COMPOSITIO MATHEMATICA

HEINZ HUBER

Über analytische Abbildungen von Ringgebieten in Ringgebiete

Compositio Mathematica, tome 9 (1951), p. 161-168

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__9__161_0>

Über analytische Abbildungen von Ringgebieten in Ringgebiete [1])

von

Heinz Huber

Zürich

---

1. Ringgebiete.

Ein Gebiet $\mathfrak{R}$ der komplexen z-Ebene heiße ein Ringgebiet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $\mathfrak{R}$ ist zweifach zusammenhängend
b) $\mathfrak{R}$ hat keine isolierten Randpunkte
c) $\mathfrak{R}$ enthält den unendlichfernen Punkt nicht.

Die Komplementärmenge eines Ringgebietes $\mathfrak{R}$ zerfällt in eindeutiger Weise in zwei Komponenten, welche eine positive Entfernung von einander haben. Genau eine dieser beiden Komponenten ist beschränkt; sie werde mit $\mathfrak{b}(\mathfrak{R})$ bezeichnet. $\mathfrak{b}(\mathfrak{R})$ ist eine abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge. Die Menge derjenigen Randpunkte von $\mathfrak{R}$, welche in $\mathfrak{b}(\mathfrak{R})$ enthalten sind, heiße der innere Rand von $\mathfrak{R}$.

2. Der Modul eines Ringgebietes.

Ein Ringgebiet $\mathfrak{R}$ läßt sich bekanntlich stets durch eine in $\mathfrak{R}$ reguläre analytische Funktion eineindeutig auf einen konzentrischen Kreisring $0 < r < |z| < R$ abbilden. Dabei ist das Radienverhältnis R/r durch das Gebiet $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt. Die positive Zahl $M = \log(R/r)$ nennen wir den Modul des Ringgebietes $\mathfrak{R}$.

3. Analytische Abbildungen.

Es seien $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zwei Ringgebiete.

$w = f(z)$ heißt eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$ wenn gilt:

a) $f(z)$ ist in $\mathfrak{R}_1$ regulär und eindeutig
b) Es ist $w = f(z) \in \mathfrak{R}_2$ für alle $z \in \mathfrak{R}_1$.

---

[1]) Die Ergebnisse sind in Nr. 6 und 7 formuliert.

Die Menge aller analytischen Abbildungen von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\,[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$.

4. Die Umlaufszahl einer Abbildung.

Es sei w_0 ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{b}(\mathfrak{R}_2)$ und $\mathfrak{K}$ eine rektifizierbare Jordankurve, welche in $\mathfrak{R}_1$ liegt und $\mathfrak{b}(\mathfrak{R}_1)$ in ihrem Innengebiet enthält. Ist nun $f \in \mathfrak{F}\,[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$, so ist

$$U[f] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{K}} d\,\log\,[f(z) - w_0]$$

offenbar eine ganze Zahl. Man überlegt sich leicht, daß $U[f]$ unabhängig ist von der speziellen Wahl der Kurve $\mathfrak{K}$ und des Punktes w_0, sofern nur $\mathfrak{K}$ die angegebene Bedingung erfüllt und $w_0 \in \mathfrak{b}(\mathfrak{R}_2)$ ist.

$U[f]$ heiße die Umlaufszahl der analytischen Abbildung f.

Ist $\left.\begin{array}{l} U[f] > 0 \\ U[f] < 0 \end{array}\right\}$ so sagen wir, f sei eine Abbildung mit $\left.\begin{array}{l}\text{Erhaltung} \\ \text{Umkehrung}\end{array}\right\}$ des Umlaufsinnes.

5. Homotopieklassen.

Mit $\mathfrak{t}$ bezeichnen wir im folgenden stets das abgeschlossene Intervall $0 \leqq t \leqq 1$. Wir sagen, zwei Abbildungen $f_0 \in \mathfrak{F}$, $f_1 \in \mathfrak{F}$ seien homotop (in Zeichen: $f_0 \sim f_1$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Es gibt eine stetige Abbildung $w = f(z, t)$ des topologischen Produktes $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{t}$ in das Ringgebiet $\mathfrak{R}_2$ derart, daß

$$f(z, 0) = f_0(z), \; f(z, 1) = f_1(z)$$

b) Für jedes feste $t \in \mathfrak{t}$ ist $f(z, t) \in \mathfrak{F}\,[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$.

