COMPOSITIO MATHEMATICA

MARIO VILLA

Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 137-146
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__137_0>

Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali

di

Mario Villa

(Bologna)

1. Sono state svolte recentemente ricerche riguardanti la determinazione di trasformazioni puntuali tra spazi lineari che, nell'intorno del 2^0 ordine di una coppia generica di punti corrispondenti, si comportano in modo particolare [1]).

Sorgono ora ricerche analoghe di caratterizzazione di trasformazioni puntuali che si comportano in modo particolare nell'intorno del 3^0 ordine di una coppia generica di punti corrispondenti. E ciò offre notevole interesse per le trasformazioni puntuali fra due piani in quanto per queste si hanno invarianti (proiettivi) solo a partire appunto dall'intorno del 3^0 ordine.

Nelle ricerche svolte col possente metodo del riferimento mobile intervengono in modo essenziale le omografie tangenti, e con esse le corrispondenze linearizzanti di Čech, collegate a loro volta a certe due forme differenziali quadratiche Ω_1, Ω_2.

Da tempo, nelle ricerche locali sulle trasformazioni puntuali, io ho studiato le trasformazioni quadratiche osculatrici, che svolgono nell'intorno del 2^0 ordine un ufficio analogo a quello delle omografie tangenti per l'intorno del 1^0 ordine [2]). Mi parve quindi assai probabile che nelle nuove ricerche integrali, relative all'intorno del 3^0 ordine, col metodo del riferimento mobile dovessero pure svolgere un'azione importante tali trasformazioni quadratiche [3]).

---

[1]) Villa, *Recherche de types particuliers de transformations ponctuelles,* Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953.

[2]) Villa, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi, I. Le proiettività caratteristiche. II. Loro costruzione,* „Accad. Italia, Rend." (7) 8, 718—724 (1942) e (7) 4, 1—7 (1943).

[3]) Mi riferisco qui alle trasformazioni fra piani. Per quelle fra spazi S_r $(r > 2)$ in luogo delle trasformazioni quadratiche si hanno trasformazioni cremoniane d'ordine r. Si veda: Villa, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. I. Intorno del 2° ordine. II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci. III. Trasformazioni cremoniane osculatrici,* „Accad. Naz. Lincei, Rend." (8), 4, 55—61, 192—196, 295—303 (1948). E' da notare che per la stessa natura del metodo del riferimento

Ciò si verifica appieno come viene provato nel seguito. Apparirà come le omografie tangenti, la corrispondenza linearizzante di Čech, le forme Ω_1, Ω_2 trovano perfetto riscontro nelle trasformazioni quadratiche osculatrici, in una nuova corrispondenza (analoga a quella di Čech) relativa a quest'ultime, in certe forme differenziali cubiche Θ_1, Θ_2. E i nuovi enti si presentano, nel metodo del riferimento mobile, in modo analogo e con la stessa spontaneità dei primi.

Nel n. 2 si introduce la nozione di corrispondenza linearizzante per due trasformazioni puntuali qualunque. La corrispondenza linearizzante di Čech è quella relativa alla trasformazione puntuale data e ad una sua omografia tangente (n. 3). Nel n. 4 sono considerate le corrispondenze linearizzanti relative alla data trasformazione e ad una trasformazione quadratica osculatrice: le *corrispondenze linearizzanti del* 3^0 *ordine.* Nel n. 5 si ricorda brevemente come si perviene, nel metodo del riferimento mobile, alle forme differenziali quadratiche Ω_1, Ω_2 e alla relativa corrispondenza linearizzante di Čech. Nei nn. 6, 7 si dimostra come in modo analogo si pervenga alle forme differenziali cubiche Θ_1, Θ_2 (analoghe alle Ω_1, Ω_2). E nel n. 8 si dimostra che le Θ_1, Θ_2 definiscono (in modo analogo alle Ω_1, Ω_2) una corrispondenza linearizzante del 3^0 ordine.

