COMPOSITIO MATHEMATICA

TOKUI SATO

Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra

Compositio Mathematica, tome 11 (1953), p. 271-290
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1953__11__271_0>

Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra

par

Tokui Satō

(Kōbe)

1. Théorème d'existence.

D'abord expliquons les notations qui seront utilisées dans la suite,

I_r: intervalle fermé $a \leqq x \leqq a + r$,

Δ_r: domaine fermé $a \leqq t \leqq x \leqq a + r$ dans le plan (x, t).

$D = D(\Delta_r, f(x), \varrho)$: domaine fermé dans l'espace (x, t, u) défini par $(x, t) \in \Delta_r$, $|u - f(x)| \leqq \varrho$, où $f(x)$ est une fonction continue dans I_r et ϱ une constante positive.

Considérons l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t))dt, \tag{1}$$

où $K(x, t, u)$ est continue dans D et $|K(x, t, u)| \leqq M$.

Soit $\mathscr{F}$ la famille formée des fonctions $u(x)$ qui sont continues, et satisfont à $u(a) = f(a)$ et $|u(x) - f(x)| \leqq \varrho$ dans $I_{r'}$, r' désignant le nombre $\min\{r, \varrho/M\}$.

Nous faisons correspondre à une fonction $u(x)$ de $\mathscr{F}$ la fonction $\bar{u}(x)$ définie par l'égalité

$$\bar{u}(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t))dt.$$

Désignons par $\overline{\mathscr{F}}$ la famille des fonctions transformées $\bar{u}(x)$. On voit sans peine que $\overline{\mathscr{F}} \subseteqq \mathscr{F}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ est également continue.

Soit $\{u_\nu(x)\}$ une suite de fonctions de $\mathscr{F}$ qui tend vers $u(x)$ uniformément dans $I_{r'}$. On aura

$$\begin{aligned}\lim_{\nu \to \infty} \bar{u}_\nu(x) &= f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t))dt \\ &= \bar{u}(x).\end{aligned}$$

Le théorème d'existence de points invariants dans l'espace fonctionnel montre donc qu'il existe une fonction telle que l'on ait

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t))dt, \qquad u(x) \in \mathscr{F}.$$

Nous arrivons donc au théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Soient $f(x)$ une fonction continue dans I_r et $K(x, t, u)$ une fonction continue dans D satisfaisant à $|K(x, t, u)| \leqq M$. Alors l'équation intégrale* (1) *admet au moins une solution continue dans $I_{r'}$, où $r' = \min\{r, \varrho/M\}$.*

Si la fonction $K(x, t, u)$ satisfait en outre à la condition de Lipschitz

$$|K(x, t, u) - K(x, t, \bar{u})| \leqq L\,|u - \bar{u}|, \tag{2}$$

on peut prendre pour $\mathscr{F}$ la famille formée des fonctions continues telles que

$$|u(x) - f(x)| \leqq \frac{M_0}{L}\{\exp(L(x-a)) - 1\},$$

$$|K(x, t, f(t))| \leqq M_0 \leqq M \qquad (x, t) \in \Delta_r,$$

et on arrivera au

COROLLAIRE. *Supposons outre les hypotheses du théorème* 1 *que $K(x, t, u)$ satisfait à la condition de Lipschitz* (2) *et à l'inégalité $|K(x, t, f(t))| \leqq M_0 \leqq M$ pour $(x, t) \in \Delta_r$, l'équation* (1) *admet une solution continue dans $I_{r''}$, où $r'' = \min\left\{r, \frac{1}{L}\log\left(1 + \frac{\varrho L}{M_0}\right)\right\}$.*

Remarque.

1) Soient $f(x)$ et $K(x, t, u)$ continues respectivement dans I_r et dans R qui est une région bornée et fermée dans l'espace des variables x, t, u.

Si l'équation intégrale (1) admet une solution $u = u(x)$ dans I_r, $u = u(x)$ est continue dans I_r.

2) Supposons de plus que $D^+f(a)$ existe, on a alors

$$D^+u(a) = D^+f(a) + K(a, a, f(a)).$$

2. Prolongement de la solution.

Quoique le fait suivant soit évident, il est très important. Nous le donnons donc sous la forme du théorème.

THÉORÈME 2. *Soient $f(x)$ et $K(x, t, u)$ continues respectivement dans I_r et dans une région R dans l'espace (x, t, u). Si l'équation intégrale* (1) *admet une solution $u = \bar{u}(x)$ dans un intervalle $a \leqq x \leqq x_0 (a < x_0 < a + r)$, et l'équation intégrale*

$$(3) \qquad u(x) = f(x) + \int_a^{x_0} K(x, t, \bar{u}(t))dt + \int_{x_0}^{x} K(x, t, u(t))dt$$

admet une solution $u = \bar{\bar{u}}(x)$ *dans un intervalle* $x_0 \leqq x \leqq a + r$, *la fonction*

$$u(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & a \leqq x \leqq x_0, \\ \bar{\bar{u}}(x) & x_0 < x \leqq a + r \end{cases}$$

est une solution de l'équation intégrale (1) *dans* I_r.

Nous appellerons $u = \bar{\bar{u}}(x)$ *le prolongement de la solution* $u = \bar{u}(x)$.

Soient $f(x)$ et $K(x, t, u)$ continues respectivement dans I_r et dans $x \in I_r$, $(t, u) \in \mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ est un domaine dans le plan (t, u).

Si une solution $u = \bar{u}(x)$ de l'équation intégrale (1) est continue dans $a \leqq x \leqq x_0$ $(< a + r)$ et si le point $(x_0, \bar{u}(x_0))$ appartient au domaine $\mathscr{D}$, on peut prolonger au delà de x_0 la solution $u = \bar{u}(x)$.

En effet, on peut prendre r', ϱ' de manière que $x_0 \leqq t \leqq x_0 + r'$ $(< a + r)$, $| u - u_0 | < \varrho'$ est contenu dans $\mathscr{D}$ et

$$| u_0 - f(x) - \int_a^{x_0} K(x, t, \bar{u}(t))\, dt \,| < \varrho'/2$$

pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + r'$. On a donc

$$| u - f(x) - \int_a^{x_0} K(x, t, u(t))\, dt \,| < \varrho'$$

pour $x_0 \leqq t \leqq x \leqq x_0 + r'$, $| u - u_0 | < \varrho'/2$. On peut appliquer à l'équation (3) le théorème 1.

Ce fait peut s'énoncer géométriquement comme il suit:

THÉORÈME 3. *Une courbe solution de l'équation intégrale* (1) *peut se prolonger jusqu'à l'extrémité* $a + r$ *de l'intervalle* I_r, *ou à la frontière du domaine* $\mathscr{D}$.