Diese Homotopierelation ist offenbar eine Aequivalenzrelation in der Menge $\mathfrak{F}$ und bewirkt daher eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{F}$. Diese Klassen nennen wir Homotopieklassen.

6. Wir werden in dieser Arbeit folgenden Satz beweisen:

Satz I: Es seien $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zwei Ringgebiete mit den Moduln M_1 und M_2. $\mathfrak{F}\,[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$ sei die Menge aller analytischen Abbildungen von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{H}_j$ die Menge aller Abbildungen $f \in \mathfrak{F}$, welche die Umlaufszahl $U\,[f] = j$ haben. Dann gilt:

a) $\mathfrak{F}[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$ zerfällt in $2\left[\dfrac{M_2}{M_1}\right] + 1$ Homotopieklassen. Es sind dies die Mengen

$$\mathfrak{H}_j, \quad -\left[\frac{M_2}{M_1}\right] \leqq j \leqq \left[\frac{M_2}{M_1}\right].$$

b) Ist $m = \dfrac{M_2}{M_1}$ eine ganze Zahl, so gilt zusätzlich:

Die Homotopieklasse $\left.\begin{matrix}\mathfrak{H}_m \\ \mathfrak{H}_{-m}\end{matrix}\right\}$ ist identisch mit der einparametrigen Schar aller konformen Abbildungen von $\mathfrak{R}_1$ auf die unverzweigte, m-blättrige Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}_2$ mit $\left.\begin{matrix}\text{Erhaltung} \\ \text{Umkehrung}\end{matrix}\right\}$ des Umlaufsinnes.

7. Betrachten wir nun den Spezialfall $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$. Dann ist $M_2/M_1 = 1$. Nach Satz I *a*) treten daher nur die drei Homotopieklassen $\mathfrak{H}_{-1}$, $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_1$ auf. Die Klasse $\mathfrak{H}_0$ besteht offenbar aus genau denjenigen Abbildungen, welche homotop sind zu einer beliebigen konstanten Abbildung $k(z) \equiv c$, $c \in \mathfrak{R}_2$. Aus Satz I *b*) folgt ferner, daß die Vereinigungsmenge $\mathfrak{H}_{-1} \cup \mathfrak{H}_1$ identisch ist mit der Gesamtheit aller konformen Automorphismen von $\mathfrak{R}$. Wir haben also

Satz II: Jede analytische Abbildung eines Ringgebietes $\mathfrak{R}$ in sich ist entweder ein (konformer) Automorphismus von $\mathfrak{R}$ oder homotop zu einer beliebigen konstanten Abbildung.

8. Um Satz I zu beweisen, beachten wir zunächst folgendes: Da $\mathfrak{R}_l$ ($l = 1,2$) den Modul M_l hat, gibt es eine in $\mathfrak{R}_l$ eindeutige und reguläre Funktion $g_l(z)$, welche $\mathfrak{R}_l$ eineindeutig auf den Kreisring

$$\mathfrak{r}_l\colon\ e^{-M_l/2} < |z| < e^{M_l/2}$$

derart abbildet, daß dem inneren Rande von $\mathfrak{R}_l$ der innere Rand von $\mathfrak{r}_l$ entspricht. Man überlegt sich nun leicht, daß Satz I bewiesen sein wird, wenn es gelingt, folgenden Satz zu beweisen:

Satz I′: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}[\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2]$ sei die Menge aller analytischen Abbildungen des Kreisringes

$$\mathfrak{r}_1\colon\ e^{-M_1/2} < |z| < e^{M_1/2}$$

in den Kreisring

$$\mathfrak{r}_2\colon\ e^{-M_2/2} < |z| < e^{M_2/2}.$$

Dann gilt:

a) Ist $f_0 \in \mathfrak{F}$, $f_1 \in \mathfrak{F}$ und $f_0 \sim f_1$, so ist $U[f_0] = U[f_1]$.

b) Ist $f_0 \in \mathfrak{F}$, $f_1 \in \mathfrak{F}$ und $U[f_0] = U[f_1]$, so ist $f_0 \sim f_1$.

c) Ist j eine ganze Zahl, $-\left[\frac{M_2}{M_1}\right] \leqq j \leqq \left[\frac{M_2}{M_1}\right]$, α reell und $f_{j,\alpha}(z) = e^{i\alpha} z^j$, so ist $f_{j,\alpha} \in \mathfrak{F}$ und $U[f_{j,\alpha}] = j$.

d) Für jede Abbildung $f \in \mathfrak{F}$ ist

$$-\left[\frac{M_2}{M_1}\right] \leqq U[f] \leqq \left[\frac{M_2}{M_1}\right].$$

Ist $m = M_2/M_1$ eine ganze Zahl, so gilt zusätzlich:

e) Aus $f \in \mathfrak{F}$, $U[f] = m$ folgt $f(z) = e^{i\alpha} z^m$, α reell.

f) Aus $f \in \mathfrak{F}$, $U[f] = -m$ folgt $f(z) = e^{i\alpha} z^{-m}$, α reell.