Si presentano, dopo ciò, in modo spontaneo nuovi problemi sulla determinazione di trasformazioni puntuali che si comportano in modo particolare nell'intorno del 3^0 ordine, analoghi a quelli già considerati relativi all'intorno del 2^0 ordine [4]).

Ci si limita qui alle trasformazioni puntuali fra piani ma le considerazioni svolte s'estendono alle trasformazioni puntuali fra spazi lineari di dimensione qualunque [5]).

2. Corrispondenza linearizzante di due trasformazioni puntuali.

Siano T_1, T_2 *due trasformazioni puntuali fra due piani* $\Pi(x, y)$

---

mobile, era chiaro che le uniche trasformazioni algebriche approssimatrici che potevano (e dovevano) avere interesse erano quelle biunivoche, cioè cremoniane.

[4]) Così, ad esempio, ci si può proporre di determinare le trasformazioni puntuali tali che, in ogni coppia di punti corrispondenti, esiste una trasformazione quadratica osculatrice per cui la relativa corrispondenza linearizzante del 3° ordine è totalmente degenere. Anche le ricerche di Boruwka (*Sur les correspondences analytiques entre deux plans projectifs*, „Publ. Univ. Masaryk", Brno, n. 72 (1926), n. 85 (1927)) potrebbero essere riprese alla luce dei nuovi concetti.

[5]) Il presente lavoro è frutto della collaborazione col mio assistente prof. Guido Vaona.

e $\overline{\Pi}(\overline{x}, \overline{y})$ *che si approssimano fino all'intorno di ordine* s (>0) *di una coppia regolare di punti corrispondenti* $(O, \overline{O})$. *Fissata una retta* p *per* O *consideriamo i due* E_{s+1} *corrispondenti in* T_1 *e* T_2 *all'* E_{s+1} *di flesso di centro* O *appartenente a* p. *I fasci che proiettano tali* E_{s+1} *da un punto* S *(di* $\overline{\Pi}$*) hanno un contatto analitico, in generale, di ordine* s; *il luogo dei punti* S *per cui tale contatto è di ordine* $s+1$ *almeno è una retta* $\overline{p}$ *per* $\overline{O}$.

Le trasformazioni puntuali T_1, T_2, approssimandosi fino all'intorno di ordine s (>0) di $(O, \overline{O})$, subordinano fra i fasci O, $\overline{O}$ una stessa proiettività (non degenere) $\mathscr{P}$. Se p' è la retta corrispondente in $\mathscr{P}$ alla $\overline{p}$, si può considerare la corrispondenza γ che associa alla retta p la retta p'. Si dirà γ *corrispondenza linearizzante di* T_1 *e* T_2.

Se le due trasformazioni sono rappresentate dalle equazioni

$$T_1) \begin{cases} \overline{x} = x + \varphi_2 + \dots + \varphi_s + \varphi_{s+1} + \dots \\ \overline{y} = y + \psi_2 + \dots + \psi_s + \psi_{s+1} + \dots \end{cases}$$

$$T_2) \begin{cases} \overline{x} = x + \varphi_2 + \dots + \varphi_s + \bar{\varphi}_{s+1} + \dots \\ \overline{y} = y + \psi_2 + \dots + \psi_s + \bar{\psi}_{s+1} + \dots \end{cases}$$

(φ_i, ψ_i polinomi omogenei di grado i in x, y), se $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta}$ è l'equazione della retta p e se $\dfrac{x}{\alpha'} = \dfrac{y}{\beta'}$ è l'equazione di p', la corrispondenza linearizzante γ ha le equazioni

$$\begin{aligned} \alpha' &= \varphi_{s+1}(\alpha, \beta) - \bar{\varphi}_{s+1}(\alpha, \beta) \\ \beta' &= \psi_{s+1}(\alpha, \beta) - \bar{\psi}_{s+1}(\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{1}$$

La corrispondenza γ è quindi algebrica di indici 1, $s+1$, cioè d'ordine $s+1$.