3. Théorème de comparaison.

THÉORÈME 4. *Soient* $f(x)$ *et* $\bar{f}(x)$ *des fonctions continues dans* I_r *et telles que l'on ait*

$$f(a) \leqq \bar{f}(a), \qquad f(\bar{x}) - f(x) \leqq \bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(x)$$

pour $x < \bar{x}$, x, $\bar{x} \in I$, *et* $K(x, t, u)$ *et* $\overline{K}(x, t, u)$ *des fonctions continues respectivement dans* $\Delta_r \times E_1$ *et* $\Delta_r \times E_2$ *où* E_1 *et* E_2 *sont des ensembles de nombres réels. Supposons de plus*

$$K(x, t, u) < \overline{K}(x, t, u)$$

pour $(x, t) \in \Delta_r$, $u \in E_1 \wedge E_2$, *et*

$$(4) \qquad \lambda K(\bar{x}, t, u) + \mu[K(\bar{x}, t, u) - K(x, t, u)]$$
$$\leqq \lambda \overline{K}(\bar{x}, t, \bar{u}) + \mu[\overline{K}(\bar{x}, t, \bar{u}) - \overline{K}(x, t, \bar{u})]$$

pour (x, t), $(\bar{x}, t) \in \Delta_r$, $x < \bar{x}$, $u \in E_1$, $\bar{u} \in E_2$, $u < \bar{u}$, λ *et* μ *désignant des nombres quelconques mais déterminés tels que* $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $0 \leqq \mu \leqq 1$, $\lambda + \mu = 1$.

Si l'équation intégrale (1) *et*

$$(5) \qquad \bar{u}(x) = \bar{f}(x) + \int_a^x \overline{K}(x, t, \bar{u}(t))\, dt$$

admettent respectivement des solutions $u = u(x)$ *et* $\bar{u} = \bar{u}(x)$ *définies dans* I_r, *l'inégalité*

$$(6) \qquad u(x) < \bar{u}(x)$$

subsiste dans l'intervalle $a < x \leqq a + r$.

En effet, dans le cas de $f(a) = \bar{f}(a)$ l'inégalité $K(x, t, u) < \overline{K}(x, t, u)$ entraîne

$$\int_a^x K(x, t, u(t))\, dt < \int_a^x \overline{K}(x, t, \bar{u}(t))\, dt$$

dans l'intervalle $a < x \leqq a + \delta$ suffisamment petit. Dans le cas de $f(a) < \bar{f}(a)$ la continuité de $u = u(x)$ et de $\bar{u} = \bar{u}(x)$ entraîne l'inégalité (6) dans $a < x \leqq a + \delta$. Désignons par Δ la borne supérieure de δ telle que l'on ait l'inégalité (6) dans $a < x \leqq a + \delta$. Pour montrer $\Delta = r$ par l'absurde, supposons $\delta < \Delta$. On aurait l'inégalité (6) dans $a < x < \xi$ $(= a + \Delta)$ et

$$u(\xi) = \bar{u}(\xi).$$

On pourrait alors déterminer d'après $K(x, t, u) < \overline{K}(x, t, u)$ un nombre positif ε de manière que

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} K(\xi, t, u(t))\, dt < \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \overline{K}(\xi, t, \bar{u}(t))\, dt \qquad (0 < \varepsilon < \Delta).$$

On aurait ensuite, en tenant compte de (4),

$$u(\xi) = f(\xi) + \int_a^{\xi} K(\xi, t, u(t))\, dt$$
$$= \lambda \{f(\xi) + \int_a^{\xi} K(\xi, t, u(t))\, dt\}$$

$$+ \mu \{u(\xi - \varepsilon) + f(\xi) - f(\xi - \varepsilon) + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} K(\xi, t, u(t))\, dt\}$$

$$+ \int_a^{\xi-\varepsilon} \{\lambda K(\xi, t, u(t)) + \mu[K(\xi, t, u(t)) - K(\xi - \varepsilon, t, u(t))]\}\, dt$$

$$< \lambda \{\bar{f}(\xi) + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \bar{K}(\xi, t, \bar{u}(t))\, dt\}$$

$$+ \mu \{\bar{u}(\xi - \varepsilon) + \bar{f}(\xi) - \bar{f}(\xi - \varepsilon) + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \bar{K}(\xi, t, \bar{u}(t))\, dt\}$$

$$+ \int_a^{\xi-\varepsilon} \{\lambda \bar{K}(\xi, t, \bar{u}(t)) + \mu [\bar{K}(\xi, t, \bar{u}(t)) - \bar{K}(\xi - \varepsilon, t, \bar{u}(t))]\}\, dt$$

$$= \bar{f}(\xi) + \int_a^{\xi} \bar{K}(\xi, t, \bar{u}(t))\, dt = \bar{u}(\xi),$$

c'est-à-dire

$$u(\xi) < \bar{u}(\xi),$$

ce qui est absurde, C.Q.F.D.

Pour simplifier les exposés, nous donnons une

Définition. Soient $K(x, t, u)$ une fonction dans une région R et λ et μ des nombres tels que $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $0 \leqq \mu \leqq 1$, $\lambda + \mu = 1$. Si $\lambda K(x, t, u) + \mu(K(\bar{x}, t, u) - K(x, t, u))$ est non décroissante par rapport à u pour $x < \bar{x}$, (x, t, u), $(\bar{x}, t, u) \in R$, nous dirons que $K(x, t, u)$ satisfait à la condition $(K_{\lambda\mu})$ dans R, ou qu'elle est une fonction ayant la propriété $(K_{\lambda\mu})$ dans R.

THÉORÈME 5. *Soient $f(x)$ et $K(x, t, u)$ des fonctions continues respectivement dans I_r et dans D. Si la fonction $K(x, t, u)$ satisfait à la condition $(K_{\lambda\mu})$ dans D, il existe, parmi les solutions de l'équation intégrale* (1), *une qui est au moins égale à toutes les autres dans $I_{r'}$, où $=$ min $\{r, \varrho/M\}$, M désignant la borne supérieure de $|K(x, t, u)|$ dans D.*

Nous l'appellerons la solution maximale.

Soit ε un nombre positif arbitraire. Le théorème 1 montre que l'équation (1) admet une solution $u = u(x)$ dans $I_{r'}$, et que l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \{K(x, t, u(t)) + \varepsilon\}\, dt \tag{8}$$

admet une solution $u = u_\varepsilon(x)$ dans $I_{r'(\varepsilon)}$, où $r'(\varepsilon) =$ min $\{r, \varrho/(M + \varepsilon)\}$.