9. Für den Beweis von Satz I' benötigen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Die Funktion $\varphi(s)$, $s = \sigma + i\tau$, sei regulär im Parallelstreifen

$$\mathfrak{S}:\ -\pi/2 < \tau < \pi/2$$

und bilde $\mathfrak{S}$ in sich ab. Dann gilt:

a) $|\varphi'(\sigma)| \leqq 1$ für alle reellen σ.

b) Ist für ein reelles σ $|\varphi'(\sigma)| = 1$, so ist der zugehörige Funktionswert $\varphi(\sigma)$ reell.

Beweis: Es sei σ eine feste reelle Zahl, $-\infty < \sigma < \infty$ und $\varphi(\sigma) = \Sigma + iT$, ($\Sigma$, T reell, $-\pi/2 < T < \pi/2$).
Wir setzen

$$(1)\qquad \begin{aligned} S_1(s) &= \frac{1+s}{1-s} \\ S_2(s) &= \log s + \sigma \quad (\Re(s) > 0,\ S_2(1) = \sigma). \\ S_3(s) &= e^{s-\Sigma} \\ S_4(s) &= \frac{s + e^{iT}}{s - e^{-iT}}. \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Funktion

$$(2)\qquad \omega(s) = S_4 S_3 \varphi S_2 S_1(s)$$

bildet offenbar den Einheitskreis $|s| < 1$ in sich ab und läßt den Nullpunkt fest. Daraus folgt bekanntlich

$$(3)\qquad |\omega'(0)| \leqq 1.$$

Nun schließt man aber aus (1) und (2)

$$(4)\quad \omega'(0) = S_1'(0) \,.\, S_2'(1) \,.\, \varphi'(\sigma) \,.\, S_3'(\Sigma + iT) \,.\, S_4'(e^{iT}) = \frac{e^{iT}}{\cos T}\varphi'(\sigma)$$

Aus (3) und (4) ergibt sich jetzt

(5) $$|\varphi'(\sigma)| \leqq \cos T \leqq 1. \qquad \text{q.e.d.}$$

Ist für ein reelles σ $|\varphi'(\sigma)| = 1$, so muß wegen (5) $\cos T = 1$, d.h. $T = 0$ sein. $\varphi(\sigma) = \Sigma + iT$ ist dann reell. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2: Die Funktion $\varphi(s)$, $s = \sigma + i\tau$, sei regulär im Parallelstreifen

$$\mathfrak{S}\colon\ -\pi/2 < \tau < \pi/2$$

und bilde $\mathfrak{S}$ in sich ab. Dann gilt:

a) $|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)| \leqq |\sigma_2 - \sigma_1|$ für alle reellen σ_1, σ_2.

b) Gibt es ein reelles Wertepaar $\sigma_1 \neq \sigma_2$ derart, daß $|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)| = |\sigma_2 - \sigma_1|$, so ist entweder $\varphi(s) = s + \gamma$ oder $\varphi(s) = -s + \gamma$, γ reell.

Beweis: Es sei

(6) $$-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$$

Nach Hilfssatz 1 *a*) ist

(7) $$|\varphi'(\sigma)| \leqq 1 \text{ für alle } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$$

Daraus folgt

(8) $$|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)| = \left|\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi'(\sigma)d\sigma\right| \leqq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\varphi'(\sigma)|\, d\sigma \leqq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma = |\sigma_2 - \sigma_1|$$

q.e.d.

