H. HADWIGER

Ueber die Jordansche Meßbarkeit von Vereinigung und Durchschnitt beliebig vieler Punktmengen

Compositio Mathematica, tome 9 (1951), p. 80-84
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__9__80_0>

Ueber die Jordansche Meßbarkeit von Vereinigung und Durchschnitt beliebig vieler Punktmengen

von

H. Hadwiger

Bern

Ein von F. Behrend [1]) für euklidische Räume und kürzlich von A. Dinghas [2]) allgemeiner auch für Räume konstanter Krümmung nachgewiesenes Theorem kann wie folgt interpretiert werden:

Die Vereinigungsmenge beliebig (endlich, abzählbar, überabzählbar) vieler kongruenter Kugeln, welche in einem beschränkten Raumteil liegen, ist stets im Jordanschen Sinn meßbar (kurz: J-meßbar).

Es wurde sogar wesentlich allgemeiner gezeigt, daß man hier an Stelle der kongruenten Kugeln beliebige, nicht notwendig kongruente, konvexe Körper setzen darf, sofern die Bedingung erfüllt wird, wonach die Inkugelradien der Körper gleichmäßig nach unten beschränkt sind.

Es ist ohne weiteres plausibel, daß diese genannten Theoreme auf die Wirksamkeit noch weit allgemeinerer Sätze zurückführbar sein werden; sodaß die subtileren genauen Voraussetzungen dieser Sätze durch Kugeln bzw. konvexe Körper in der einfachsten Weise realisiert sind.

In der vorliegenden Arbeit gebe ich einen solchen Satz an über die J-Meßbarkeit der Vereinigung beliebig vieler Punktmengen [3]) und stelle ihm einen dualen über die J-Meßbarkeit des Durchschnitts beliebig vieler Punktmengen zur Seite.

Das Ziel wird dadurch erreicht, daß zwei für die J-Meßbarkeit hinreichende Kriterien aufgestellt werden, wovon sich das eine ohne weiteres von den Summanden auf die Summe, das andere

---

[1]) F. Behrend: Bemerkung zur Inhaltstheorie. Math. Ann., Berlin, **111**, 289—292 (1935).

[2]) A. Dinghas: Ueber einen Satz von Felix Behrend. Math. Nachr., Berlin, **2**, 141—147 (1949).

[3]) Das Theorem von Behrend in seiner allgemeineren Form ergibt sich als Korollar dieses Satzes.

von den Faktoren auf das Produkt übertragen läßt. Die Kriterien sind dann erfüllt, wenn die Punktmenge keine zu komplizierten Randverhältnisse aufweist.

Ihre Formulierung erfolgt im Rahmen der Theorie des Jordanschen Inhalts; aus methodischen Gründen ist die Heranziehung der Lebesgueschen Maßtheorie vermieden worden.

I.

Unsere Betrachtungen gelten für den k-dimensionalen euklidischen Raum [4]).

Es sei E ein fester Einheitswürfel. Ist P ein Punkt, so bedeute P_σ einen abgeschlossenen zu E parallel gelagerten Würfel der Seitenlänge σ, dessen Mittelpunkt P ist. Für eine beliebige beschränkte Punktmenge X bezeichnen $\overline{J}(X)$ und $\underline{J}(X)$ den äußern und den innern Jordanschen Inhalt von X.

Es sei nun eine beschränkte Punktmenge A vorgegeben. Die Quotienten

$$\underline{J}(P_\sigma A)\sigma^{-k} \tag{1}$$

und

$$\overline{J}(P_\sigma A)\sigma^{-k} \tag{2}$$

stellen mit Rücksicht darauf, daß ja σ^k den elementaren Inhalt des Würfels P_σ wiedergibt, gewisse mittlere „innere" und „äußere" Dichten der Menge A im Punkte P dar. Für uns von Interesse sind nun die beiden der Menge A (bei festem Koordinationswürfel E eindeutig) zugeordneten Schranken

$$\underline{x}(A) = \inf \underline{J}(P_\sigma A)\sigma^{-k} \qquad (0 < \sigma < 1;\ P \in A) \tag{3}$$

und

$$\overline{x}(A) = \sup \overline{J}(P_\sigma A)\sigma^{-k} \qquad (0 < \sigma < 1;\ P \notin A). \tag{4}$$