Prenons une suite décroissante $\{\varepsilon_n\}$, telle que $\varepsilon_1 < M$, $\varepsilon_n \to 0$ et posons

$$v_n(x) = \begin{cases} u_{\varepsilon_n}(x) & \text{pour } a \leqq x \leqq a + r'(\varepsilon_n), \\ u_{\varepsilon_n}(a + r'(\varepsilon_n)) & \text{pour } a + r'(\varepsilon_n) < x \leqq a + r'. \end{cases}$$

D'après le théorème 4, on a l'inégalité

$$u(x) < v_n(x)$$

dans $I_{r'(\varepsilon_n)}$, et pour $m < n$

$$v_m(x) > v_n(x)$$

dans $I_{r'(\varepsilon_n)}$.

La famille $\mathscr{F}$ formée des fonctions $v_n(x)$ étant normale dans $I_{r'}$, la suite $\{v_n(x)\}$ converge uniformément dans $I_{r'}$ vers une fonction continue $\bar{v}(x)$. On a

$$\bar{v}(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{f(x) + \int_a^x [K(x, t, v_n(t)) + \varepsilon_n]\,dt\right\}$$
$$= f(x) + \int_a^x K(x, t, \bar{v}(t))\,dt.$$

$u = \bar{v}(x)$ est donc une solution de l'équation intégrale (1). Puisqu'on a $u(x) \leqq v_n(x)$ dans $I_{r'(\varepsilon_n)}$, on a

(9) $$\bar{v}(x) \geqq u(x) \qquad \text{dans } I_{r'}.$$

$u = \bar{v}(x)$ est donc la plus grande des solutions de l'équation intégrale (1) dans $I_{r'}$, C.Q.F.D.

Théorème 6. *Soient $f(x)$ et $\bar{f}(x)$ des fonctions continues dans I_r et telles que l'on ait*

$$f(a) \leqq \bar{f}(a), \qquad f(\bar{x}) - f(x) \leqq \bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(x)$$

pour $x < \bar{x}$, $x, \bar{x} \in I_r$, et $K(x, t, u)$ et $\overline{K}(x, t, u)$ des fonctions continues respectivement dans $\Delta_r \times E$ et dans D, où E est un ensemble de nombres réels.

Supposons que l'on a

$$K(x, t, u) \leqq \overline{K}(x, t, u)$$

pour $(x, t, u) \in (\Delta_r \times E) \wedge D$, et l'inégalité (4) pour (x, t), $(\bar{x}, t) \in \Delta_r$, $x < \bar{x}$, $u, \bar{u} \in E$, (x, t, u), $(x, t, \bar{u}) \in D$, $u < \bar{u}$.

Si $\overline{K}(x, t, u)$ satisfait à la condition $(K_{\lambda\mu})$ dans D et l'équation intégrale (1) admet une solution continue $u = u(x)$ dans $I_{r'}$, $(r' = \min\{r, \varrho/M\}, |\overline{K}(x, t, u)| \leqq M)$, l'inégalité

(10) $$u(x) \leqq \bar{u}(x)$$

subsiste dans $I_{r'}$, *où* $\bar{u} = \bar{u}(x)$ *est la solution maximale de l'équation intégrale* (5) *dans* $I_{r'}$.

Considérons l'équation intégrale

$$(11) \qquad \bar{u}(x) = \bar{f}(x) + \int_a^x \{\overline{K}(x, t, u(t)) + \varepsilon\}\, dt,$$

où ε est une constante positive arbitraire. D'après le théorème 4 on a l'inégalité

$$u(x) \leqq u_\varepsilon(x)$$

dans $I_{r'(\varepsilon)}$, où $\bar{u} = \bar{u}_\varepsilon(x)$ est une solution de l'équation (11).

Posons

$$\bar{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \bar{u}_\varepsilon(x) & a \leqq x \leqq a + r'(\varepsilon), \\ \bar{u}_\varepsilon(a + r'(\varepsilon)) & a + r'(\varepsilon) < x \leqq a + r'. \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu plus haut, la suite $\{v_{\varepsilon_n}(x)\}$ tend uniformément dans $I_{r'}$ vers la solution maximale de l'équation (5) pour $\varepsilon_n \downarrow 0$. On a donc l'inégalité (10) dans $I_{r'}$, C.Q.F.D.

Dans le cas de l'équation intégrale de Volterra on peut donner quelques théorèmes de comparaison sous la forme des inéquations intégrales et intégro-différentielles qui sont très utiles.

Théorème 7. *Supposons que* $f(x)$ *et* $K(x, t, u)$ *sont continues respectivement dans* I_r *et dans* D, *et que* $K(x, t, u)$ *ait la propriété* (K_{10}) *dans* D.

Si l'inéquation

$$(12) \qquad w(x) \leqq f(x) + \int_a^x K(x, t, w(t))\, dt$$

admet une solution $w = w(x)$ *continue dans* $I_{r''}$ ($r'' \leqq r' = \min \{r, \varrho/M\}$, $|K(x, t, u)| \leqq M$), *on a l'inégalité*

$$(13) \qquad w(x) \leqq \bar{u}(x)$$

dans $I_{r''}$, *où* $u = \bar{u}(x)$ *désignant la solution maximale de l'équation intégrale* (1).

Soit r''' un nombre arbitraire tel que $0 < r''' < r''$. On peut déterminer un nombre positif ε de manière que $r''' < r'(\varepsilon)$. Désignons par $u = u_\varepsilon(x)$ une solution de l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \{K(x, t, u(t)) + \varepsilon\}\, dt.$$

(12) entraîne $w(a) \leqq u_\varepsilon(a) = f(a)$. On a donc $w(x) < u_\varepsilon(x)$ dans $a < x < a + \delta$, où δ est un nombre positif assez petit.

Il est à montrer que l'on peut prendre $\delta = r'''$. Sinon, on désignerait par Δ la borne supérieure de δ. On aurait $0 < \Delta < r'''$ et

$$w(x) < u_\varepsilon(x) \qquad a < x < \xi,$$
$$w(\xi) = u_\varepsilon(\xi),$$

où $\xi = a + \Delta$. Par hypothèse on a

$$w(\xi) \leqq f(\xi) + \int_a^\xi K(\xi, t, w(t))dt$$
$$< f(\xi) + \int_a^\xi \{K(\xi, t, u_\varepsilon(t)) + \varepsilon\} dt = u_\varepsilon(\xi),$$

ce qui est en contradiction avec l'égalité précédente. $u_\varepsilon(x)$ tendant vers $\bar{u}(x)$ pour $\varepsilon \to 0$, on a l'inégalité (13) dans $I_{r'''}$.

Théorème 8. *Supposons que $f(x)$ est continue et satisfait à l'inégalité $|D^+f(x)| < +\infty$ dans I_r, et que $K(x, t, u)$, $\frac{\partial}{\partial x}K(x, t, u)$ sont continues dans D. Si $\frac{\partial}{\partial x}K(x, t, u)$ satisfait à la condition (K_{10}) dans D et l'inéquation intégro-différentielle*

$$(14) \quad \overline{D}^+w(x) \leqq D^+f(x) + K(x, x, w(x)) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x, t, w(t))\, dt$$

admet une solution $w = w(x)$ $(w(a) \leqq f(a))$ continue dans $I_{r''}(r'' < r')$, l'inégalité (13) *subsiste dans $I_{r''}$, où $u = \bar{u}(x)$ est la solution maximale dans $I_{r'}$ de l'équation intégrale* (1).