Si ha:

Le rette unite della corrispondenza linearizzante di T_1, T_2 *in* $(O, \overline{O})$ *sono le* $s+2$ *direzioni d'iperosculazione di* T_1, T_2 *in* $(O, \overline{O})$.

Infatti le rette unite della (1) hanno l'equazione

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \varphi_{s+1} - \bar{\varphi}_{s+1} & \psi_{s+1} - \bar{\psi}_{s+1} \end{vmatrix} = 0$$

che rappresenta appunto le direzioni d'iperosculazione di T_1, T_2 in $(O, \overline{O})$ [6]).

---

[6]) Villa, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, „Boll. Un. Mat. It." (3), 2, 188—195 (1947).

3. La corrispondenza K-linearizzante di Čech.

Data una trasformazione puntuale T, esistono ∞^2 omografie tangenti alla T in una coppia regolare $(O, \overline{O})$ (cioè che approssimano T fino all'intorno del 1^0 ordine di $O, \overline{O}$). Se K è una di queste omografie, la corrispondenza K-linearizzante di Čech relativa a T è la corrispondenza linearizzante (nel senso del n. 2) delle trasformazioni T e K [7]).

Queste corrispondenze K-linearizzanti di Čech sono di indici 1 e 2, cioè di ordine 2 (n. 2), e le diremo perciò corrispondenze linearizzanti del 2^0 ordine di T nella coppia $(O, \overline{O})$.

4. Le corrispondenze linearizzanti del 3^0 ordine.

Data una trasformazione puntuale T fra due piani, è noto che, in una coppia regolare $(O, \overline{O})$, esistono ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici (t.q.o.) [8]).

La corrispondenza linearizzante di T e di una t.q.o. si dirà *corrispondenza linearizzante del* 3^0 *ordine*. Si hanno dunque ∞^2 corrispondenze linearizzanti del 3^0 ordine della T in $(O, \overline{O})$.

Se la T è rappresentata in $(O, \overline{O})$ dalle equazioni [9])

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x - xy + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4]\\ \bar{y} &= y - xy + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4],\end{aligned}$$

le equazioni delle ∞^2 t.q.o. sono [10])

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x\frac{\lambda x + (\mu+1)y - 1}{(\lambda+1)(\mu+1)xy - (\lambda x - 1)(\mu y - 1)}\\ \bar{y} &= y\frac{(\lambda+1)x + \mu y - 1}{(\lambda+1)(\mu+1)xy - (\lambda x - 1)(\mu y - 1)},\end{aligned} \tag{2}$$

al variare dei parametri λ, μ $(\lambda, \mu \neq \infty)$.

Dalle (2) si ha

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x - xy + (\mu+1)x^2y - \mu xy^2 + [4]\\ \bar{y} &= y - xy - \lambda x^2y + (\lambda+1)xy^2 + [4].\end{aligned} \tag{3}$$

Le equazioni della corrispondenza linearizzante della T e della (3), cioè la corrispondenza linearizzante del 3^0 ordine di T relativa alla (2), è (n. 2)

---

[7]) Cech, *Géométrie projective différentielle des correspondences entre deux espaces*, „Cas. Pro Pest. Mat. a Fys.", 74, 32—48, 75, 123—158 (1950).

[8]) Villa, op. cit. in [2]).

[9]) Villa, op. cit. in [2]).

[10]) Villa, op. cit. in [2]).

$$(4)\qquad \begin{aligned}\alpha' &= a_{30}\alpha^3 + 3\left(a_{21} - \frac{\mu+1}{3}\right)\alpha^2\beta + 3\left(a_{12} + \frac{\mu}{3}\right)\alpha\beta^2 + a_{03}\beta^3\\ \beta' &= b_{30}\alpha^3 + 3\left(b_{21} + \frac{\lambda}{3}\right)\alpha^2\beta + 3\left(b_{12} - \frac{\lambda+1}{3}\right)\alpha\beta^2 + b_{03}\beta^3.\end{aligned}$$

Al variare di λ, μ, le (4) danno le equazioni delle ∞^2 corrispondenze linearizzanti del 3^0 ordine di T.

