t); \rho > 0, \text{ fest}; m = 0, 1, \cdots\}$ dicht in $L^p(0, \infty)$, $1 \leqq p < \infty$, [2]. Mit

$$F(t) = e^{-t\rho} f(t) \in L^p(0, \infty) \tag{4.5}$$

gilt somit

$$\lim_{m \to \infty} ||F(\cdot) - e^{-(\cdot)\rho} h_m(\cdot)||_p = 0. \tag{4.6}$$

Weiterhin hat man wegen der Orthogonalität der Funktionen $\{\varphi_n^{(\alpha)}; n = 0, 1, \cdots\}$

$$\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, \varphi_l^{(\alpha)}/g^{(\alpha)}] = \big(1 - l/(n+1)\big) \varphi_l^{(\alpha)}(x),$$

wegen $\varphi_l^{(\alpha)} \in L^p(0, \infty)$ wird also bei festem l

$$\lim_{n \to \infty} ||\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, \varphi_l^{(\alpha)}/g^{(\alpha)}] - \varphi_l^{(\alpha)}(\cdot)||_p = 0. \tag{4.7}$$

Da das Polynom $h_m(x)$ bei festem m eine endliche Entwicklung nach den Laguerre'schen Polynomen $\{L_k^{(\alpha)}(x); 0 \leqq k \leqq m\}$ besitzt, folgt aus (4.7) aufgrund der Linearität des Operators $\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[x, f]$ bezüglich f

$$\lim_{n \to \infty} ||\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, h_m] - g^{(\alpha)}(\cdot) h_m(\cdot)||_p = 0. \tag{4.8}$$

Durch Anwendung der Dreiecksungleichung hat man nun

$$\|\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f]-g^{(\alpha)}(\cdot)f(\cdot)\|_p \leqq \|\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f]-\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, h_m]\|_p$$
$$+\|\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, h_m]-g^{(\alpha)}(\cdot)h_m(\cdot)\|_p+\|g^{(\alpha)}(\cdot)h_m(\cdot)-g^{(\alpha)}(\cdot)f(\cdot)\|_p.$$

Damit folgt weiter gemäß Lemma 4 sowie (4.5)

$$\|\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f]-g^{(\alpha)}(\cdot)f(\cdot)\|_p \leqq M\|F(\cdot)-e^{-(\cdot)\rho}h_m(\cdot)\|_p$$
$$+\|\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, h_m]-g^{(\alpha)}(\cdot)h_m(\cdot)\|_p+M'\|F(\cdot)-e^{-(\cdot)\rho}h_m(\cdot)\|_p,$$

wobei $M' = \mathrm{Max}_{0\leqq t\leqq\infty}|p_\kappa(t)|$ ist.

Aus (4.6) und (4.8) ergibt sich also

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_{n,1}^{(\alpha)}[\cdot, f]-g^{(\alpha)}(\cdot)f(\cdot)\|_p = 0 \tag{4.9}$$

für $1 \leqq p < \infty$ und $e^{-t\rho}f(t) \in L^p(0, \infty)$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$. Somit ist der Satz 2 bewiesen.

LITERATUR

R. Askey–S. Wainger

[1, a] Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series. Amer. Journ. of Math. 87, 695–708 (1965).

R. Askey

[1, b] Norm inequalities for some orthogonal series. Bull. Amer. Math. Soc. 72, 808–823 (1966).

R. C. Buck

[2] Studies in Modern Math. M. H. Stone: A Generalized Weierstraß Approximation Theorem. Prentice-Hall, Inc. 1962.

P. L. Butzer

[3] Halbgruppen von linearen Operatoren und das Darstellungs- und Umkehrproblem für Laplace-Transformationen. Math. Ann. 134, 154–166 (1957).

R. C. Campbell

[4] Généralisation de la formule de Féjèr pour les séries des polynomes usuels. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 71, 389–491 (1954).

W. B. Caton–E. Hille

[5] Laguerre polynomials and Laplace integrals. Duke Math. J. 12, 217–242 (1945).

A. G. Dominguez

[6] Condiciones necesarias y suficientes para que una funcion sea una integral de Laplace. Rev. Unión Mat. Argentina 2, 1–9 (1938).

Erdélyi–Magnus–Oberhettinger–Tricomi

[7] Higher Transcendental Functions, Vol. II. McGraw-Hill 1953.

E. Kogbetliantz

[8, a] Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 49 137–221 (1932).

[8, b] Sur les moyennes arithmétiques des séries-noyaux des développements en séries d'Hermite et de Laguerre et sur celles de ces séries-noyaux derivées terme à terme. Journ. Math. and Phys. 15, 37–99 (1935).

G. Szegö

[9, a] Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 23, New York 1959.

[9, b] Zur Theorie der Laguerre'schen Polynome I. Math. Zeitschr. 25, 87–115 (1926).

G. N. Watson

[10] A Treatise on the Theory of Bessel-Functions. Cambridge 1962.

(Oblatum 1–12–67)

Rheinisch-Westfälische
Technische Hochschule
Aachen