En effet la propriété (K_{10}) par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}K(x, t, u)$ entraîne la propriété (K_{01}) par rapport à $K(x, t, u)$. D'après le théorème 5 l'équation (1) admet la solution maximale dans $I_{r'}$.

Considérons l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \{K(x, t, u(t)) + \varepsilon\} dt,$$

où ε est un nombre positif arbitraire. Cette équation admet une solution $u = u_\varepsilon(x)$ dans $I_{r'(\varepsilon)}$, où $r'(\varepsilon) = \min\{r, \varrho/(M + \varepsilon)\}$. Par définition on a

$$(15) \quad D^+u_\varepsilon(x) = D^+f(x) + K(x, x, u_\varepsilon(x)) + \varepsilon + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x, t, u_\varepsilon(t))\, dt.$$

$w(a) \leqq u_\varepsilon(a) = f(a)$ et la continuité des fonctions $u_\varepsilon(x)$ et $w(x)$ entraînent que

$$w(x) \leqq u_\varepsilon(x) \tag{16}$$

dans I_δ, où δ est un nombre positif assez petit. Montrons que l'inégalité (16) subsiste dans $I_{r'''}$ ($r''' = \min\{r'', r'(\varepsilon)\}$). Sinon, on désignerait Δ la borne supérieure de δ. On aurait $0 < \Delta < r'''$, et (16) dans I_Δ et

$$w(\xi) = u_\varepsilon(\xi),$$

$$w(\xi + h) > u_\varepsilon(\xi + h), \qquad 0 < h < \delta_0 < r''' - \Delta,$$

où $\xi = a + \Delta$ et δ_0 est un nombre positif assez petit. On a donc

$$\overline{D}^+ w(\xi) \geqq D^+ u_\varepsilon(\xi).$$

(14) et (15) entraînent

$$\begin{aligned} D^+ f(\xi) + K(\xi, \xi, w(\xi)) &+ \int_a^\xi \frac{\partial}{\partial x} K(\xi, t, w(t))\, dt \\ &\geqq \overline{D}^+ w(\xi) \geqq D^+ u_\varepsilon(\xi) \\ = D^+ f(\xi) + K(\xi, \xi, u_\varepsilon(\xi)) + \varepsilon &+ \int_a^\xi \frac{\partial}{\partial x} K(\xi, t, u_\varepsilon(t))\, dt. \end{aligned}$$

Par hypothèse on a

$$\begin{aligned} D^+ f(\xi) + K(\xi, \xi, w(\xi)) &+ \int_a^\xi \frac{\partial}{\partial x} K(\xi, t, w(t))\, dt \\ \geqq D^+ f(\xi) + K(\xi, \xi, w(\xi)) + \varepsilon &+ \int_a^\xi \frac{\partial}{\partial x} K(\xi, t, w(t))\, dt, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Nous avons donc l'inégalité (16) dans $I_{r'''}$. Par la passage à la limit $\varepsilon \to 0$, on obtient l'inégalité (13) dans $I_{r''}$.

On peut aisément généraliser les théorèmes de comparaison dans le cas de $\underline{\Delta}_r : a < t \leqq x \leqq a + r$ dans le plan (x, t).

THÉORÈME 9. *Soient $f(x)$ et $\overline{f}(x)$ des fonctions continues dans I_r telles que $f(x) \leqq \overline{f}(x)$, et $K(x, t, u)$ et $\overline{K}(x, t, u)$ des fonctions continues respectivement dans $\underline{\Delta}_r \times E_1$ et $\underline{\Delta}_r \times E_2$, où E_1 et E_2 sont des ensembles de nombres réels. Supposons en outre l'inégalité*

$$K(x, t, u) < \overline{K}(x, t, \bar{u})$$

pour $(x, t) \in \underline{\Delta}_r$, $u \leqq \bar{u}$, $u \in E_1$, $\bar{u} \in E_2$.

Si l'équation intégrale (5) et l'inéquation intégrale (12) admettent respectivement des solutions continues dans $I_{r'}$ ($r' \leqq r$) $\bar{u} = \bar{u}(x)$ et $w = w(x)$ telles que l'on ait

$$\overline{\lim_{x \to a+0}} \frac{w(x)}{r(x)} < \underline{\lim_{x \to a+0}} \frac{\bar{u}(x)}{r(x)} \tag{17}$$

où $r(x)$ est continue dans $a < x < a + r''$ $(0 < r'' \leqq r')$ et $r(x) > 0$, l'inégalité (13) *subsiste dans $a < x \leqq a + r'$.*

THÉORÈME 10. *Soient $f(x)$ et $\bar{f}(x)$ $(f(a) \leqq \bar{f}(a))$ continues dans I_r telles que $D^+f(x) \leqq D^+\bar{f}(x)$, $|D^+\bar{f}(x)| < +\infty$ dans $a \leqq x < a + r$, et $K(x, t, u)$, $\frac{\partial}{\partial x}K(x, t, u)$ et $\bar{K}(x, t, u)$, $\frac{\partial}{\partial x}\bar{K}(x, t, u)$ continues respectivement dans $\underline{\Delta}_r \times E_1$ et $\underline{\Delta}_r \times E_2$, où E_1 et E_2 sont des ensembles de nombres réels. Supposons en outre les inégalités*

$$K(x, t, u) < \bar{K}(x, t, u)$$

pour $(x, t) \in \underline{\Delta}_r$, $u \in E_1 \wedge E_2$, et

$$\frac{\partial}{\partial x}K(x, t, u) \leqq \frac{\partial}{\partial x}\bar{K}(x, t, \bar{u})$$

pour $(x, t) \in \underline{\Delta}_r$, $u \leqq \bar{u}$, $u \in E_1$, $\bar{u} \in E_2$.