5. Le forme quadratiche Ω_1, Ω_2 e la corrispondenza linearizzante di Čech.

Una trasformazione puntuale T tra due piani Π e $\overline{\Pi}$ è determinata se si conoscono le espressioni delle coordinate omogenee del punto A di Π e quelle delle coordinate omogenee del punto corrispondente B di $\overline{\Pi}$ in funzione (che supponiamo analitiche) dei due parametri principali u_1, u_2. Per tutti i valori considerati di u_1, u_2, si supporrà

$$\left| A \frac{\partial A}{\partial u_1} \frac{\partial A}{\partial u_2} \right| \neq 0, \qquad \left| B \frac{\partial B}{\partial u_1} \frac{\partial B}{\partial u_2} \right| \neq 0.$$

Nel piano Π si assumano come punti fondamentali del riferimento mobile il punto A e due punti arbitrari A_1, A_2. Nel piano $\overline{\Pi}$ si assumano come punti fondamentali del riferimento mobile il punto B e i corrispondenti B_1, B_2 di A_1, A_2 in una prefissata omografia tangente K.

Si hanno le equazioni fondamentali

$$(5)\qquad \begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2\\ dA_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2\\ dA_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2\\ dB &= \overline{\omega}_{00}B + \overline{\omega}_{01}B_1 + \overline{\omega}_{02}B_2\\ dB_1 &= \overline{\omega}_{10}B + \overline{\omega}_{11}B_1 + \overline{\omega}_{12}B_2\\ dB_2 &= \overline{\omega}_{20}B + \overline{\omega}_{21}B_1 + \overline{\omega}_{22}B_2.\end{aligned}$$

Le ω_{ik}, $\overline{\omega}_{ik}$ $(i, k = 0, 1, 2)$ essendo forme di Pfaff nei due parametri principali e nei dieci parametri secondari.

Ponendo $\tau_{ik} = \overline{\omega}_{ik} - \omega_{ik}$, le formule di struttura sono

$$(6)\qquad \begin{aligned} \omega'_{ik} &= [\omega_{i0}\ \omega_{0k}] + [\omega_{i1}\ \omega_{1k}] + [\omega_{i2}\ \omega_{2k}]\\ \tau'_{ik} &= [\tau_{i0}\ \tau_{0k}] + [\tau_{i1}\ \tau_{1k}] + [\tau_{i2}\ \tau_{2k}] + [\tau_{i0}\ \omega_{0k}] + [\tau_{i1}\ \omega_{1k}] +\\ &\quad + [\tau_{i2}\ \omega_{2k}] + [\omega_{i0}\ \tau_{0k}] + [\omega_{i1}\ \tau_{1k}] + [\omega_{i2}\ \tau_{2k}].\end{aligned}$$

Fra le 18 forme di Pfaff ω_{ik}, τ_{ik} devono esistere 6 relazioni lineari. Essendo B, B_1, B_2 i corrispondenti in una omografia tangente K di A, A_1, A_2, segue

$$(7)\qquad \tau_{01} = \tau_{02} = 0.$$

Le 4 relazioni restanti s'ottengono per derivazione esterna delle (7). Si ponga

$$\omega_{01} = \omega_1, \quad \omega_{02} = \omega_2$$

e si osservi che ω_1, ω_2 sono due forme (lineari) indipendenti nei differenziali dei due parametri principali.