Ist für das Wertepaar (6) $|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)| = |\sigma_2 - \sigma_1|$, so muß wegen (8)

(9) $$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\varphi'(\sigma)|\, d\sigma = |\sigma_2 - \sigma_1|$$

sein. Weil $|\varphi'(\sigma)|$ im abgeschlossenen Intervalle $[\sigma_1, \sigma_2]$ stetig ist, folgt aus (7) und (9)

(10) $$|\varphi'(\sigma)| = 1 \text{ für alle } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2].$$

Dann ist aber nach Hilfssatz 1 *b*) $\varphi(\sigma)$ reell im ganzen Intervall $[\sigma_1, \sigma_2]$. Daher ist auch $\varphi'(\sigma)$ reell im Intervall $[\sigma_1, \sigma_2]$. Daraus und aus (10) folgt nun wegen der Stetigkeit von $\varphi'(\sigma)$:

es ist entweder $\varphi'(\sigma) = 1$ für alle $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$

oder $\varphi'(\sigma) = -1$ für alle $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$

Weil aber $\varphi(s)$ eine analytische Funktion ist, schließen wir hieraus sofort, daß entweder $\varphi(s) = s + \gamma$

oder $\varphi(s) = -s + \gamma$, $s \in \mathfrak{S}$.

Da $\varphi(s)$ eine Abbildung von $\mathfrak{S}$ in sich vermittelt, folgt endlich noch, daß die Konstante γ reell sein muß. Damit ist Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

10. Beweis von Satz I'.

a): Es sei

$$f_0 \in \mathfrak{F}, \quad f_1 \in \mathfrak{F}, \quad f_0 \sim f_1$$

Dann gibt es eine stetige Abbildung $w = f(z, t)$ von $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{t}$ in $\mathfrak{r}_2$ derart, daß $f(z, 0) = f_0(z)$, $f(z, 1) = f_1(z)$ und $f(z, t) \in \mathfrak{F}$ für jedes $t \in \mathfrak{t}$.

Wir betrachten nun die Funktion

$$u(t) = U[f(z, t)] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{f'_z(z, t)}{f(z, t)} dz.$$

Man überlegt sich leicht, daß $u(t)$ eine im abgeschlossenen Intervall $\mathfrak{t}$ stetige Funktion ist. $u(t)$ nimmt aber nur ganzzahlige Werte an. Daher muß $u(t)$ konstant sein. Es ist also insbesondere $u(0) = u(1)$ d.h. $U[f_0] = U[f_1]$. q.e.d.

b): Es sei

$$f_0 \in \mathfrak{F}, \; f_1 \in \mathfrak{F}, \; U[f_0] = U[f_1] = j$$

Daraus folgt leicht: es existieren zwei in $\mathfrak{r}_1$ reguläre und eindeutige Funktionen $\xi_0(z)$ und $\xi_1(z)$ derart, daß

$$\begin{aligned} f_0(z) &= z^j e^{\xi_0(z)} \\ f_1(z) &= z^j e^{\xi_1(z)} \end{aligned} \tag{11}$$

Mit diesen beiden Funktionen bilden wir jetzt die Funktion

$$f(z, t) = z^j e^{t[\xi_1(z) - \xi_0(z)] + \xi_0(z)}, \quad (z, t) \in \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{t} \tag{12}$$

Dann gilt offenbar:

α) Für jedes feste $t \in \mathfrak{t}$ ist $f(z, t)$ eine in $\mathfrak{r}_1$ reguläre und eindeutige Funktion von z.

β) $f(z, 0) = f_0(z)$, $f(z, 1) = f_1(z)$.

Wir zeigen noch:

γ) $f(z, t)$ ist eine stetige Abbildung von $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{t}$ in $\mathfrak{r}_2$.

In der Tat: Wir betrachten einen beliebigen Punkt $(z, t) \in \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{t}$ und die reelle Funktion

$$\varrho(\tau) = |f(z, \tau)| = |z^j e^{\xi_0(z)}| \,.\, e^{\tau \Re[\xi_1(z) - \xi_0(z)]}, \quad \tau \in \mathfrak{t} \tag{13}$$

Dann ist $\varrho(0) = |f_0(z)|$, $\varrho(1) = |f_1(z)|$ und daher

$$e^{-M_2/2} < \varrho(0) < e^{M_2/2}, \quad e^{-M_2/2} < \varrho(1) < e^{M_2/2} \tag{14}$$

Aus (13) schließt man sofort, daß $\varrho(\tau)$ eine im Intervalle $\mathfrak{t}$ monotone Funktion ist. Daher liegt $\varrho(t)$ zwischen $\varrho(0)$ und $\varrho(1)$. Daraus und aus (14) folgt aber

$$e^{-M_2/2} < \varrho(t) < e^{M_2/2}, \text{ d.h. } f(z, t) \in \mathfrak{r}_2.$$

Damit ist gezeigt, daß $f(z, t)$ eine Abbildung von $\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{t}$ in $\mathfrak{r}_2$ vermittelt; daß diese Abbildung stetig ist, folgt unmittelbar aus (12).