Si l'équation intégrale (5) *et l'inéquation intégro-différentielle* (14) *admettent respectivement des solutions continues dans $I_{r'}$ $(r' \leqq r)$ $\bar{u} = \bar{u}(x)$ et $w = w(x)$ $(w(a) \leqq f(a))$ satisfaisant à l'inégalité* (17), *l'inégalité* (13) *subsiste dans $I_{r'}$.*

4. L'unicité de la solution.

THÉORÈME 11. *Soient $f(x)$ une solution continue dans I_r, $K(x, t, u)$ une solution continue dans $\Delta_r \times E$, où E est un ensemble de nombres réels et $\bar{K}(x, t, u)$ $(K(x, t, 0) \equiv 0)$ une fonction continue et possédant la propriété (K_{10}) dans D. Supposons en outre l'inégalité*

$$|K(x, t, u) - K(x, t, \bar{u})| \leqq \bar{K}(x, t, |u - \bar{u}|)$$

pour $(x, t) \in \Delta_{r'}$, $u, \bar{u} \in E$, $|u - \bar{u}| \leqq \varrho$, où $r' = \min\{r, \varrho/M\}$, $|\bar{K}(x, t, u)| \leqq M$. Si l'équation intégrale

$$\bar{u}(x) = \int_a^x \bar{K}(x, t, \bar{u}(t))\, dt \tag{17}$$

n'admet pas de solution non identiquement nulle, l'équation intégrale (1) *admet au plus une solution dans $I_{r''}$ $(r'' \leqq r')$.*

Soient $u = u(x)$ et $u = v(x)$ deux solutio s de l'équation (1) définies dans $I_{r''}$. Alors on aura

$$\begin{aligned} |u(x) - v(x)| &\leqq \int_a^x |K(x, t, u(t)) - K(x, t, v(t))|\, dt \\ &\leqq \int_a^x \bar{K}(x, t, |u(t) - v(t)|)\, dt. \end{aligned}$$

$|u(x) - v(x)|$ satisfait donc à l'inéquation intégrale

$$w(x) \leqq \int_a^x \overline{K}(x, t, w(t))\, dt.$$

Par hypothèse, la solution maximale dans $I_{r'}$ de l'équation (17) est $\bar{u}(x) \equiv 0$, d'après le théorème 7 on obtient $|u(x) - v(x)| \equiv 0$ dans $I_{r''}$, C.Q.F.D.

A l'aide du théorème 8 on peut généraliser de même le théorème de M. Montel [1] relatif à l'équation différentielle comme il suit.

THÉORÈME 12. *Soit $f(x)$ une fonction continue dans I_r et admettant la dérivée à droite $D^+f(x)$ dans $a \leqq x < a + r$. Soient $K(x, t, u)$ et $\dfrac{\partial}{\partial x} K(x, t, u)$ des fonctions continues dans $\Delta_r \times E$, où E est un ensemble de nombres réels, et $\overline{K}(x, t, u)$ $(\overline{K}(x, t, 0) \equiv 0)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\overline{K}(x, t, u)$ des fonctions continues dans D $\dfrac{\partial}{\partial x}\overline{K}(x, t, u)$ possédant la propriété (K_{10}). Supposons en outre les inégalités*

$$|K(x, t, u) - K(x, t, \bar{u})| \leqq \overline{K}(x, t, |u - \bar{u}|),$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x} K(x, t, u) - \frac{\partial}{\partial x} K(x, t, \bar{u})\right| \leqq \frac{\partial}{\partial x}\overline{K}(x, t, |u - \bar{u}|),$$

pour $(x, t) \in \Delta_{r''}$ $(r'' \leqq r')$, u, $\bar{u} \in E$, $|u - \bar{u}| \leqq \varrho$, où $r' = \min\{r, \varrho/M\}$, $|\overline{K}(x, t, u)| \leqq M$. Si l'équation intégrale (17) *n'a pas de solution non identiquement nulle, l'équation intégrale* (1) *admet au plus une solution dans $I_{r''}$.*

Soit $\Re(x, t, \bar{w})$ une fonction continue et non négative dans $(x, t) \in \Delta_r$, $0 \leqq \bar{w} < +\infty$ et s'annulant pour $\bar{w} = 0$.

Supposons que l'inéquation intégrale

$$\bar{w}(x) \leqq \int_a^x \Re\left(x, t, \frac{\bar{w}(t)}{r(t)}\right) dt, \tag{18}$$

n'admet pas de solution $\bar{w} = \bar{w}(x)$ non identiquement nulle dans $I_{r'}$ $(0 < r' \leqq r)$ et telle que $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{\bar{w}(x)}{r(t)} = 0$, $r(x)$ (>0) désignant une certaine fonction continue dans $a < x \leqq a + r'$.

On a le théorème suivant.

THÉORÈME 13. *Supposons que $f(x)$ et $K(x, t, u)$ satisfont à l'hypothèse du théorème* 11, *et que l'on a l'inégalité*

$$|K(x, t, u) - K(x, t, \bar{u})| \leqq \Re\left(x, t, \frac{|u - \bar{u}|}{r(t)}\right),$$

où u, $\bar{u} \in E$. Alors l'équation intégrale (1) *admet au plus une solution telle que l'on ait* $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{u(x)}{r(x)} = l$,

Soient $u = u(x)$, $u = v(x)$ deux solutions définies dans I_r et telle que

$$\lim_{x \to a+0} \frac{u(x)}{r(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{v(x)}{r(x)} = l,$$

d'où il résulte

$$\lim_{x \to a+0} \frac{u(x) - v(x)}{r(x)} = 0.$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} | u(x) - v(x) | &\leqq \int_a^x | K(x, t, u(t)) - K(x, t, v(t)) | \, dt \\ &\leqq \int_a^x \mathfrak{R}\left(x, t, \frac{| u(t) - v(t) |}{r(t)}\right) dt \end{aligned}$$

et l'inéquation (18) est satisfaite pour $w(x) = | u(x) - v(x) |$. On obtient donc $u(x) \equiv v(x)$ dans $I_{r'}$.

Exemple de l'inéquation intégrale (18): Posons

$$\mathfrak{R}(x, t, \bar{w}) = \bar{w}, \qquad r(t) = t - a.$$

Alors on a

$$w(x) \leqq \int_a^x \frac{w(t)}{t - a} \, dt.$$

D'après la remarque 2) de no. 1, nous avons, comme corollaire, l'extension du théorème de M. Nagumo [2] relatif à l'équation différentielle.

Corollaire. *Soient $f(x)$ une fonction continue dans I_r admettant la dérivée à droite $D^+f(a)$ ($| D^+f(a) | < +\infty$), $K(x, t, u)$ une fonction continue dans $\Delta_r \times I$, où I est un intervalle borné et fermé de nombres réels. Si l'on a l'inégalité*

$$| K(x, t, u) - K(x, t, \bar{u}) | \leqq \frac{| u - \bar{u} |}{t - a} \qquad u, \bar{u} \in I.$$

L'équation intégrale (1) *admet au plus une solution dans $I_{r'}$* $(0 < r' \leqq r)$.

Le théorème 10 entraîne de même l'extension du théorème de M. Shimizu [3] relatif à l'équation différentielle.