La differenziazione esterna delle (7) porge:

$$[(\tau_{11} - \tau_{00})\ \omega_1] + [\tau_{21}\ \omega_2] = 0$$
$$[\tau_{12}\ \omega_1] + [(\tau_{22} - \tau_{00})\ \omega_2] = 0.$$

Da un ben noto lemma di Cartan, segue che esistono due forme quadratiche in ω_1, ω_2

$$(8) \qquad \Omega_1 = \sum_{1}^{2}{}_{r,s}\, C^1_{rs}\,\omega_r\,\omega_s \qquad \Omega_2 = \sum_{1}^{2}{}_{r,s}\, C^2_{rs}\,\omega_r\,\omega_s$$

dove si ha

$$C^1_{rs} = C^1_{sr}, \; C^2_{rs} = C^2_{sr},$$

tali che

$$(9) \qquad \tau_{11} - \tau_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_1} \qquad \tau_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_2} \qquad \tau_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_1} \qquad \tau_{22} - \tau_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_2}.$$

Le (9) sono le 4 ulteriori relazioni lineari fra le nostre forme di Pfaff. Le ω_1, ω_2 si possono considerare come coordinate omogenee della retta del fascio A, individuata dai punti A, $\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2$ ossia da A, dA. E così le ω_1, ω_2 si possono considerare come coordinate omogenee della retta del fascio B, individuata dai punti B, $\omega_1 B_1 + \omega_2 B_2$ ossia da B, dB [11]).

Ciò posto, consideriamo fra i fasci A, B la corrispondenza che alla retta (ω_1, ω_2) fa corrispondere la retta (Ω_1, Ω_2) dove i valori di Ω_1, Ω_2 sono dati dalle (8).

---

[11]) Chiamando corrispondenti due rette dei fasci A, B relative agli stessi valori di ω_1, ω_2 si ha la proiettività $\mathscr{P}$ subordinata dalla data trasformazione puntuale nell'intorno del 1° ordine di (A, B).

Com'è noto, questa corrispondenza è quella linearizzante del 2° ordine (o di Čech) relativa all'omografia tangente K [12]).

6. Ulteriori particolarizzazioni dei riferimenti proiettivi. L'equazione delle direzioni caratteristiche è (nn. 2, 3) [13])

$$\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1 = 0.$$

Tali direzioni si supporranno distinte e non indeterminate.

Si assumano i punti A_1, A_2 (B_1, B_2) su due rette caratteristiche e come omografia tangente K l'omografia caratteristica relativa alle rette AA_1, AA_2 [14]). La trasformazione K-linearizzante è allora degenere (nel senso che ad ogni retta p corrisponde una retta fissa p') [15]).

Si avrà quindi

$$C^1_{11} = C^1_{22} = C^2_{11} = C^2_{22} = 0, \quad C^1_{12} \cdot C^2_{12} \neq 0.$$

Le (9) divengono

$$\begin{aligned} \tau_{11} - \tau_{00} &= C^1_{12}\omega_2 \\ \tau_{21} &= C^1_{12}\omega_1 \\ \tau_{12} &= C^2_{12}\omega_2 \\ \tau_{22} - \tau_{00} &= C^2_{12}\omega_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Indicando con δ un simbolo di differenziazione rispetto al quale i parametri principali u_1, u_2 sono considerati costanti, posto $\omega_{ik}(\delta) = e_{ik}$ dalle formule (6), (10) si ottiene

$$\begin{aligned} \delta C^1_{12} &= C^1_{12}(e_{22} - e_{00}) \\ \delta C^2_{12} &= C^2_{12}(e_{11} - e_{00}). \end{aligned}$$

Essendo $C^1_{12} \cdot C^2_{12} \neq 0$, con scelta opportuna dei riferimenti può rendersi

$$C^1_{12} = C^2_{12} = -1.$$

Le (10) divengono

$$\begin{aligned} \tau_{11} - \tau_{00} &= -\omega_2 \\ \tau_{21} &= -\omega_1 \\ \tau_{12} &= -\omega_2 \\ \tau_{22} - \tau_{00} &= -\omega_1. \end{aligned} \tag{11}$$

[12]) Cech, op. cit. in [7]).