Hierbei sind die in Klammern rechts beigefügten Nebenbedingungen zur Schrankenbildung besonders zu beachten. Die Existenz von (3) und (4) ist durch die Tatsache sichergestellt, daß die mittleren Dichten nach Ansatz (1) und (2) stets Werte des Intervalls $[0, 1]$ sein müssen. Wir nennen im Rahmen dieser Note die Werte $\underline{x}(A)$ und $\overline{x}(A)$ innere und äußere Dichteschranke von A. Offenbar gilt

$$0 \leqq \underline{x}(A) \leqq 1; \quad 0 \geqq \overline{x}(A) \leqq 1. \tag{5}$$

Die in Aussicht gestellte Erweiterung des Theorems von F. Behrend einerseits und die Parallelstellung eines dualen Theorems andererseits ist nun durch die folgenden Sätze gegeben:

---

[4]) Sinngemässe Uebertragungen auf andere Räume sind durchaus möglich.

Satz A. *Die Vereinigungsmenge $U = \Sigma A$ beliebig vieler in einem beschränkten Teil des k-dimensionalen euklidischen Raumes liegender Punktmengen A, deren innere Dichteschranken $\underline{\alpha}(A)$ alle gleichmäßig größer als 0 sind, ist J-meßbar.*

Satz B. *Der Durchschnitt $V = \Pi B$ beliebig vieler in einem beschränkten Teil des k-dimensionalen euklidischen Raumes liegender Punktmengen B, deren äußere Dichteschranken $\overline{\alpha}(B)$ alle gleichmäßig kleiner als 1 sind, ist J-meßbar.*

II.

Die beiden vorstehend formulierten Sätze werden sich in einfacher Weise ergeben aus einigen Hilfsaussagen, welche wir in diesem Abschnitt zusammenstellen wollen. Zunächst sollen die mit (3) und (4) eingeführten Dichteschranken noch in symmetrischer Weise ergänzt werden:

Es sei für eine vorgegebene beschränkte Menge A

(6) $$\underline{\beta}(A) = \inf \underline{J}(P_\sigma A)\sigma^{-k} \qquad (0 < \sigma < 1;\ P \notin A);$$

(7) $$\overline{\beta}(A) = \sup \overline{J}(P_\sigma A)\sigma^{-k} \qquad (0 < \sigma < 1;\ P \in A).$$

Es gelten nun

Lemma 1. $\underline{\beta}(A)$ nimmt stets den Wert 0 an.

Lemma 2. $\overline{\beta}(A)$ nimmt nur die Werte 0 oder 1 an; $\overline{\beta}(A) = 0$ bzw. $\overline{\beta}(A) = 1$ gilt genau dann, wenn A eine J-Nullmenge bzw. nicht eine J-Nullmenge ist.

Lemma 3. Ist $\underline{\underline{\alpha}}(A) > 0$, so ist A J-meßbar.

Lemma 4. Ist $\overline{\overline{\alpha}}(A) < 1$, so ist A J-meßbar.

Wir beweisen zunächst die vier Aussagen.

Beweis 1. Da A beschränkt ist, gibt es ein P, sodaß $P_\sigma A = 0$ ist.

Beweis 2.

1. *Fall.* A sei eine Nullmenge: $\overline{J}(A) = 0$. Da jede Teilmenge ebenfalls Nullmenge ist, folgt stets $\overline{J}(P_\sigma A) = 0$. Hieraus ergibt sich $\overline{\beta}(A) = 0$.

2. *Fall.* A sei nicht eine Nullmenge: $\overline{J}(A) > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es sein $0 < \sigma < 1$, sodaß $A \subseteq \sum_{\nu=1}^{N} P_\sigma^\nu$, $P^\nu \in A$, das heißt, A ist überdeckt durch eine endliche Summe kongruenter Würfel, deren Mittelpunkte sich in A befinden, sodaß noch die Relation $\overline{J}(A) < N\sigma^k < \varepsilon + \overline{J}(A)$ gilt. Andererseits ist

$$\overline{J}(A) \leqq \sum_{\nu=1}^{N} \overline{J}(P_\sigma^\nu A),$$

worin aber nach Voraussetzung

$$\overline{J}(P_\sigma A) \leqq \overline{\beta}(A)\sigma^k$$

gilt; so ergibt sich denn

$$N\sigma^k < \varepsilon + \overline{\beta}(A)N\sigma^k$$

oder

$$1 - \frac{\varepsilon}{N\sigma^k} < \overline{\beta}(A),$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{\overline{J}(A)} < \overline{\beta}(A)$$

und hiermit $\overline{\beta}(A) = 1$.