5. Théorème de continuité et dérivabilité.

Considérons l'équation intégrale contenant un paramètre λ:

$$u(x) = f(x, \lambda) + \int_{a(\lambda)}^{x} K(x, t, u(t), \lambda)\, dt. \tag{19}$$

THÉORÈME 14. *Soient $f(x, \lambda)$ et $K(x, t, u, \lambda)$ des fonctions continues respectivement dans $I_r \times \Lambda$ ($\Lambda : |\lambda| \leqq l$) et dans $\Delta_r \times E \times \Lambda$, où E est un ensemble borné et fermé de nombres réels, $K(x, t, u, \lambda)$ satisfaisant à la condition de Lipschitz*

$$| K(x, t, u, \lambda) - K(x, t, \bar{u}, \lambda) | \leqq L | u - \bar{u} |.$$

Si l'équation intégrale (19) *admet une solution dans $a(\lambda) \leqq x \leqq a(\lambda) + r'$, pour $a(\lambda)$, $(a(\lambda) + r') \in I_r$ et $\lambda \in \Lambda$, où $a(\lambda)$ est une fonction continue dans Λ, la solution $u = u(x, \lambda)$ est continue dans $I_r \times \Lambda$.*

D'après la remarque 1) du no 1 et le théorème 11 l'équation (19) admet une seule solution $u = u(x, \lambda)$ continue dans $I_{r'}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. On a donc

$$\begin{aligned}
& | u(x, \lambda + \Delta\lambda) - u(x, \lambda) | \\
& \leqq |f(x, \lambda + \Delta\lambda) - f(x, \lambda)| + \left| \int_{a(\lambda)}^{a(\lambda+\Delta\lambda)} K(x, t, u(t, \lambda), \lambda)\, dt \right| \\
& + \left| \int_{a(\lambda+\Delta\lambda)}^{x} \{K(x, t, u(t, \lambda + \Delta\lambda), \lambda + \Delta\lambda) - K(x, t, u(t, \lambda), \lambda + \Delta\lambda) \right. \\
& \left. + K(x, t, u(t, \lambda), \lambda + \Delta\lambda) - K(x, t, u(t, \lambda), \lambda)\}\, dt \right| \\
& \leqq \delta_1(\Delta\lambda) + | a(\lambda + \Delta\lambda) - a(\lambda) | M + r\delta_2(\Delta\lambda) \\
& + L \int_{a(\lambda+\lambda\Delta)}^{x} | u(x, \lambda + \Delta\lambda) - u(t, \lambda) |\, dt
\end{aligned}$$

où

$$| f(x, t, \lambda + \Delta\lambda) - f(x, \lambda) | < \delta_1(\Delta\lambda),$$
$$| K(x, t, u, \lambda + \Delta\lambda) - K(x, t, u, \lambda) | < \delta_2(\Delta\lambda),$$

et par hypothèse $\delta_1(\Delta\lambda)$ et $\delta_2(\Delta\lambda)$ tendent vers 0 pour $\Delta\lambda \to 0$. $| u(x, \lambda + \Delta\lambda) - u(x, \lambda) |$ doit satisfaire à l'inéquation

$$w(x, \Delta\lambda) \leqq \delta(\Delta\lambda) + L \int_{a(\lambda+\Delta\lambda)}^{x} w(t, \Delta\lambda) dt,$$

où $\delta(\Delta\lambda) = \delta_1(\Delta\lambda) + r\delta_2(\Delta\lambda) + | a(\lambda + \Delta\lambda) - a(\lambda) | M$. D'après le théorème 7 on obtient l'inégalité

$$0 \leqq w(x, \Delta\lambda) \leqq \delta(\Delta\lambda) \exp \{L(x - a(\lambda + \Delta\lambda)) - 1\},$$

ce qui montre que $u(x, \lambda)$ est également continue dans Λ pour $a(\lambda) \leqq x \leqq a(\lambda) + r'$. Par suite $u = u(x, \lambda)$ est continue dans $I_{r'} \times \Lambda$.

Remarque. Il est clair que l'on peut étendre le théorème dans le cas où l'équation contient plusieurs paramètres.

Par le théorème 14 nous avons le

THÉORÈME 15. *Supposons que* $f(x, \lambda)$ *et* $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)$ *sont continues dans* $I_r \times \Lambda$ $(\Lambda\colon |\lambda| \leqq l)$ *et que* $K(x, t, u, \lambda)$ *et ses dérivées* $\frac{\partial}{\partial x} K(x,t,u,\lambda)$, $\frac{\partial}{\partial\lambda} K(x,t,u,\lambda)$ *sont continues dans* $D(\Delta_r, f(x,\lambda), \varrho) \times \Lambda$. *Alors l'équation intégrale*

$$u(x) = f(x, \lambda) + \int_a^x K(x, t, u(t), \lambda)\, dt$$

admet une solution $u = u(x, \lambda)$ *dans* $I_{r'} \times \Lambda$ $(r' = \min\{r, \varrho/M\}$, $|K(x, t, u, \lambda)| \leqq M)$, *qui est continue ainsi que sa dérivée par rapport à* λ $\frac{\partial}{\partial\lambda} u(x, \lambda)$ *pour* $(x, \lambda) \in I_{r'} \times \Lambda$.

6. Système des équations intégrales.

On peut étendre les théorèmes pour l'équation intégrale (1) au cas du système d'équation intégrales

$$u_j(x) = f_j(x) + \int_a^x K_j(x, t, u_1(t), \ldots, u_n(t))\, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

En utilisant la fonction de M. Kamke les théorèmes de comparaison, d'unicité, de continuité et de dérivabilité s'étendent aussi à ce cas.

On dit avec M. Hukuhara [4] que $S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est la fonction de M. Kamke lorsqu'elle jouit des conditions suivantes:

I. $S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est continue dans $-\infty < u_1, u_2, \ldots, u_n < +\infty$,

II. $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ quelles que soient les fonctions continues admettant les dérivées à droite et à gauche $D^{\pm}\varphi_j(x)$. On a

$$D^{\pm} S(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \leqq S(D^{\pm}\varphi_1(x), D^{\pm}\varphi_2(x), \ldots, D^{\pm}\varphi_n(x)).$$

Ces conditions sont équivalentes aux conditions suivantes [1])

1) $S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est continue dans $-\infty < u_1, u_2, \ldots, u_n < +\infty$,

2) $S(\tau u_1, \tau u_2, \ldots, \tau u_n) = \tau S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ pour $\tau > 0$,

3) $S(\frac{1}{2}(u_1 + v_1), \frac{1}{2}(u_2 + v_2), \ldots, \frac{1}{2}(u_n + v_n))$
$\leqq \frac{1}{2}\{S(u_1, u_2, \ldots, n_n) + S(v_1, v_2, \ldots, v_n)\}$.

Exemples de $S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont $\max\limits_{j=1}^{n} \{u_j\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j$, $\max\limits_{j=1}^{n} |u_j|$, $\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j|$, $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j|^2}$, etc.