[13]) Le direzioni caratteristiche (od inflessionali) sono le rette unite nelle corrispondenze linearizzanti del 2° ordine.

[14]) Villa, op. cit. in [2]).

[15]) Vaona, *Sulla trasformazione linearizzante di una corrispondenza puntuale fra spazi lineari*, „Boll. Un. Mat. It." (3), 6, 293—299 (1951)).

7. Le forme cubiche Θ_1, Θ_2.

Derivando esternamente le (11) si ottiene

$$\begin{aligned}
&[(2\omega_{12} - 2\tau_{10} - \omega_2)\,\omega_1] + [(\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{21} - \tau_{20})\,\omega_2] = 0\\
&[(\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{21} - \tau_{20})\,\omega_1] + [(2\omega_{21} - \omega_1)\,\omega_2] = 0\\
&[(2\omega_{12} - \omega_2)\,\omega_1] + [(\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{12} - \tau_{10})\,\omega_2] = 0\\
&[(\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{12} - \tau_{10})\,\omega_1] + [(2\omega_{21} - 2\tau_{20} - \omega_1)\,\omega_2] = 0.
\end{aligned}$$

Esistono quindi due forme cubiche

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \alpha_{30}\omega_1^3 + 3\alpha_{21}\omega_1^2\omega_2 + 3\alpha_{12}\omega_1\omega_2^2 + \alpha_{03}\omega_2^3\\
\Theta_2 &= \beta_{30}\omega_1^3 + 3\beta_{21}\omega_1^2\omega_2 + 3\beta_{12}\omega_1\omega_2^2 + \beta_{03}\omega_2^3
\end{aligned} \tag{12}$$

tali che si ha

$$\begin{aligned}
2\omega_{12} - 2\tau_{10} - \omega_2 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1^2}\\
\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{21} - \tau_{20} &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\\
2\omega_{21} - \omega_1 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_2^2}\\
2\omega_{12} - \omega_2 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_1^2}\\
\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{12} - \tau_{10} &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\\
2\omega_{21} - 2\tau_{20} - \omega_1 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_2^2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

8. La corrispondenza linearizzante del 3º ordine individuata dalle forme Θ_1, Θ_2.

Consideriamo fra i fasci A, B la corrispondenza γ che alla retta (ω_1, ω_2) fa corrispondere la retta (Θ_1, Θ_2) dove i valori di Θ_1, Θ_2 sono dati dalle (12).

Orbene: *questa corrispondenza è quella linearizzante del* 3º *ordine* (*relativa cioè ad una trasformazione quadratica osculatrice*).

Infatti se si calcolano gli sviluppi locali fino ai termini di 3º grado della nostra trasformazione T si trova [16]):

---

[16]) Si procede nel modo seguente: si considerano i punti P e $\overline{P}$ corrispondenti in T, sufficientemente prossimi ad A, B aventi coordinate non omogenee x, y e $\overline{x}$, $\overline{y}$ nei riferimenti mobili AA_1A_2 e BB_1B_2 e si scrivono le relazioni che esprimono che i punti P e $\overline{P}$ sono fissi nei piani Π e $\overline{\Pi}$. Si ha $P = A + xA_1 + yA_2$, da cui si ricava dP. Nell'espressione di dP si sostituiranno a dA, dA_1, dA_2 le espressioni (5) e infine s'imporrà $P + dP \equiv P$. Si ottiene

$$(14)\quad \begin{aligned} \bar{x} &= x - xy + \frac{1}{6}[\alpha_{30}x^3 + 3(\alpha_{21}+1)x^2y + 3(\alpha_{12}+1)xy^2 + \\ &+ \alpha_{03}y^3] + [4] \\ \bar{y} &= y - xy + \frac{1}{6}[\beta_{30}x^3 + 3(\beta_{21}+1)x^2y + 3(\beta_{12}+1)xy^2 + \\ &+ \beta_{03}y^3] + [4]. \end{aligned}$$