Aus α), β), γ) schließen wir nun, daß f_0 und f_1 homotop sind. q.e.d.

c): Klar.

d): Es sei

(15) $$f \in \mathfrak{F}, \; U[f] = j$$

Dann gilt offenbar:

α) die Funktion

(16) $$\varphi(s) = -i\frac{\pi}{M_2} \log f(e^{i\frac{M_1}{\pi}s}), \quad s = \sigma + i\tau$$

ist im Parallelstreifen

$$\mathfrak{S}: \; -\pi/2 < \tau < \pi/2$$

überall regulär und daher auf Grund des Monodromieprinzipes daselbst auch eindeutig, wenn man noch den „Anfangswert" $\varphi(0)$, der ja durch (16) nur mod. $2\pi^2/M_2$ bestimmt ist, durch die Forderung $0 \leqq \Re[\varphi(0)] < 2\pi^2/M_2$ festlegt.

β) $\varphi(s)$ vermittelt eine Abbildung von $\mathfrak{S}$ in sich.

Ferner schließt man leicht aus (15), daß $\varphi(s)$ die Funktionalgleichung

(17) $$\varphi\left(s + \frac{2\pi^2}{M_1}\right) = \varphi(s) + j\frac{2\pi^2}{M_2}$$

erfüllt.

Nach Hilfssatz 2 *a*) folgt jetzt aus α) und β):

$$\left|\varphi\left(\frac{2\pi^2}{M_1}\right) - \varphi(0)\right| \leqq \frac{2\pi^2}{M_1}.$$

Hieraus und aus (17) ergibt sich endlich: $|j| \leqq M_2/M_1$. q.e.d.

e): Es sei

(18) $$m = M_2/M_1 \text{ ganz}, \; f \in \mathfrak{F}, \; U[f] = m$$

Dann gilt wieder

α) Die im Parallelstreifen $\mathfrak{S}$ eindeutig definierte Funktion

$$\varphi(s) = -i\frac{\pi}{M_2} \log f(e^{i\frac{M_1}{\pi}s})$$
$$0 \leqq \Re[\varphi(0)] < 2\pi^2/M_2$$

ist regulär in $\mathfrak{S}$.

β) $\varphi(s)$ bildet $\mathfrak{S}$ in sich ab.

Aus (18) schließt man leicht, daß $\varphi(s)$ die Funktionalgleichung

$$\varphi\left(s + \frac{2\pi^2}{M_1}\right) = \varphi(s) + m\,\frac{2\pi^2}{M_2} = \varphi(s) + \frac{2\pi^2}{M_1} \tag{19}$$

erfüllt. Es ist also insbesondere

$$\left|\varphi\left(\frac{2\pi^2}{M_1}\right) - \varphi(0)\right| = \frac{2\pi^2}{M_1}.$$

Hieraus und aus α), β) folgt aber nach Hilfssatz 2 b), daß

entweder $\qquad \varphi(s) = s + \gamma$

oder $\qquad \varphi(s) = -s + \gamma, \quad \gamma$ reell

sein muß. Daraus und aus (19) ergibt sich sofort: $\varphi(s) = s + \gamma$,

d.h.
$$-i\,\frac{\pi}{M_2}\log f\left(e^{i\frac{M_1}{\pi}s}\right) = s + \gamma.$$

Berücksichtigen wir noch (18), so kommt

$$f\left(e^{i\frac{M_1}{\pi}s}\right) = e^{i\frac{M_2}{\pi}(s+\gamma)} = e^{i\frac{mM_1}{\pi}(s+\gamma)} = \left[e^{i\frac{M_1}{\pi}s}\right]^m \cdot e^{imM_1\gamma/\pi}.$$

Kehren wir wieder zur Variabeln $z = e^{i\frac{M_1}{\pi}s} \in \mathfrak{r}_1$ zurück, so haben wir endlich:

$$f(z) = e^{ia}z^m, \quad a = mM_1\gamma/\pi \text{ reell.} \qquad \text{q.e.d.}$$

f) wird ganz analog dem Beweise von e) geführt.

Damit ist alles bewiesen.

(Oblatum 20-6-50).