Beweis 3. Es sei C der Rand von A.

1. *Fall.* C sei nicht eine J-Nullmenge: $\overline{J}(C) > 0$. Nach Lemma 2 ist $\overline{\beta}(C) = 1$. Es gibt somit einen Punkt $P \epsilon C$ und ein $0 < \sigma < 1$, sodaß

(a) $$\overline{J}(P_\sigma C) > (1 - \underline{\alpha})\sigma^k \quad \text{wo} \quad \underline{\alpha} = \underline{\alpha}(A)$$

gesetzt ist. Nun gibt es zu einem beliebig kleinen τ aus $0 < \tau < \sigma$ einen Punkt $Q \epsilon A$, sodaß noch $Q_{\sigma-\tau} \subseteqq P_\sigma$ gilt. Nach Voraussetzung hat man $\underline{J}(Q_{\sigma-\tau}A) \geqq \underline{\alpha}(\sigma - \tau)^k$.

Bezeichnet X^0 den offenen Kern von $X = Q_{\sigma-\tau}A$, so gilt immer noch $\underline{J}(X^0) \geqq \underline{\alpha}(\sigma - \tau)^k$. Da X^0 keinen Punkt des Randes C enthält, schließt man in geläufiger Weise

$$\overline{J}(Q_{\sigma-\tau}C) \leqq (1 - \underline{\alpha})(\sigma - \tau)^k.$$

Andererseits ist

$$\overline{J}(P_\sigma C) \leqq \overline{J}(Q_{\sigma-\tau}C) + \overline{J}([P_\sigma - Q_{\sigma-\tau}]C).$$

So erhält man

$$\overline{J}(P_\sigma C) \leqq (1 - \underline{\alpha})(\sigma - \tau)^k + \sigma^k - (\sigma - \tau)^k.$$

Da die linke Seite unabhängig von τ ist, folgt so

(b) $$\overline{J}(P_\sigma C) \leqq (1 - \underline{\alpha})\sigma^k$$

im Widerspruch zu (a).

2. *Fall.* C sei eine J-Nullmenge: $\overline{J}(C) = 0$. Also ist A J-meßbar, w.z.b.w.

Beweis 4. Es sei W ein Würfel und $A \subset W$. Wir betrachten $B = W - A$. Nun ist $\overline{J}(P_\sigma A) \leqq \overline{\alpha}\sigma^k$ für $0 < \sigma < 1$; $P \epsilon B$; wo $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(A)$ gesetzt ist. In der üblichen Weise folgert man $\underline{J}(P_\sigma B) \geqq (1 - \overline{\alpha})\sigma^k$. Wegen der Voraussetzung $\overline{\alpha} < 1$ schließt man auf $\underline{\alpha}(B) > 0$ und nach Lemma 3 auf die J-Meßbarkeit von B. Hieraus folgt auch, daß A J-meßbar ist, w.z.b.w.

III.

Die Beweise von *Satz A* und *Satz B* ergeben sich nunmehr auf Grund der folgenden einfachen Bemerkungen:

a) Es sei $U = \Sigma A$ und $\underline{\alpha}(A) \geqq \bar{\alpha} \geqq 0$ gleichmäßig für alle A. Ist $P \epsilon U$, so läßt sich gewiß ein A finden, daß auch $P \epsilon A$ gilt. Nun ist $P_\sigma U \supseteqq P_\sigma A$ und so hat man zunächst

$$\underline{J}(P_\sigma U)\sigma^{-k} \geqq \underline{J}(P_\sigma A)\sigma^{-k} \geqq \underline{\alpha}$$

und damit $\underline{\alpha}(U) \geqq \underline{\alpha} > 0$; also ist U nach Lemma 3 J-meßbar.

b) Es sei $V = \Pi B$ und $\bar{\alpha}(B) \leqq \bar{\alpha} < 1$ gleichmäßig für alle B. Ist $P \notin V$, so gibt es gewiß ein B, sodaß auch $P \notin B$ gilt. Nun ist $P_\sigma V \subseteqq P_\sigma B$ und demnach

$$\bar{J}(P_\sigma V)\sigma^{-k} \leqq \bar{J}(P_\sigma B)\sigma^{-k} \leqq \bar{\alpha},$$

also $\bar{\alpha}(V) \leqq \bar{\alpha} < 1$; somit ist V nach Lemma 4 J-meßbar.

(Oblatum 16-8-50).