La trasformazione quadratica osculatrice in (A, B) alla T (n. 4), relativa ai valori $-\frac{1}{2}$ per λ *e* $-\frac{1}{2}$ per μ, ha le equazioni

$$(15)\quad \bar{x} = 2x\frac{-x+y-2}{xy-(x+2)(y+2)},\ \bar{y} = 2y\frac{x-y-2}{xy-(x+2)(y+2)}$$

e la corrispondenza linearizzante del 3^0 ordine di T relativa alla t.q.o. di equazioni (15) è (n. 4)

$$\begin{aligned} \alpha' &= \Theta_1(\alpha, \beta) \\ \beta' &= \Theta_2(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

cioè appunto la γ.

Osservazione:

Le forme Θ_1, Θ_2 dipendono dalla retta $A_1 A_2$ del riferimento mobile.

Cambiando tale retta si dimostra che i coefficienti α_{30}, α_{03}, β_{30}, β_{03} rimangono inalterati mentre i rimanenti si alterano nel modo seguente

$$\alpha'_{21} = \alpha_{21} + \varrho,\quad \alpha'_{12} = \alpha_{12} - \varrho,\quad \beta'_{21} = \beta_{21} - \sigma,\quad \beta'_{12} = \beta_{12} + \sigma.$$

$$(+)\quad \begin{aligned} dx &= -\omega_1 + (\omega_{00} - \omega_{11})x - \omega_{21}y + \omega_{10}x^2 + \omega_{20}xy \\ dy &= -\omega_2 - \omega_{12}x + (\omega_{00} - \omega_{22})y + \omega_{10}xy + \omega_{20}y^2, \end{aligned}$$

espressioni analoghe per $d\bar{x}$, $d\bar{y}$. La T sia rappresentata dalle equazioni

$$(\ddagger)\quad \begin{aligned} \bar{x} &= f(x, y) = a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{22}y^2 + \dots \\ \bar{y} &= \varphi(x, y) = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{22}y^2 + \dots \end{aligned}$$

Nelle relazioni

$$d\bar{x} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + d_0 f$$

$$d\bar{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + d_0 \varphi$$

(dove $d_0 f$, $d_0\varphi$ indicano differenziazione eseguita soltanto sui coefficienti a_{ik} e b_{ik}) si sostituisca a dx, dy, $d\bar{x}$, $d\bar{y}$ le espressioni $(+)$ e le analoghe, a $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, le espressioni che si ottengono dalla $(\ddagger)$ e così a $\bar{x}$, $\bar{y}$ (che figurano in $d\bar{x}$, $d\bar{y}$) le espressioni $(\ddagger)$. Le relazioni che così si ottengono devono essere identità rispetto ad x, y, ω_1, ω_2. Tenendo conto delle (11) e delle (13), si ricavano i valori delle a e delle b, cioè le (14).

Al variare di ϱ e σ le equazioni

$$\alpha' = \Theta'_1$$
$$\beta' = \Theta'_2$$

rappresentano tutte le corrispondenze linearizzanti del 3^0 ordine.

Fissata una posizione della retta A_1A_2, la trasformazione quadratica relativa alla corrispondenza linearizzante

$$\alpha' = \Theta_1$$
$$\beta' = \Theta_2$$

è quella che ha per punti singolari sulle rette (caratteristiche) AA_1, AA_2 i punti di coordinata -2 [17]).

(Oblatum 8-9-54)

---

[17]) Fra le ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici a T nella coppia (A, B), è unica quella avente per punti singolari due punti arbitrariamente assegnati su due rette caratteristiche per A (o per B). Si veda: VILLA, op. cit. in [2]).

I punti singolari della t.q.o. (15) sulle rette caratteristiche $y = 0$, $x = 0$ hanno coordinata -2 (cioè sono i quarti armonici di A dopo A_1, U_1 oppure A_2, U_2 risp., U_1, U_2 essendo le intersezioni della retta unità risp. con AA_1, AA_2).