Donnons d'autres conditions qui sont équivalentes aux 1), 2), 3), mais elles sont utiles pour étudier le système des équations (20).

THÉORÈME 16. *Les conditions* 1), 2), 3) *sont équivalentes aux conditions*:

1°) $S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *est continue dans* $-\infty < u_1, u_2, \ldots, u_n < +\infty$,

2°) $S((u_1 + v_1), (u_2 + v_2), \ldots, (u_n + v_n))$
$\leqq S(u_1, u_2, \ldots, u_n) + S(v_1, v_2, \ldots, v_n)$,

3°) *Soient* $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *des fonctions continues dans un intervalle arbitraire* I. *On a alors*

$$S\left(\int_a^x \varphi_1(t)\,dt, \quad \int_a^x \varphi_2(t)\,dt, \ldots, \quad \int_a^x \varphi_n(t)\,dt\right)$$
$$\leqq \int_a^x S(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))\,dt$$

pour a, $x \in I$, $a < x$.

Soient $x - a = \tau$ et $\varphi_j(t) = u_j$ (const.) $(j = 1, 2, \ldots, n)$. 3°) entraîne pour $\tau > 0$

3') $$S(\tau u_1, \tau u_2, \ldots, \tau u_n) \leqq \tau S(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Cette inégalité entraîne l'égalité 2) pour $\tau > 0$. Sinon, il existeraient u_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ et un nombre positif τ tels que l'on ait

$$S(\tau u_1, \tau u_2, \ldots, \tau u_n) < \tau S(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Posons $u_j = v_j/\tau (j = 1, 2, \ldots, n)$, on aurait alors

$$S(v_1, v_2, \ldots, v_n) < \tau S(v_1/\tau, v_2/\tau, \ldots, v_n/\tau)$$
$$\leqq S(v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

ce qui est absurde.

---

[1]) [4] loc. cit.

2) et 2^0) entraînent 3).

Réciproquement, il est facile de voir que 1), 2), 3) entraînent 1^0), 2^0), 3^0).

Remarque. D'après la démonstration de ce théorème, il est clair que *les conditions* 1), 2), 3) *sont équivalentes aux conditions* 1^0), 2^0) *et* 3').

Comme exemple nous donnons un théorème de comparaison.

THÉORÈME 17. *Soient* $f_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *et* $\bar{f}(x)$ *continues dans* I_r, *et* $K_j(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *continues dans* $\Delta_r \times E$ *où* E *est ensemble de points dans l'espace* $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. *Soit* $K(x, t, u)$ *une fonction continue et possédant la propriété* (K_{10}) *dans* $D(\Delta_r, \bar{f}(x), \varrho)$. *Supposons enfin les inégalités*

$$S(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \leqq \bar{f}(x),$$

dans $I_{r''}$ $(r'' \leqq r')$ *et*

$$S(K_1(x, t, u_1, \ldots, u_n), \ldots, K_n(x, t, u_1, \ldots, u_n)) \\ \leqq \overline{K}(x, t, S(u_1, \ldots, u_n))$$

pour $(x, t) \in \Delta_{r''}$, $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E$, (x, t), $S(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in D(\Delta_{r''}, \bar{f}(x), \varrho)$, *où* $r' = \min\{r, \varrho/M\}$, $|\overline{K}(x, t, u)| \leqq M$.

Si le système des équations intégrales (20) *admet une solution dans* $I_{r''}$ $u_j = u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, *on obtient*

$$(21) \qquad S(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) \leqq \bar{u}(x)$$

dans $I_{r''}$, *où* $u = \bar{u}(x)$ *est la solution maximale de l'équation intégrale* (5).

D'après les propriétés de la fonction de M. Kamke on obtient

$$S(u_1(x), \ldots, u_n(x)) \leqq S(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \\ + \int_a^x S(K_1(x, t, u_1(t), \ldots, u_n(t)), \ldots, K_n(x, t, u_1(t), \ldots, u_n(t))\, dt,$$

et par suite

$$S(u_1(x), \ldots, u_n(x)) \leqq \bar{f}(x) + \int_a^x \overline{K}(x, t, S(u_1(t), \ldots, u_n(t))\, dt,$$

où $u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ est une solution de (20). Ceci montre que $w(x) = S(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ doit satisfaire à l'inéquation intégrale

$$w(x) \leqq \bar{f}(x) + \int_a^x \overline{K}(x, t, w(t))dt.$$

D'après le théorème 7 on obtient l'inégalité

$$w(x) \leqq \bar{u}(x).$$

On a donc l'inégalité (21) dans $I_{r''}$, C.Q.F.D.

Remarque. Pour les théorèmes d'unicité nous utilisons la fonction de M. Kamke qui satisfait de plus à la condition:

(A) $S(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$ entraîne $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$.

Exemples: $\max\limits_{j=1}^{n} \{|u_j|\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j|$, $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} |u_j|^2}$, etc.

7. Théorème généralisé de M. Kneser.

Nous allons généraliser au cas du système des équations intégrales (20) le théorème de M. Kneser [5] relatif au système des équations différentielles ordinaires.

Soient $f_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ des fonctions continues dans I_r. Pour simplifier les considérations, $K_j(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ sont supposées continues et bornées $(|K_j(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_n)| \leqq M)$ dans le domaine D: $(x, t) \in \Delta_r$, $|u_j| < +\infty$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Considérons le système (20). D'après le théorème d'existence, il admet au moins une solution continue dans I_r. Nous désignons par R la région remplie par les courbes solutions de (20), et par S_c la section de R par l'hyperplan $x = c (a < c \leqq a + r)$. Nous avons alors le théorème généralisé de M. Kneser.

THÉORÈME 18. *S_c est un continu dans l'espace $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.*

Sans restreindre la généralité, au lieu du domaine D on peut prendre le domaine fermé D_0: $(x, t) \in \Delta_r$, $|u_j| \leqq F + 2Mr$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, où $F = \max\limits_{x \in I_r} \{|f_1(x)|, |f_2(x)|, \ldots, |f_n(x)|\}$.

On peut déterminer n suites de fonctions $\{K_{j\nu}(x, t, u_1, \ldots, u_n)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, n)$ de manière que $K_{j\nu}(x, t, u_1, \ldots, u_n)$ soient continues, bornées $(|K_{j\nu}(x, t, u_1, \ldots, u_n)| \leqq M)$, tendent vers $K_j(x, t, u_1, \ldots, u_n)$ uniformément dans D_0, et de plus satisfassent à la condition de Lipschitz par rapport à $u_j (j=1, 2, \ldots, n)$.

$K_j(x, t, u_1, \ldots, u_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ étant continues dans le domaine fermé D_0, on peut déterminer δ et N pour $\varepsilon(> 0)$ donné à l'avance de manière que

$$|K_{j\nu}(\bar{x}, t, u_1, \ldots, u_n) - K_{j\nu}(x, t, u_1, \ldots, u_n)| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad \nu \geqq N$$

pour $|\bar{x} - x| < \delta$, $(\bar{x}, t, u_1, \ldots, u_n)$, $(x, t, u_1, \ldots, u_n) \in D_0$.

Le système des équations intégrales

$$u_j(x) = f_j(x) + \int_a^x K_{j\nu}(x, t, u_1(t), \ldots, u_n(t))\, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

admet une seule solution continue dans I_r. Désignons-la par $u_j = \varphi_{j\nu}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots; \ j = 1, 2, \ldots, n)$ et soit T_ν le point de rencontre de la courbe solution avec l'hyperplan $x = c$. On obtient

$$|\varphi_{j\nu}(x)| \leqq F + Mr,$$

$$|\varphi_{j\nu}(x_1) - \varphi_{j\nu}(x_2)| \leqq |f_j(x_1) - f_j(x_2)|$$

$$+ \left| \int_a^{x_1} K_{j\nu}(x_1, t, \varphi_{1\nu}(t), \ldots, \varphi_{n\nu}(t))\, dt - \int_a^{x_2} K_{j\nu}(x_2, t, \varphi_{1\nu}(t), \ldots, \varphi_{n\nu}(t))\, dt \right|$$

$$\leqq |f_j(x_1) - f_j(x_2)| + \varepsilon r + |x_1 - x_2| M \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $x_1, x_2 \in I_r$, $|x_1 - x_2| < \delta$, $\nu \geqq N$. On peut donc supposer que $\varphi_{j\nu}(x)$ tendent vers $\bar{\varphi}_j(x)$ uniformément dans I_r, en prenant s'il est nécessaire une suite partielle. Puisque $K_{j\nu}(x, t, u_1, \ldots, u_n)$ tendent vers $K_j(x, t, u_1, \ldots, u_n)$ uniformément dans D_0, on a

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j(x) &= \lim_{\nu \to \infty} \varphi_{j\nu}(x) \\ &= f_j(x) + \lim_{\nu \to \infty} \int_a^x K_{j\nu}(x, t, \varphi_{j\nu}(t), \ldots, \varphi_{n\nu}(t))\, dt \\ &= f_j(x) + \int_a^x K_j(x, t, \bar{\varphi}_1(t), \ldots, \bar{\varphi}_n(t))\, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

$\bar{\varphi}_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ est donc une solution dans I_r du système (20).

Si P_1, P_2 sont deux points de S_c, il existe deux courbes solutions du système (20),

$$\Gamma_{P_1} : u_j = \varphi_{jP_1}(x), \ \Gamma_{P_2} : u_j = \varphi_{jP_2}(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

qui passent respectivement par A, P_1 et par A, P_2, où A est le point $(a, f_1(a), \ldots, f_n(a))$.

Nous considérons les systèmes des équations

$$\begin{aligned} u_j(x) = f_j(x) &+ \int_a^\lambda K_j(x, t, \varphi_{1P_k}(t), \ldots, \varphi_{nP_k}(t))\, dt \\ &+ \int_\lambda^x K_{j\nu}(x, t, u_1(t), \ldots, u_n(t))\, dt, \end{aligned} \tag{23}$$

$$a \leqq \lambda \leqq x \leqq c \quad (\nu = 1, 2, \ldots; \ j = 1, 2, \ldots, n, \ k = 1, 2).$$

D'après le théorème d'existence le système (23) admet une seule solution dans I_r. Soit $T_{\nu P_k}(\lambda)$ le point de rencontre de la courbe solution avec l'hyperplan $x = c$.

Lorsque $\lambda =$ décroît de c jusqu'à a, les points $T_{\nu P_k}(\lambda)$ décrivent respectivement des courbes $C_{\nu P_k}$ passant par P_k, $T_\nu = T_{\nu P_k}(a)$ sur l'hyperplan $x = c$. D'après les théorèmes d'unicité et de continuité, $C_\nu = C_{\nu P_1} + C_{\nu P_2}$ est une courbe joignant les points P_1 et P_2.

Il est clair que S_c est un ensemble fermé et borné.

Si S_c n'était pas un continu, on pourrait déterminer deux ensembles fermés S_1 et S_2 de manière que $S_c = S_1 \vee S_2$, $S_1 \wedge S_2 = 0$. On peut donc prendre un ensemble ouvert B tel que $S_1 \subseteqq B$, $S_2 \wedge \overline{B} = 0$. P_1 et P_2 étant deux points arbitraires de S_c, on peut supposer que $P_1 \epsilon S_1$ et $P_2 \epsilon S_2$. On en conclut que $C_\nu \wedge$ (la frontière de B)) $\neq 0$. Soit $P_\nu \epsilon (C_\nu \wedge$ (la frontière de B)), alors on peut supposer que $P_\nu \to P_0$, en prenant une suite partielle s'il est nécessaire. P_0 est donc un point appartenant à la frontière de B. On a donc $P_0 \bar{\epsilon} S_c$.

D'autre part, si par exemple $P_\nu \epsilon C_{\nu P_1} \subseteqq C_\nu$, le système (23) admet pour une certaine valeur de $\lambda = \lambda_\nu$ un courbe solution γ_ν passant per P_ν. Désignons par Γ_ν la courbe qui coïncide avec la courbe γ_ν à droite de l'hyperplan $x = \lambda_\nu$ et avec la courbe Γ_ν à gauche. Désignons par $u_j = \gamma_{j\nu}(x)$ l'équation de la courbe Γ_ν, alors $\{\gamma_{j\nu}(x)\}$ est normale. Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $\gamma_{j\nu}(x)$ tendent vers $\gamma_j(x)$ uniformément dans $a \leqq x \leqq c$ pour $\lambda_\nu \to \lambda_0 (\epsilon I_r)$. On voit sans peine que $u_j = \gamma_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ représentent une courbe solution du système (20) passant par A et P_0. Par suite on a $P_0 \epsilon S_c$ contrairement à l'hypothèse, C.Q.F.D.

L'université de Kōbe.

LITERATURE

P. Montel,

[1] Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle, Bull. sc. math., 50 (1926), p. 205—217.

M. Nagumo,

[2] Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, Japanese Journ. Math. 3 (1926), 107—112.

T. Shimizu,

[3] On sufficient conditions for the uniqueness of $y' = f(x, y)$, Proc. Jap. Acad., 4 (1928), 326—329.

M. HUKUHARA,

[4] Sur la fonction $S(x)$ de M. E. Kamke, Japanese Journ. Math. **17** (1941), 289—298.

H. KNESER,

[5] Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Lipschizten Bedingungen nicht genügt, Sitzungsber. Preuss. Akad., Phys-Math. Kl. (1923).

(Oblatum 23-4-52).